Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

LUOGO DELLE RADICI

Ing. Francesco Smarra & Ing. Alessandro Borri

Richiami di teoria[1]

Generalità

Sia dato un sistema dinamico a controreazione unitaria com in Fig. 1, descritto dalla funzione di trasferimento $F(s)$ sul ramo diretto

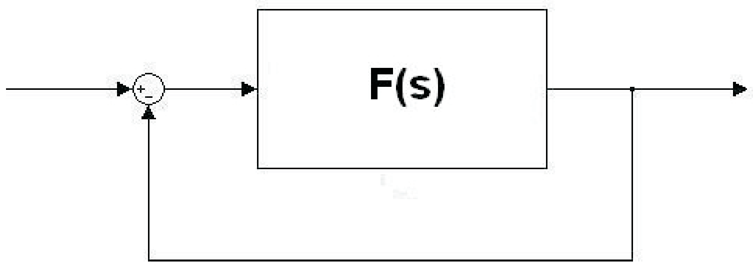

Figure 1: Schema

$$F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è descritta dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{Num_{F(s)}}{Num_{F(s)} + Den_{F(s)}} = \frac{K' \prod_{1=1}^{m} (s - z_i)}{K' \prod_{i=1}^{m} (s - z_i) + \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

[1]Per approfondimenti, si rimanda il lettore al seguente riferimento: A. Isidori, Sistemi di Controllo, 2nd ed., Ed. Siderea, 1992.

Definizione: *Il luogo delle radici è il luogo descritto, nel piano complesso, dalle radici dell'equazione*

$$K' \prod_{i=1}^{m} (s - z_i) + \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) = 0$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Finalità: Il luogo delle radici può essere studiato per risolvere il problema della stabilizzazione del sistema a ciclo chiuso. Più in generale permette di assicurare che i poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso (radici dell'equazione appena scritta per un fissato K') appartengano ad una regione desiderata.
Nel caso della stabilizzazione, se per uno o più valori del guadagno (generalmente un intervallo), i poli a ciclo chiuso sono tutti nel semipiano sinistro del piano complesso, allora si può stabilizzare il sistema a ciclo chiuso con la scelta di un opportuno K' sul ramo diretto. Altrimenti è necessario ricorrere ad una compensazione più complessa, di tipo dinamico (discussa in seguito).

L'equazione scritta in precedenza (*equazione del luogo*) coinvolge grandezze complesse; può dunque essere riscritta come una coppia di uguaglianze tra grandezze reali

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \measuredangle (s - p_i) &= \pi + \measuredangle (K') + \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s - z_i) + 2h\pi \\ \prod_{1=1}^{n} |s - p_i| &= |K'| \prod_{1=1}^{m} |s - z_i| \end{aligned}$$

con h numero intero qualsiasi.
Queste equazioni prendono il nome, nell'ordine, di *condizione di fase* e *condizione di modulo*; esse possono essere utilizzate rispettivamente per il tracciamento e per la graduazione del luogo.
E' opportuno, tuttavia, tracciare il luogo delle radici ricorrendo a semplici regole generali, invece di servirsi di tali condizioni. Nel seguito, si parlerà di *luogo positivo* per indicare la parte del luogo corrispondente a valori $K' > 0$, di *luogo negativo* per indicare la parte del luogo con $K' < 0$.

Tracciamento del luogo (analisi)

1. Il luogo delle radici è costituito da n curve dette rami.

2. I poli del sistema a ciclo aperto sono i punti del luogo corrispondenti al valore $K' = 0$.

3. I punti dell'asse reale sono sempre punti del luogo (soddisfano la condizione di fase). Appartengono al luogo positivo i punti dell'asse reale che lasciano alla loro destra un numero dispari di poli e/o zeri di $F(s)$, contati con la loro molteplicità. I restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo.

4. Per K' che tende a $\pm\infty$, m rami del luogo convergono sugli zeri di $F(s)$ ed i restanti $n - m$ rami del luogo verso il punto improprio (∞).

5. I rami che convergono al punto improprio tendono ad $n - m$ semirette (*asintoti del luogo*) che formano con l'asse reale angoli pari a

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= \frac{(2h+1)\,\pi}{n-m} \quad \text{per il luogo positivo} \\ \varphi_- &= \frac{2h\pi}{n-m} \quad \text{per il luogo negativo} \end{aligned}$$

   con $h = 1, 2, ..., n - m$.

6. Gli asintoti si intersecano in un solo punto s_o, appartenente all'asse reale, chiamato *centro degli asintoti*, di ascissa pari a :
$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

7. I punti singolari del luogo (soluzioni multiple dell'equazione del luogo) sono soluzioni del seguente sistema di equazioni corrispondenti ad un valore reale del parametro K'
$$\begin{cases} K' \prod_{i=1}^{m} (s-z_i) + \prod_{i=1}^{n} (s-p_i) = 0 \\ K' \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^{m} (s-z_i) + \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^{n} (s-p_i) = 0 \end{cases}$$
Essi sono al più $n+m-1$.

8. In un punto singolare del luogo, soluzione dell'equazione del luogo con molteplicità μ (per un certo K'), confluiscono 2μ rami del luogo, alternativamente convergenti e divergenti. Le tangenti a questi rami nel punto singolare dividono l'angolo giro in 2μ parti uguali.

9. Gli eventuali punti di attraversamento dell'asse immaginario si determinano applicando il criterio di Routh all'equazione del luogo.

Stabilizzazione (sintesi)

1. Si analizza prima il caso di sistemi a **fase minima**, cioè con tutti gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso. Questa situazione è favorevole in quanto si ha la sicurezza che m rami del luogo positivo, per K' sufficientemente elevato, tenderanno a spostarsi nel semipiano sinistro del piano complesso. Risulta quindi decisiva, ai fini della stabilità, la posizione e l'orientamento degli $n-m$ asintoti del luogo.

- Caso $n-m=1$. Il luogo positivo ha un asintoto costituito dall'asse reale, con valore di fase pari a π. Di conseguenza, per un valore sufficientemente alto di K', si avranno tutti i poli a sinistra dell'asse immaginario, e quindi il sistema sarà stabile asintoticamente a ciclo chiuso.

- Caso $n-m=2$. Il luogo positivo ha due asintoti, nella direzione dell'asse immaginario, con valori di fase pari a $\pi/2$ e $3\pi/2$. Di conseguenza la stabilità dipende dalla posizione del centro degli asintoti. Se esso è a parte reale negativa, allora si ha stabilità asintotica del sistema del sistema per un K' sufficientemente elevato. Altrimenti si inserisce una coppia polo-zero (controllore proprio di ordine 1) che sposti il centro degli asintoti a sinistra dell'origine, e poi si sceglie un K' sufficientemente elevato per stabilizzare il sistema retroazionato.

- Caso $n-m \geq 3$. Il luogo positivo ha sempre almeno un asintoto che va nel verso delle ascisse positive. Quindi non si può stabilizzare il sistema solo con un guadagno elevato. Si procede a riportarsi al caso $n-m=2$ aggiungendo un controllore con $n-m-2$ zeri a parte reale negativa. Poi, nel caso in cui il centro degli asintoti sia a parte reale negativa, allora si ha stabilità asintotica del sistema del sistema per un K' sufficientemente elevato. Altrimenti si inserisce un'ulteriore coppia polo-zero che sposti il centro degli asintoti a sinistra dell'origine, e poi si sceglie un K' sufficientemente elevato per stabilizzare il sistema retroazionato.

Una volta stabilizzato il sistema, si valuta se il controllore progettato è proprio. Se è così, il problema è risolto, altrimenti si aggiungono $n-m-2$ poli lontani per ottenere la causalità del sistema. Si dimostra che se i poli aggiunti sono sufficientemente lontani, non cambia il valore di K' scelto precedentemente ai fini della stabilità del sistema. Per la scelta dei poli lontani, si può ricorrere al criterio di Routh, avendo fissato il guadagno K'.

2. Se il sistema è a **fase non minima**, per K' sufficientemente elevato si ha instabilità del sistema retroazionato. Non esistono metodi standard per la risoluzione generale del problema di stabilizzazione. Talvolta è necessario studiare il luogo negativo o aggiungere poli e zeri in modo opportuno, con il fine di creare punti singolari che "attraggano" il luogo a sinistra dell'asse immaginario. Si analizzano di seguito alcune situazioni tipiche:

- Se $F(s)$ ha solo poli a parte reale negativa (sistema a ciclo aperto stabile asintoticamente), è necessario e sufficiente, ai fini della stabilità asintotica a ciclo chiuso, scegliere valori di K' non troppo grandi.
- Se $F(s)$ ha solo uno zero ed un polo con parte reale positiva, con il polo posto a destra dello zero, si può porre un altro polo positivo a destra di quello già esistente. In questo modo, "si creerà" un punto singolare tra questi due poli, ed il luogo può assumere una configurazione tale da stabilizzare il sistema a ciclo chiuso per K' interno ad un opportuno intervallo (relativo ad una porzione di luogo positivo).
- Se $F(s)$ ha solo uno zero ed un polo con parte reale positiva, con il polo posto a sinistra dello zero, si ha sicuramente un punto singolare a destra dello zero positivo. Se non è presente un altro punto singolare nel tratto di luogo negativo tra l'origine ed il polo positivo, allora il luogo può assumere una configurazione tale da stabilizzare il sistema a ciclo chiuso per K' interno ad un opportuno intervallo (in questo caso relativo ad una porzione di luogo negativo).

In altri casi, il procedimento non risulta essere sempre immediato. Ad ogni modo, è possibile anche non utilizzare il luogo delle radici e servirsi del teorema enunciato qui di seguito per l'assegnazione dei poli del sistema a retroazione (problema più forte di quello della stabilizzazione).

Teorema: *Dato un processo di ordine n, esiste sempre un controllore proprio di ordine n-1 che stabilizza asintoticamente il sistema.*

Basterà, in questo caso, costruire il compensatore in modo parametrico e risolvere il sistema di equazioni che si ottiene imponendo la coincidenza del denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso con un polinomio prefissato.
Per un processo $P(s)$ di ordine n, basterà imporre un controllore di ordine $n-1$ così fatto

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + ... + b_1 s + b_0}{s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + ... + a_1 s + a_0}$$

caratterizzato da $2n-1$ parametri da scegliere.
In questo modo si ha, sul ramo diretto, una funzione di trasferimento $F(s) = G(s)P(s)$ con $2n-1$ poli e lo stesso si ha per la funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso $W(s)$.
Basterà imporre l'uguaglianza tra il denominatore di $W(s)$ ed un polinomio prefissato e tale uguaglianza si ridurrà ad un sistema di $2n-1$ equazioni lineari nei $2n-1$ parametri liberi. Si può mostrare che tale sistema ha sempre soluzione, a patto che numeratore e denominatore di $P(s)$ siano primi tra loro.

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 1

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

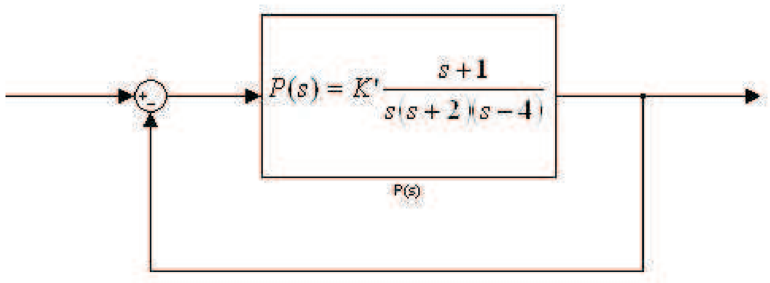

Figure 2: Schema

<u>Soluzione:</u>

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K' \frac{s+1}{s\ (s+2)\ (s-4)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\, m = 1 \Rightarrow n - m = 2 \\ z_1 &= -1 \Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\, p_2 = -2,\, p_3 = 4 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{-2+4+1}{2} = \frac{3}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_P(s)}{N_P(s) + D_P(s)} = \frac{K'\,(s+1)}{K'\,(s+1) + s\ (s+2)\ (s-4)}$$

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\,(s+1) + s(s+2)(s-4) = s^3 - 2s^2 + (K' - 8)\,s + K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Osservazione: c'è almeno una variazione di segno e quindi almeno una radice positiva. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni K' (coerentemente con il fatto che $s_0 > 0$).

Punti singolari:

$$\begin{cases} s^3 - 2s^2 + (K' - 8)\, s + K' = 0 \\ 3s^2 - 4s + K' - 8 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha 3 soluzioni, ma 2 non sono valide perchè corrispondenti a valori non reali di K'

$$\begin{aligned} s &= 1.\,82 & \text{con } K' = 5.\,37 \\ s &= -1.\,16 - j0.93 & \text{con } K' = 1.\,94 - j10.\,16 \\ s &= -1.\,16 + j0.93 & \text{con } K' = 1.\,94 + j10.\,16 \end{aligned}$$

L'unico punto singolare è quindi

$$s = 1.\,82 \quad \text{con } K' = 5.\,37$$

In base a quanto detto finora, il luogo delle radici si presenta come in Fig. 3 e Fig. 4.

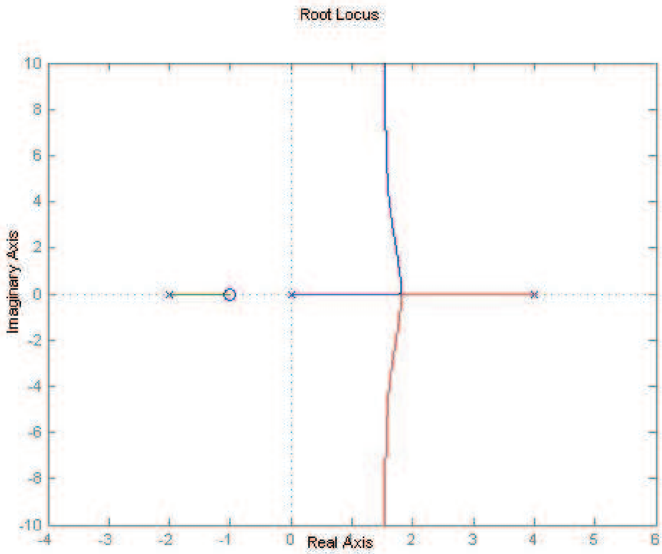

Figure 3: Luogo positivo P.

Analisi del luogo: dato che $n = 3$ allora il luogo positivo ed il luogo negativo avranno 3 rami. Nel luogo positivo ci sono due rami che appartengono al semipiano positivo, che sono quelli che partono dai poli in 0 e 4 e vanno all'infinito per $K' \to \infty$, ed un ramo che appartiene al semipiano negativo, che è quello che parte dal polo in -2 e va verso lo zero in -1 per $K' \to \infty$. Nel luogo negativo ci sono due rami che appartengono al semipiano negativo, uno che parte dall'infinito con $K' = -\infty$ e va verso il polo in -2 per $K' \to 0^-$ ed uno che parte con $K' = -\infty$ dallo zero in -1 e va verso il polo in 0 per $K' \to 0^-$, ed un ramo che appartiene al semipiano positivo, che è quello che parte dall'infinito con $K' = -\infty$ e va verso il polo in 4 per $K' \to 0^-$. Quindi si può concludere che scegliendo un $K' > 0$ si avranno due poli instabili ed un polo stabile, scegliendo invece un $K' < 0$ si avranno 2 poli stabili ed un polo instabile, quindi il sistema non può essere stabilizzato con un semplice guadagno. Quanto detto può essere verificato costruendosi la tabella di Routh.

Stabilizzazione: si aggiunge una coppia polo-zero per spostare s_0 a sinistra dell'asse immaginario

$$G(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

Si può scegliere $z = 2$ in modo da cancellare un polo stabile in $P(s)$; inoltre si può imporre il nuovo centro degli asintoti in $-\frac{1}{2}$

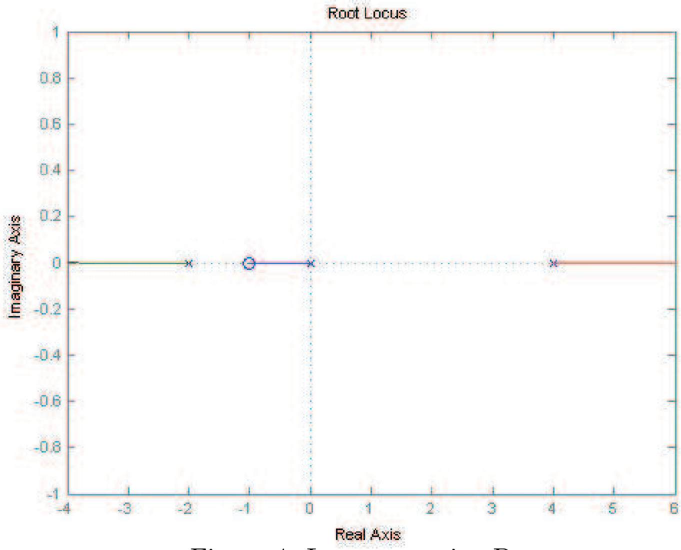

Figure 4: Luogo negativo P.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s+z}{s+p} = \frac{s+2}{s+p} \\ s_0' &= s_0 - \frac{p-z}{2} = \frac{3}{2} - \frac{p-2}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow p = 6 \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto ora è

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{s+2}{s+6} \frac{K'(s+1)}{s\,(s+2)\,(s-4)} = K' \frac{(s+1)}{s\,(s-4)\,(s+6)}$$

La nuova funzione di trasferimento a ciclo chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'(s+1)}{K'(s+1) + s\,(s-4)\,(s+6)}$$

Il luogo delle radici è ora descritto dall'equazione

$$K'(s+1) + s(s-4)(s+6) = s^3 + 2s^2 + (K'-24)\,s + K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 24.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|ll} 3 & 1 & K'-24 \\ 2 & 2 & K' \\ 1 & \frac{2(K'-24)-K'}{2} = \frac{K'-48'}{2} & 0 \\ 0 & K' & 0 \end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 48.$$

Annullando la penultima riga della tabella di Routh ($K' = 48$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario risolvendo l'equazione

$$2s^2 + 48 = 0$$

Gli attraversamenti si hanno per

$$s = \pm j4.9$$

Il nuovo luogo delle radici è rappresentato in Fig. 5 e Fig. 6.

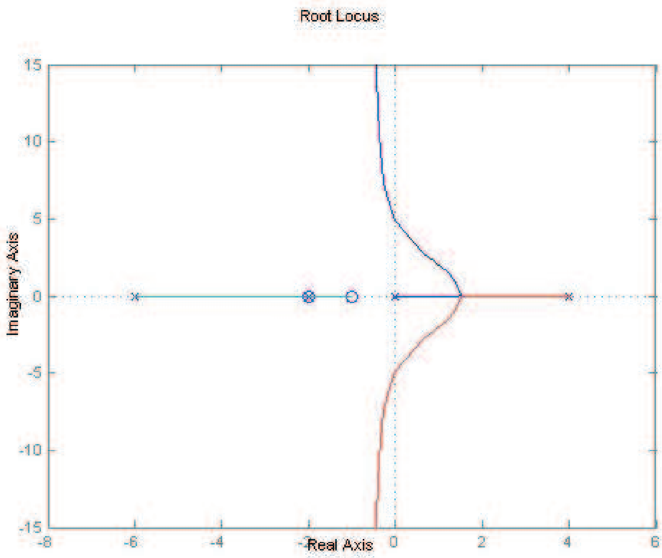

Figure 5: Luogo positivo F.

Analisi del luogo: dato che $n = 3$ allora il luogo positivo ed il luogo negativo avranno 3 rami. Nel luogo positivo, per un valore di $K' \in (0, \bar{K}')$, ci sono due rami che appartengono al semipiano positivo, che sono quelli che partono dai poli in 0 e 4 ed arrivano sull'asse immaginario per $K' = \bar{K}'$, ed un ramo che appartiene al semipiano negativo $\forall K' > 0$, che è quello che parte dal polo in -6 e va verso lo zero in -1. Per $K' > \bar{K}'$ invece, ci sono tre rami che appartengono al semipiano negativo, due dei quali sono quelli che partono dall'asse immaginario e vanno all'infinito per $K' \to \infty$ ed uno che appartiene al semipiano negativo $\forall K' > 0$, che è quello che va nello zero in -1. Nel luogo negativo ci sono due rami che appartengono al semipiano negativo, uno che parte dall'infinito con $K' = -\infty$ e va verso il polo in -6 per $K' \to 0^-$ ed uno che parte con $K' = -\infty$ dallo zero in -1 e va verso il polo in 0 per $K' \to 0^-$, ed un ramo che appartiene al semipiano positivo, che è quello che parte dall'infinito con $K' = -\infty$ e va verso il polo in 4 per $K' \to 0^-$. Quindi si può concludere che scegliendo un $K' < 0$ si avranno due poli stabili ed un polo instabile, scegliendo un $0 < K' < \bar{K}'$ si avranno 2 poli instabili ed un polo stabile, scegliendo invece un $K' > \bar{K}'$ si avranno 3 poli stabili. Si ha quindi stabilità per $K' > \bar{K}'$. Si può notare che quanto detto è coerente con la tabella di Routh costruita ed in particolare risulta $\bar{K}' = 48$.

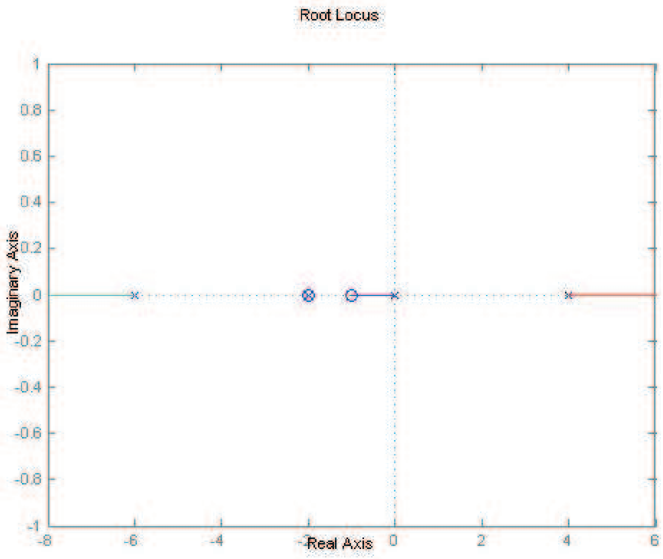

Figure 6: Luogo negativo F.

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 2

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

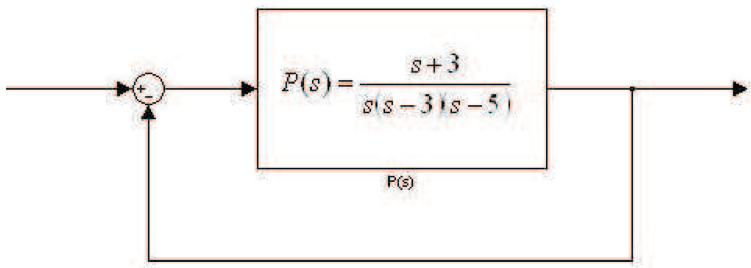

Figure 7: Schema

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{s+3}{s\ (s-3)\ (s-5)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\ m = 1 \Rightarrow n - m = 2 \\ z_1 &= -3 \Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{3+5+3}{2} = \frac{11}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria), aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s+3)}{K'\,(s+3) + s\,(s-3)\,(s-5)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\,(s+3) + s\,(s-3)\,(s-5) = s^3 - 8s^2 + (K'+15)\,s + 3K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Osservazione: c'è almeno una variazione di segno e quindi almeno una radice positiva. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni K' (coerentemente con il fatto che $s_0 > 0$). Di conseguenza non è sufficiente l'inserimento di un controllore statico $G(s) = K'$, ma bisogna ricorrere a qualcosa di più complesso.
In base a quanto [illegible] g. 9.

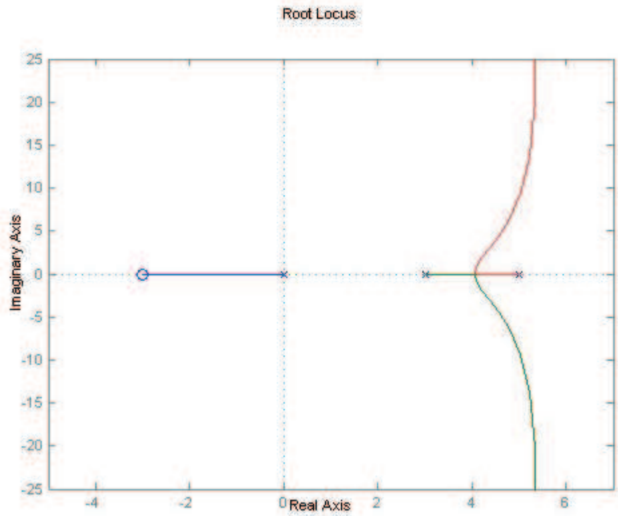

Figure 8: Luogo positivo P.

Analisi del luogo: dato che $n = 3$ allora il luogo positivo ed il luogo negativo avranno 3 rami. Nel luogo positivo ci sono due rami che appartengono al semipiano positivo, che sono quelli che partono dai poli in 3 e 5 e vanno all'infinito per $K' \to \infty$, ed un ramo che appartiene al semipiano negativo, che è quello che parte dal polo in 0 e va verso lo zero in -3 per $K' \to \infty$. Nel luogo negativo, per $K' \in (-\infty, \bar{K}')$, ci sono due rami che appartengono al semipiano negativo, che sono quelli che partono dall'infinito e dallo zero in -3 ed arrivano sull'asse immaginario per $K' = \bar{K}'$, ed un ramo che appartiene al semipiano positivo $\forall K' < 0$, che è quello va verso il polo in 5. Per $K' \in (\bar{K}', 0)$ invece, ci sono tre rami che appartengono al semipiano positivo, due dei quali sono quelli che partono dall'asse immaginario per $K' = \bar{K}'$ e finiscono nei poli in 0 e 3 per $K' = 0^-$ ed uno che arriva nel polo in -15 per $K' = 0^-$. Quindi si può concludere che scegliendo un $K' > 0$ si avranno due poli instabili ed un polo stabile, scegliendo un $K' \in (\bar{K}', 0)$ si avranno 3 poli instabili e scegliendo un

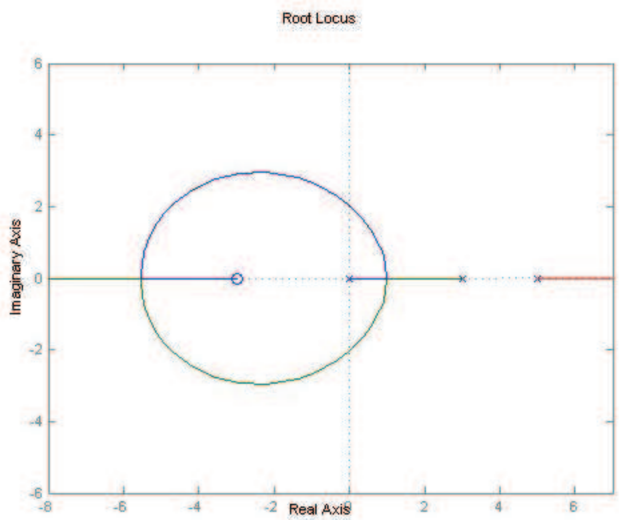

Figure 9: Luogo negativo P.

$K' < \bar{K}'$ si avranno 2 poli instabili ed un polo stabile. Quindi il sistema non può essere stabilizzato con un semplice guadagno. Quanto detto può essere verificato costruendosi la tabella di Routh.
Stabilizzazione: si aggiunge una coppia polo-zero per spostare s_0 a sinistra dell'asse immaginario

$$G(s) = K' \frac{s+z}{s+p}$$

Non ci sono poli stabili (e quindi cancellabili) in $P(s)$; si può imporre il nuovo centro degli asintoti in -1

$$\begin{aligned} G(s) &= K' \frac{s+z}{s+p} \\ s_0' &= s_0 - \frac{p-z}{2} = \frac{11}{2} - \frac{p-z}{2} = -1 \Longrightarrow p - z = 13 \end{aligned}$$

Scelgo, ad esempio

$$z = 2,\ p = 15$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto ora è

$$F'(s) = G(s)P(s) = K' \frac{s+2}{s+15} \frac{(s+3)}{s\ (s-3)\ (s-5)} = K' \frac{(s+2)\,(s+3)}{s\ (s-3)\ (s-5)\,(s+15)}$$

La nuova funzione di trasferimento a ciclo chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s+2)\,(s+3)}{K'\,(s+2)\,(s+3) + s\ (s-3)\ (s-5)\,(s+15)}$$

Il luogo delle radici è ora descritto dall'equazione

$$K'\,(s+2)\,(s+3) + s\ (s-3)\ (s-5)\,(s+15) = s^4 + 7s^3 + (K' - 105)\,s^2 + (5K' + 225)\,s + 6K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 105.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|lll}
4 & 1 & K'-105 & 6K' \\
3 & 7 & 5K'+225 & 0 \\
2 & \frac{7(K'-105)-5K'-225}{7} = \frac{2K'-960}{7} & 6K' & 0 \\
1 & \frac{5(K')^2-2322K'-108\,000}{(K'-480)} & 0 & \\
0 & 6K' & 0 &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 480 \text{ e } 5(K')^2 - 2322K' - 108\,000 > 0$$

Mettendo a sistema le soluzioni, si ha

$$K' > 507$$

Annullando la penultima riga della tabella di Routh ($K' = 507$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario risolvendo l'equazione

$$\frac{2*507-960}{7}s^2 + 6*507 = 0$$

Gli attraversamenti si hanno per

$$s = \pm j19.86$$

Il nuovo luogo delle radici è rappresentato in Fig. 10 e Fig. 11.

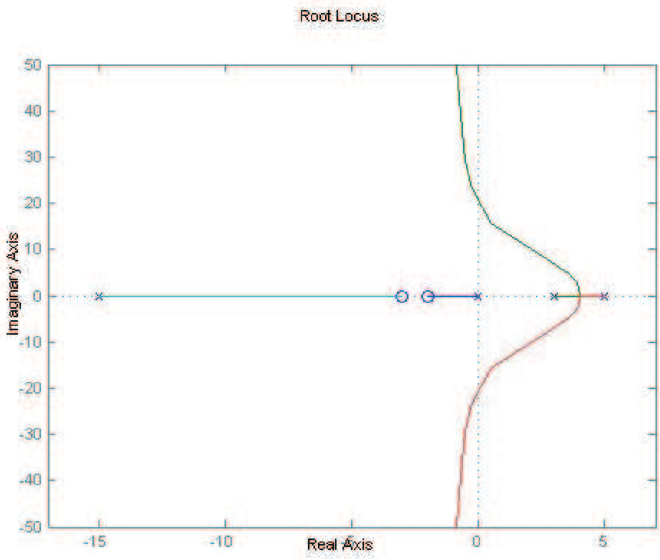

Figure 10: Luogo positivo F.

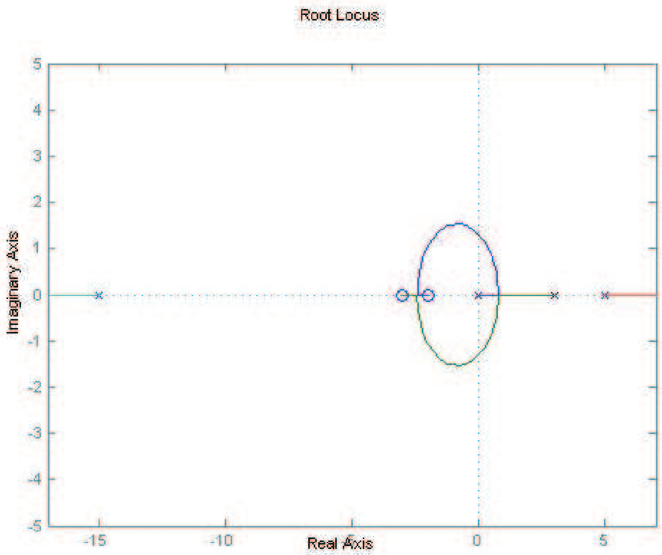

Figure 11: Luogo negativo F.

Si può dunque scegliere $K' = 510 > 507$ e giungere così alla forma definitiva del controllore stabilizzante

$$G(s) = 510\,\frac{s+2}{s+15}$$

Analisi del luogo: dato che $n = 3$ allora il luogo positivo ed il luogo negativo avranno 3 rami. Nel luogo positivo, per un valore di $K' \in (0, \bar{K}')$, ci sono due rami che appartengono al semipiano positivo, che sono quelli che partono dai poli in 3 e 5 ed arrivano sull'asse immaginario per $K' = \bar{K}'$, e 2 rami che appartengono al semipiano negativo $\forall K' > 0$, che sono quelli che partono dai poli in 0 e -15. Per $K' > \bar{K}'$ invece, ci sono 4 rami che appartengono al semipiano negativo, due dei quali sono quelli che partono dall'asse immaginario e vanno all'infinito per $K' \to \infty$ e altri 2 che appartengono al semipiano negativo $\forall K' > 0$, che sono quelli che vanno verso gli zeri in -3 e -2 per $K' \to \infty$. Nel luogo negativo, per $K' \in (-\infty, \bar{K}'')$, ci sono 3 rami che appartengono al semipiano negativo, due dei quali partono dagli zeri in -3 e -2 ed arrivano sull'asse immaginario per $K' = \bar{K}''$ ed uno che parte dall'infinito per $K' = -\infty$ ed appartiene al semipiano negativo $\forall K' < 0$, ed un ramo che appartiene al semipiano positivo $\forall K' < 0$. Per $K' \in (\bar{K}'', 0)$ invece, ci sono tre rami che appartengono al semipiano positivo, due dei quali sono quelli che partono dall'asse immaginario per $K' = \bar{K}''$ e finiscono nei poli in 0 e 3 per $K' = 0^-$ ed uno che appartiene al semipiano positivo $\forall K' < 0$ ed arriva nel polo in -15 per $K' = 0^-$, ed un ramo che appartiene al semipiano positivo $\forall K' < 0$, che è quello che va verso il polo in 5. Quindi si può concludere che scegliendo un $K' \in (0, \bar{K}')$ si avranno due poli instabili e due poli stabili, scegliendo un $K' > \bar{K}'$ si avranno 4 poli instabili, scegliendo un $K' < \bar{K}'')$ si avranno 3 poli stabili ed un polo instabile, scegliendo un $K' \in (\bar{K}'', 0)$ si avranno 3 poli instabili ed un polo instabile. Si ha quindi stabilità per $K' > \bar{K}'$. Si può notare che quanto detto è coerente con la tabella di Routh costruita ed in particolare risulta $\bar{K}' = 507$ e $\bar{K}'' = -42.6$.

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 3

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

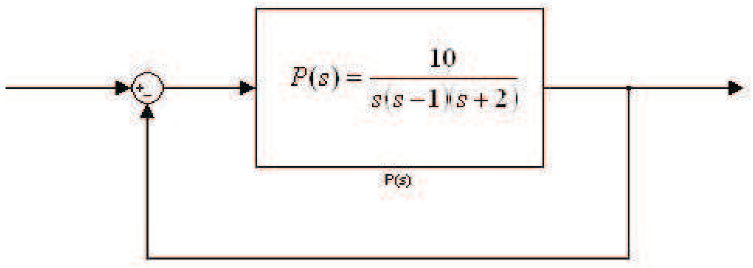

Figure 12: Schema

<u>Soluzione:</u>

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{10}{s\ (s-1)\ (s+2)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\ m = 0 \Rightarrow n - m = 3 \\ \text{Non ci sono zeri} &\Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = 1,\ p_3 = -2 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0+1-2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = \frac{K'}{10}$ sul ramo diretto, è rappresentato in Fig. 13 e Fig. 14.
Analisi del luogo: dato che $n = 3$ allora il luogo positivo ed il luogo negativo avranno 3 rami. Nel luogo positivo, per un valore di $K' > 0$, ci sono due rami che appartengono al semipiano positivo e un ramo che appartiene al semipiano negativo. Nel luogo negativo, per $K' < 0$, c'è un ramo che appartiene al semipiano positivo e 2 rami che appartengono al semipiano negativo. Quindi si può concludere che scegliendo un $K' > 0$ si avranno due poli instabili e un polo stabile, mentre scegliendo un $K' < 0$ si avranno 2 poli stabili ed un polo instabile. Quindi il sistema non può essere stabilizzato con un semplice guadagno. Quanto detto può essere verificato costruendosi la tabella di Routh.
Stabilizzazione: è necessario "raddrizzare" gli asintoti aggiungendo uno zero e mantenendo il centro degli asintoti negativo; bisogna evitare di creare rami nel semipiano destro del piano complesso (non vanno introdotti zeri positivi).
Si avrà

$$G(s) = \frac{K'}{10}\,(s+z)$$

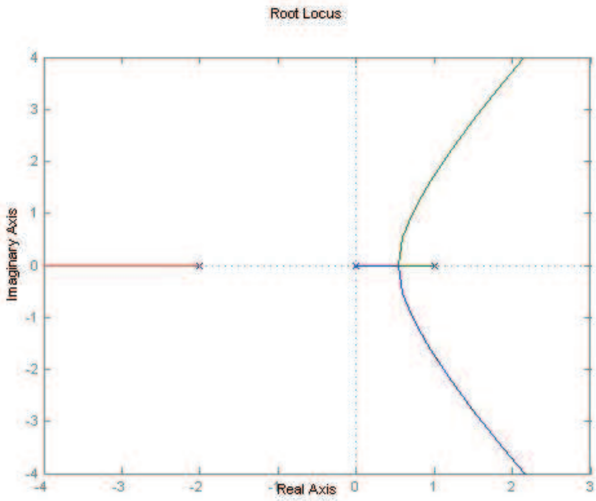

Figure 13: Luogo positivo P.

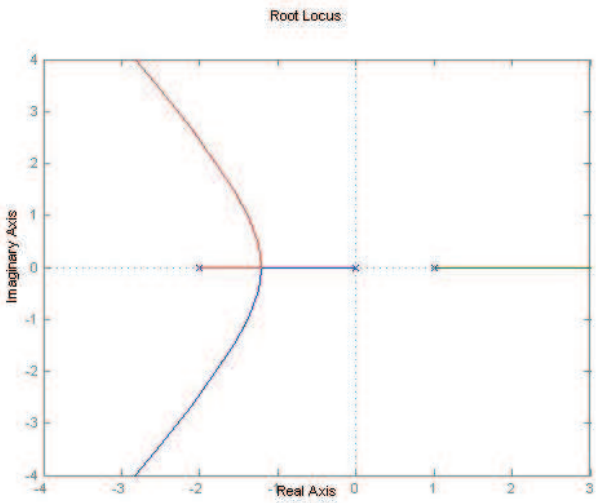

Figure 14: Luogo negativo P.

Si può imporre il nuovo centro degli asintoti in $-\frac{1}{4}$

$$s_0' = \frac{0+1-2+z}{2} = \frac{z-1}{2} = -\frac{1}{4} \Longrightarrow z = \frac{1}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\left(s+\frac{1}{2}\right)}{K'\left(s+\frac{1}{2}\right) + s\ (s-1)\ (s+2)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\left(s+\frac{1}{2}\right) + s\ (s-1)\ (s+2) = s^3 + s^2 + (K'-2)\,s + \frac{K'}{2}$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 2.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|ll} 3 & 1 & K'-2 \\ 2 & 1 & \frac{K'}{2} \\ 1 & \frac{K'}{2}-2 & 0 \\ 0 & \frac{K'}{2} & 0 \end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 4$$

Osservazione: il controllore ottenuto finora

$$G(s) = K' \, \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{10} = K' \frac{2s+1}{20} \qquad \text{con} \;\; K' > 4$$

è irrealizzabile, perchè improprio. Si sfrutta allora il teorema seguente

Teorema: *Sia dato un sistema a retroazione unitaria con funzione di trasferimento $F'(s) = G(s)P(s)$ sul ramo diretto. Se il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile e se si aggiunge a $G(s)$ un termine ("polo lontano") della forma*

$$\frac{1}{1+\tau s} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

allora esiste un $\bar{\tau} > 0$ sufficientemente piccolo tale che, se $0 < \tau < \bar{\tau}$, il sistema complessivo rimane asintoticamente stabile.

Per la determinazione di $\bar{\tau}$ (che dipende da K'), fisso $K' = 10 > 4$ ed applico il criterio di Routh. Si ha

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{1+\tau s} \frac{10}{s\,(s-1)\,(s+2)} = 10 \frac{s+\frac{1}{2}}{s\,(s-1)\,(s+2)\,(1+\tau s)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)} = \frac{10\left(s+\frac{1}{2}\right)}{10\left(s+\frac{1}{2}\right)+s\,(s-1)\,(s+2)\,(1+\tau s)}$$

I poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso sono le soluzioni dall'equazione

$$D_W(s) = 10\left(s+\frac{1}{2}\right) + s\,(s-1)\,(s+2)\,(1+\tau s) = \tau s^4 + (\tau+1)\,s^3 + (1-2\tau)\,s^2 + 8s + 5$$

al variare di $\tau \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$0 < \tau < \frac{1}{2}.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|lll}
4 & \tau & 1-2\tau & 5 \\
3 & \tau+1 & 8 & 0 \\
2 & \frac{-2\tau^2-9\tau+1}{\tau+1} & 5 & \\
1 & \frac{-21\tau^2-82\tau+3}{-2\tau^2-9\tau+1} & 0 & \\
0 & 5 & &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ -2\tau^2 - 9\tau + 1 > 0 \\ -21\tau^2 - 82\tau + 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 < \tau < 0.036 = \bar{\tau}$$

Si può scegliere $\tau = 0.02 = \frac{1}{50} \Longrightarrow \frac{1}{\tau} = 50$.

Suggerimento: la soluzione del sistema di disequazioni derivante dalla tabella di Routh può talvolta non essere immediata. Allora si può procedere "per tentativi", scegliendo τ sempre più piccolo, e verificare se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono tutti dello stesso segno. Una possibilità è scegliere, al passo k del procedimento, $\tau = 10^{-k}$. Il teorema enunciato in precedenza assicura che il procedimento ha sempre successo dopo un numero finito di passi.

Si è giunti così alla forma definitiva del controllore stabilizzante

$$G(s) = 50\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{(s+50)}$$

Il processo sul ramo diretto ha funzione di trasferimento pari a

$$F'(s) = G(s)P(s) = 50\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{(s+50)}\frac{10}{s\ (s-1)\ (s+2)} = 500\frac{s+\frac{1}{2}}{s\ (s-1)\ (s+2)\,(s+50)}$$

Il nuovo centro degli asintoti è

$$s_0' = \frac{0+1-2-50+\frac{1}{2}}{3} = -\frac{101}{6} \simeq -16.83$$

Il nuovo luogo delle radici, aggiungendo un ulteriore fattore $\frac{K'}{500}$ sul ramo diretto, si presenterebbe come in Fig. 15 e Fig. 16.
Analisi del luogo: dato che $n = 4$ allora il luogo positivo ed il luogo negativo avranno 4 rami. Nel luogo positivo si vede che c' un intervallo di K' in cui tutti e 4 i rami sono nel semipiano negativo (il ramo che si trova prima del polo in -50 non è graficato, altrimenti non si vedrebbe il comportamento del luogo vicino l'asse immaginario), mentre al di fuori di quell'intervallo si hanno sempre due rami nel semipiano negativo e due rami nel semipiano positivo. Nel luogo negativo invece ci sono sempre 3 rami nel semipiano negativo ed un ramo nel semipiano positivo. Quindi si può concludere che scegliendo un $0 < K_1 < K' < K_2$ si avranno 4 poli stabili, scegliendo invece un $K' > 0$ fuori dall'intervallo precedente si avranno 2 poli stabili e 2 poli instabili, scegliendo $K' < 0$ si avranno 3 poli stabili ed un polo instabile. Quanto detto può essere verificato costruendosi la tabella di Routh.

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 4

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

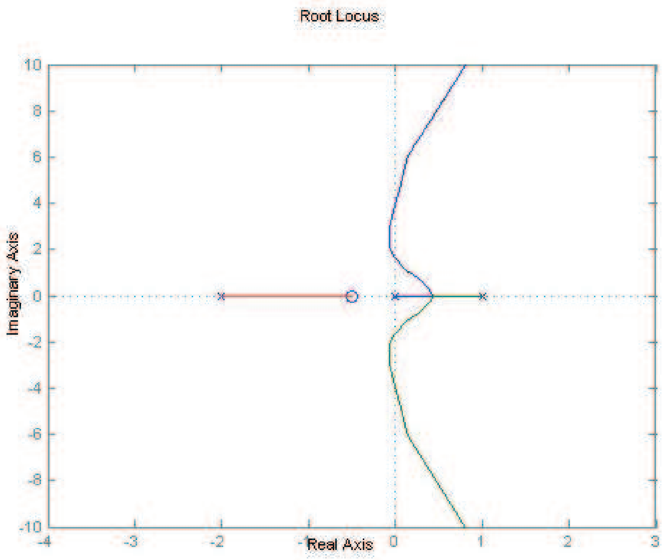

Figure 15: Luogo positivo F.

<u>Soluzione:</u>

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{1}{s\,(s-3)^2}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\, m = 0 \Rightarrow n - m = 3 \\ \text{Non ci sono zeri} &\Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\, p_2 = 3,\, p_3 = 3 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0+3+3}{3} = 2$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è rappresentato in Fig. 18 e Fig. 19.
Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.
Stabilizzazione: è necessario "raddrizzare" gli asintoti aggiungendo uno zero e va spostato il centro degli asintoti a sinistra dell'origine; bisogna inoltre evitare di creare rami nel semipiano destro del piano complesso (non vanno introdotti zeri positivi).
Introducendo uno zero negativo, non è possibile spostare a sinistra il centro degli asintoti. Va aggiunta quindi anche una coppia polo-zero

$$G(s) = K' \frac{(s+z_1)\,(s+z_2)}{(s+p)}.$$

Si può imporre il nuovo centro degli asintoti in -1

$$s_0' = \frac{0+3+3-p+z_1+z_2}{2} = -1 \Longrightarrow p - z_1 - z_2 = 8$$

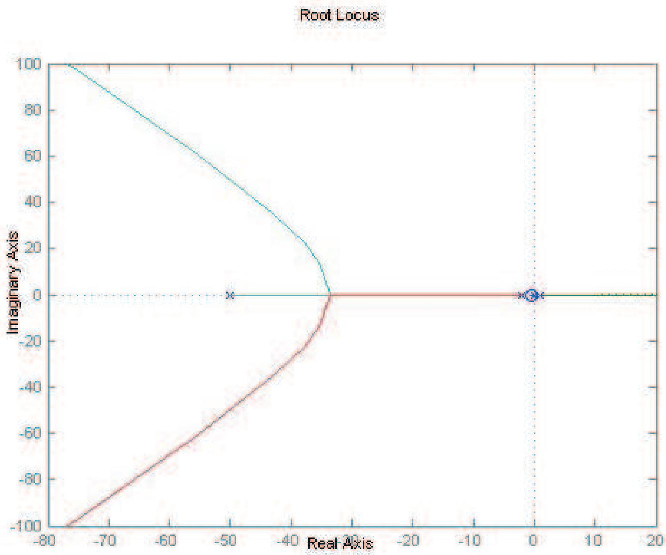

Figure 16: Luogo negativo F.

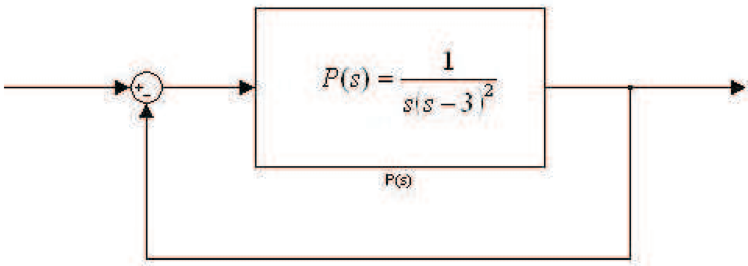

Figure 17: Schema

Ad esempio, si può scegliere $p = 10$, $z_1 = z_2 = 1$.
La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s+1)^2}{K'\,(s+1)^2 + s\;(s-3)^2\,(s+10)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$\begin{aligned} D_W(s) &= K'\,(s+1)^2 + s\;(s-3)^2\,(s+10) = \\ &= s^4 + 4s^3 + (K'-51)\,s^2 + (2K'+90)\,s + K' \end{aligned}$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 51.$$

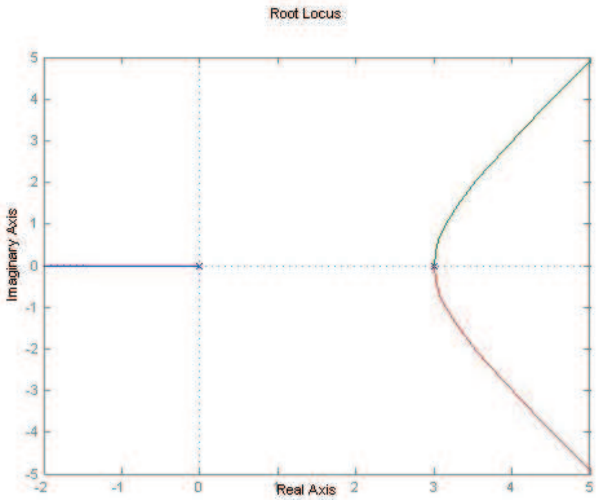

Figure 18: Luogo positivo P.

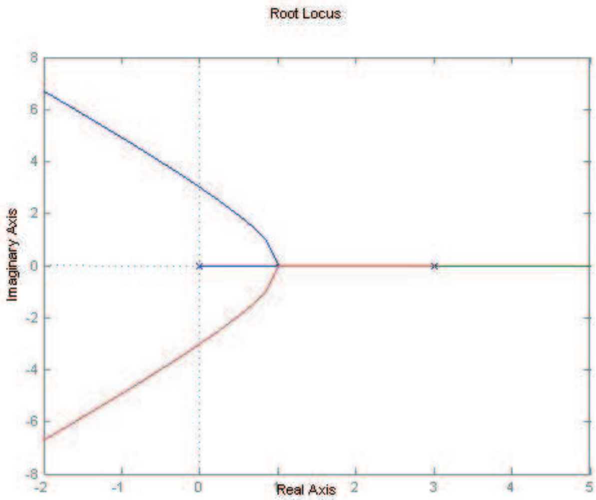

Figure 19: Luogo negativo P.

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$
\begin{array}{|c|lll}
4 & 1 & K'-51 & K' \\
3 & 2 & K'+45 & \\
2 & K'-147 & 2K' & \\
1 & \frac{(K')^2-106K'-6615}{K'-147} & 0 & \\
0 & 2K' & &
\end{array}
$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$
\begin{cases} K' > 147 \\ (K')^2 - 106K' - 6615 > 0 \end{cases} \Longrightarrow K' > 150.08
$$

Osservazione: il controllore otttenuto finora

$$
G(s) = K' \frac{(s+1)^2}{(s+10)} \qquad \text{con} \quad K' > 150.08
$$

è irrealizzabile, perchè improprio. Si sfrutta allora il teorema seguente
Teorema: *Sia dato un sistema a retroazione unitaria con funzione di trasferimento $F'(s) = G(s)P(s)$ sul ramo diretto. Se il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile e se si aggiunge a $G(s)$ un termine ("polo lontano") della forma*

$$\frac{1}{1+\tau s} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

allora esiste un $\bar{\tau} > 0$ sufficientemente piccolo tale che, se $0 < \tau < \bar{\tau}$, il sistema complessivo rimane asintoticamente stabile.
Per la determinazione di $\bar{\tau}$ (che dipende da K'), fisso $K' = 200 > 150.08$ ed applico il criterio di Routh.
Si ha

$$F'(s) = G(s)P(s) = 200\frac{(s+1)^2}{(s+10)(1+\tau s)}\frac{1}{s\ (s-3)^2} = 200\frac{(s+1)^2}{s\ (s-3)^2\,(s+10)(1+\tau s)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)} = \frac{200\,(s+1)^2}{200\,(s+1)^2 + s\ (s-3)^2\,(s+10)(1+\tau s)}$$

I poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso sono le soluzioni dall'equazione

$$\begin{aligned} D_W(s) &= 200\,(s+1)^2 + s\ (s-3)^2\,(s+10)(1+\tau s) = \\ &= \tau s^5 + (4\tau+1)\,s^4 + (4-51\tau)\,s^3 + (90\tau+149)\,s^2 + 490s + 200 \end{aligned}$$

al variare di $\tau \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$0 < \tau < \frac{4}{51}.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|lll} 5 & \tau & 4-51\tau & 490 \\ 4 & 4\tau+1 & 90\tau+149 & 200 \\ 3 & -294\tau^2-184\tau+4 & 1760\tau+490 & 0 \\ 2 & -26\,460\tau^3-67\,406\tau^2-30\,776\tau+106 & 200 & 0 \\ 1 & -46\,569\,600\tau^4-131\,599\,960\tau^3-87\,135\,900\tau^2-14\,856\,880\tau+51\,140 & 0 & \\ 0 & 200 & & \end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$\left\{\begin{array}{c} \tau > 0 \\ -294\tau^2-184\tau+4 > 0 \\ -26\,460\tau^3-67\,406\tau^2-30\,776\tau+106 > 0 \\ -46\,569\,600\tau^4-131\,599\,960\tau^3-87\,135\,900\tau^2-14\,856\,880\tau+51\,140 > 0 \end{array}\right.$$

Suggerimento: la soluzione del sistema di disequazioni derivante dalla tabella di Routh non è immediata. Allora si può procedere "per tentativi", scegliendo τ sempre più piccolo, e verificare se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono tutti dello stesso segno. Una possibilità è scegliere, al passo k del procedimento, $\tau = 10^{-k}$. Il teorema enunciato in precedenza assicura che il procedimento ha sempre successo dopo un numero finito di passi.

Si può verificare che si ha stabilità asintotica ad anello chiuso con $\tau = 2 * 10^{-3} = 0.002 = \frac{1}{500} \Longrightarrow \frac{1}{\tau} = 500$.
Si è giunti così alla forma definitiva del controllore stabilizzante

$$G(s) = 10^5 \frac{(s+1)^2}{(s+10)(s+500)}$$

Il processo sul ramo diretto ha funzione di trasferimento pari a

$$F'(s) = G(s)P(s) = 10^5 \frac{(s+1)^2}{s(s+10)(s+500)\ \ (s-3)^2}$$

Il nuovo centro degli asintoti è

$$s_0' = \frac{0 - 10 - 500 + 3 + 3 + 1 + 1}{3} = -\frac{502}{3} \simeq -167.33$$

Il nuovo luogo delle radici, aggiungendo un ulteriore fattore $\frac{K'}{10^5}$ sul ramo diretto, si presenterebbe come in Fig. 20 e Fig. 21.

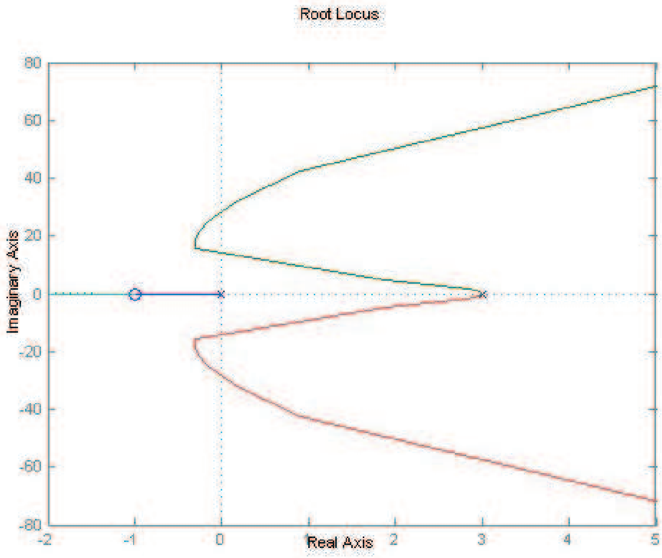

Figure 20: Luogo positivo F.

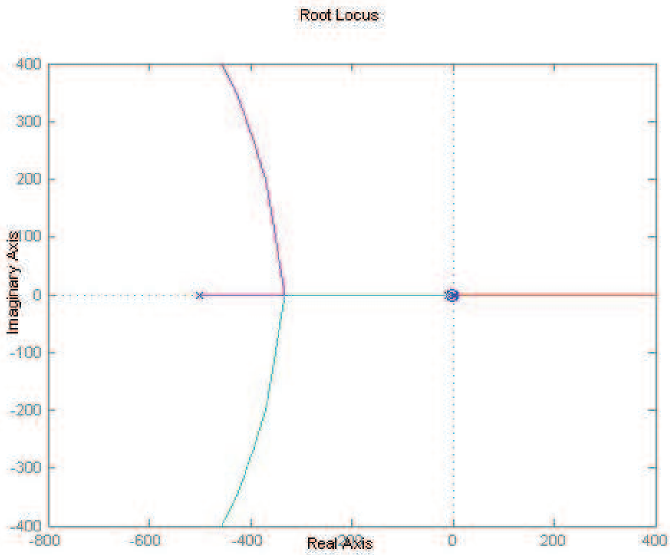

Figure 21: Luogo negativo F.

Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 5

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici.

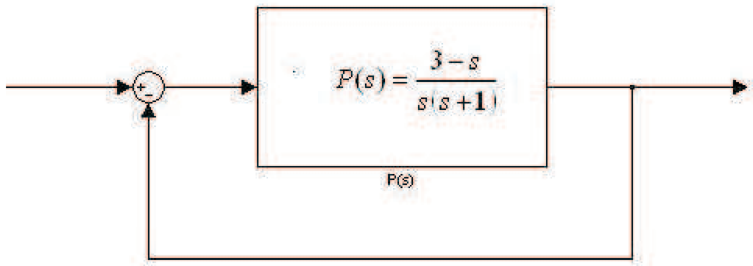

Figure 22: Schema

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema (semplicemente stabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{3-s}{s\ (s+1)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 2,\ m = 1 \Rightarrow n - m = 1 \\ z_1 &= 3 \Longrightarrow \text{il sistema non è a fase minima} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = -1 \end{aligned}$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = -K'$ sul ramo diretto, è rappresentato in Fig. 23 e Fig. 24.
Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.
La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s-3)}{K'\,(s-3) + s\ (s+1)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\,(s-3) + s\ (s+1) = s^2 + (K'+1)\,s - 3K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è (regola di Cartesio)

$$-1 < K' < 0.$$

Ad esempio, si può porre $K' = -0.5$.

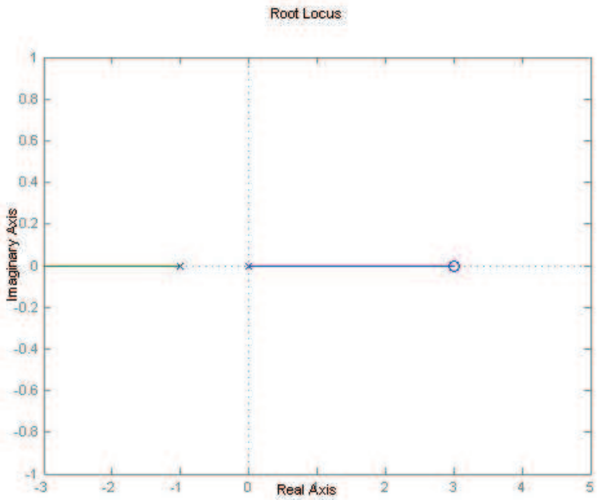

Figure 23: Luogo positivo P.

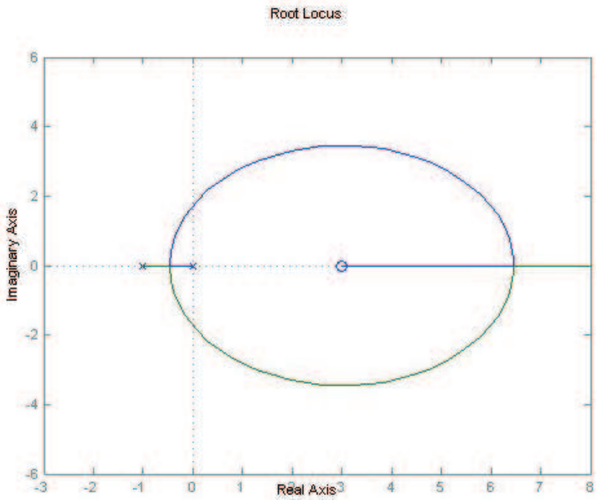

Figure 24: Luogo negativo P.

Punti singolari:

$$\begin{cases} s^2 + (K'+1)\, s - 3K' = 0 \\ 2s + K' + 1 = 0 \end{cases}$$

I punti singolari sono

$$\begin{aligned} s_1 &= 3 - 2\sqrt{3} = -0.46 \qquad \text{con } K_1' = 4\sqrt{3} - 7 = -0.072 \\ s_2 &= 3 + 2\sqrt{3} = 6.46 \qquad \text{con } K_2' = -4\sqrt{3} - 7 = -13.928 \end{aligned}$$

Annullando il termine di ordine 1 del polinomio $D_W(s)$ (basta porre $K' = -1$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario, risolvendo l'equazione

$$s^2 + 3 = 0$$

Gli attraversamenti si hanno per

$$s = \pm j\sqrt{3} \;\; \text{per } K' = -1$$

Si è risolto quindi il problema con un semplice controllore statico

$$G(s) = -K' = 0.5$$

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 6

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

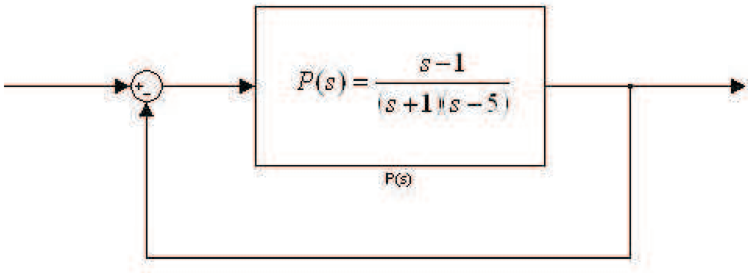

Figure 25: Schema

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{s-1}{(s+1)(s-5)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 2,\, m = 1 \Rightarrow n - m = 1 \\ z_1 &= 1 \Longrightarrow \text{il sistema non è a fase minima} \\ p_1 &= -1,\, p_2 = 5 \end{aligned}$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è rappresentato in Fig. 26 e Fig. 27.
Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.
La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'(s-1)}{K'(s-1) + (s+1)(s-5)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'(s-1) + (s+1)(s-5) = s^2 + (K'-4)s - K' - 5$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

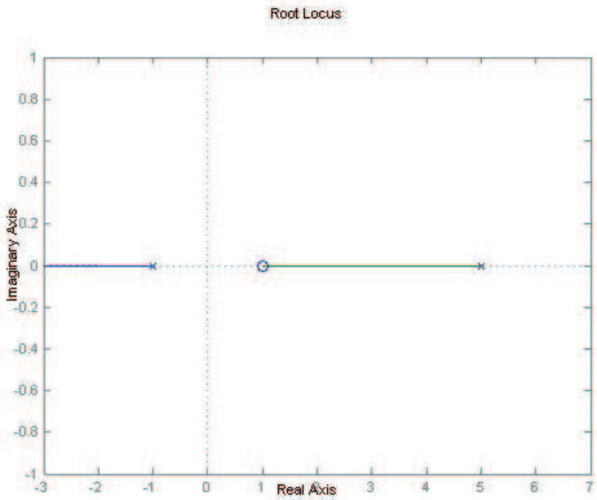

Figure 26: Luogo positivo P.

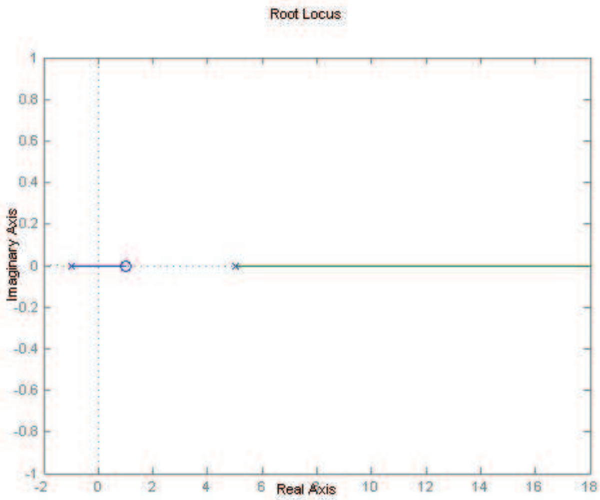

Figure 27: Luogo negativo P.

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è (regola di Cartesio)

$$K' - 4 > 0 \text{ e } K' + 5 < 0 \Longrightarrow \text{il sistema è instabile } \forall K'$$

Bisognerà ricorrere ad un controllore più complicato per stabilizzare il sistema, ma non è immediato capire come procedere, in quanto siamo in un caso di sistema a fase non minima.

Stabilizzazione: in casi come questo, in cui la funzione di trasferimento sul ramo diretto ha solo uno zero ed un polo con parte reale positiva, con il polo posto a destra dello zero, si può porre un altro polo positivo a destra di quello già esistente. In questo modo, "si creerà" un punto singolare tra questi due poli, ed il luogo può assumere una configurazione tale da stabilizzare il sistema a ciclo chiuso per K' interno ad un opportuno intervallo.
Ad esempio poniamo

$$G(s) = K' \frac{s+1}{s-6}$$

in cui si è aggiunto anche uno zero negativo che cancella il polo stabile del sistema originale.

La funzione di trasferimento sul ramo diretto diventa

$$F'(s) = G(s)P(s) = K'\frac{s+1}{s-6}\frac{s-1}{(s+1)(s-5)} = K'\frac{s-1}{(s-5)(s-6)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)} = \frac{K'(s-1)}{K'(s-1)+(s-5)(s-6)}$$

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'(s-1)+(s-5)(s-6) = s^2+(K'-11)s+30-K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$. Esso si presenta come in Fig. 28 e Fig. 29.

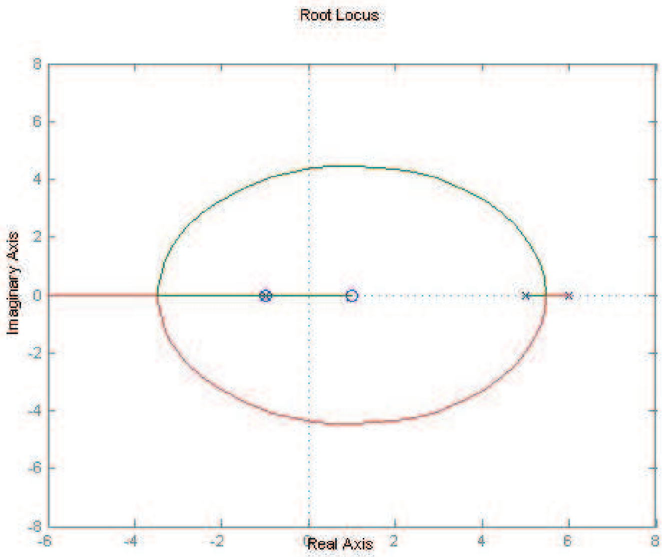

Figure 28: Luogo positivo F.

Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso (regola di Cartesio) è

$$11 < K' < 30.$$

Ad esempio si può porre $K' = 20$.
Punti singolari:

$$\begin{cases} s^2+(K'-11)s+30-K' = 0 \\ 2s+K'-11 = 0 \end{cases}$$

I punti singolari sono

$$\begin{aligned} s_1 &= 1-2\sqrt{5} = -3.4721 \qquad \text{con } K_1' = 4\sqrt{5}+9 = 17.944 \\ s_2 &= 1+2\sqrt{5} = 5.4721 \qquad \text{con } K_2' = -4\sqrt{5}+9 = 0.0557 \end{aligned}$$

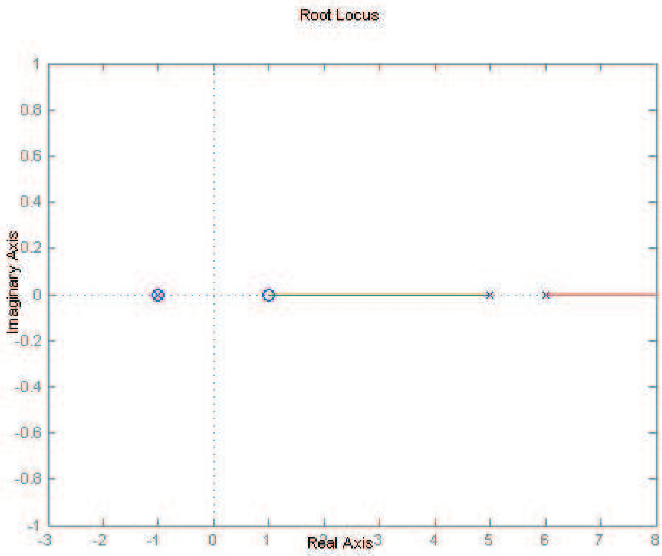

Figure 29: Luogo negativo F.

Annullando il termine di ordine 1 del polinomio $D_W(s)$ (basta porre $K' = 11$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario, risolvendo l'equazione

$$s^2 + 19 = 0$$

Gli attraversamenti si hanno per

$$s = \pm j\sqrt{19} = \pm j\ 4.36 \quad \text{per } K' = 11$$

Si è risolto l'esercizio mediante un controllore stabilizzante così fatto

$$G(s) = 20\frac{s+1}{s-6}$$

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 7

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K'\frac{s^2+2}{(s-1)\,(s+1)\,(s+2)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\, m = 2 \Rightarrow n - m = 1 \\ z_1 &= -\sqrt{2}j,\, z_2 = \sqrt{2}j \Longrightarrow \text{il sistema ha gli zeri sull'asse immaginario} \\ p_1 &= 1,\, p_2 = -1,\, p_3 = -2 \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

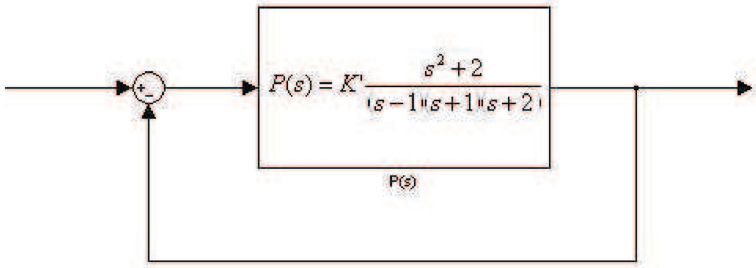

Figure 30: Schema

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\left(s^2+2\right)}{K'\left(s^2+2\right) + (s-1)(s+1)(s+2)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\left(s^2+2\right) + (s-1)(s+1)(s+2) = s^3 + (K'+2)\,s^2 - s + 2K' - 2$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.
Osservazione: c'è almeno una variazione di segno e quindi almeno una radice positiva. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni K' . Bisognerà ricorrere ad un controllore più complicato per stabilizzare il sistema, ma non è immediato capire come procedere, in quanto siamo in un caso di sistema a fase non minima.
Punti singolari:

$$\begin{cases} s^3 + (K'+2)\,s^2 - s + 2K' - 2 = 0 \\ 3s^2 + 2\,(K'+2)\,s - 1 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha 4 soluzioni, ma 2 non sono valide perchè corrispondenti a valori non reali di K'

$$\begin{aligned} s &= 0.65 + j2.92 \quad \text{con} \quad K' = -2.95 - j4.54 \\ s &= 0.65 - j2.92 \quad \text{con} \quad K' = -2.95 + j4.54 \\ s &= 0.15 \qquad\qquad \text{con} \quad K' = 1.04 \\ s &= -1.46 \qquad\quad\; \text{con} \quad K' = -0.15 \end{aligned}$$

I 2 punti singolari sono quindi

$$\begin{aligned} s_1 &= 0.15 \qquad\quad \text{con} \quad K'_1 = 1.04 \\ s_2 &= -1.46 \qquad \text{con} \quad K'_2 = -0.15 \end{aligned}$$

Il luogo delle radici si presenta come in Fig. 31 e Fig. 32 (si noti la presenza dei 2 punti singolari appena calcolati).
Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.
Stabilizzazione: a partire dal grafico si può fare una considerazione intuitiva: se si riuscisse a spostare in qualche modo verso sinistra il punto singolare posto in $s = 0.15$, si potrebbe avere una

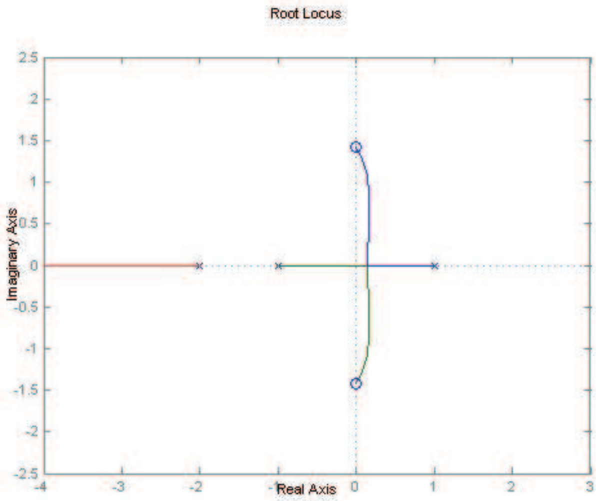

Figure 31: Luogo positivo P.

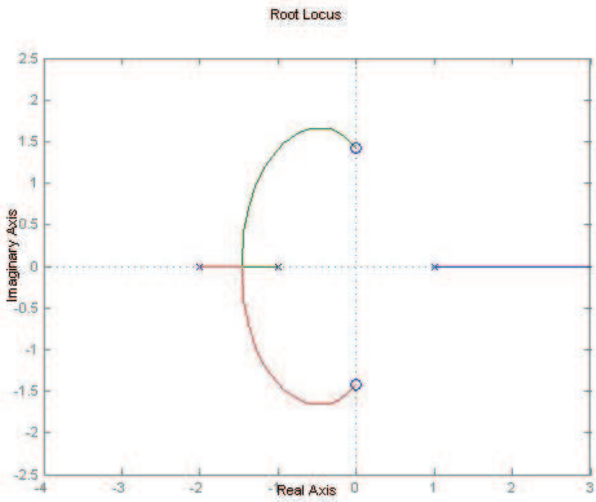

Figure 32: Luogo negativo P.

parte di luogo positivo interamente a sinistra dell'asse immaginario, e quindi un intervallo di valori di K' che stabilizzi il sistema.
Si potrebbe introdurre uno zero negativo tra i 2 poli posti in -1 ed in 1 (ad esempio in -0.5) ed un polo negativo a sinistra di -2 (ad esempio in -3). In questo modo, per motivi di consistenza, sparisce il punto singolare tra -1 ed 1, continua ad esserci un punto singolare tra -2 e -1 ed infine se ne crea uno a sinistra di -2. Verifichiamo formalmente queste considerazioni intuitive.
Si pone

$$G(s) = \frac{s+0.5}{s+3}$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto diventa

$$F'(s) = G(s)P(s) = K'\frac{s+0.5}{s+3}\frac{s^2+2}{(s-1)(s+1)(s+2)} = K'\frac{(s+0.5)\left(s^2+2\right)}{(s+3)(s-1)(s+1)(s+2)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s)=\frac{N_W(s)}{D_W(s)}=\frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)}=\frac{K'\,(s+0.5)\left(s^2+2\right)}{K'\,(s+0.5)\,(s^2+2)+(s+3)\,(s-1)\,(s+1)\,(s+2)}$$

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$\begin{aligned} D_W(s) &= K'\,(s+0.5)\left(s^2+2\right)+(s+3)\,(s-1)\,(s+1)\,(s+2)= \\ &= s^4+(K'+5)\,s^3+\left(\frac{K'}{2}+5\right)s^2+(2K'-5)\,s+K'-6 \end{aligned}$$

al variare di $K'\in\mathbb{R}$. Esso si presenta come in Fig. 33 e Fig. 34.

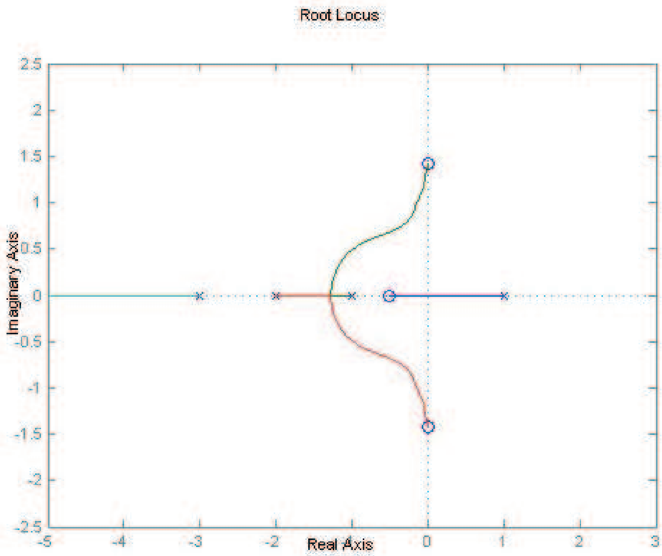

Figure 33: Luogo positivo F.

Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K'>6.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|lll} 4 & 1 & \frac{K'}{2}+5 & K'-6 \\ 3 & K'+5 & 2K'-5 & 0 \\ 2 & \frac{(K')^2+11K'+60}{2(K'+5)} & K'-6 & 0 \\ 1 & \frac{K'(9K'+145)}{(K')^2+11K'+60} & 0 & \\ 0 & K'-6 & 0 & \end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K'>6.$$

Ad esempio si può scegliere $K'=10$.

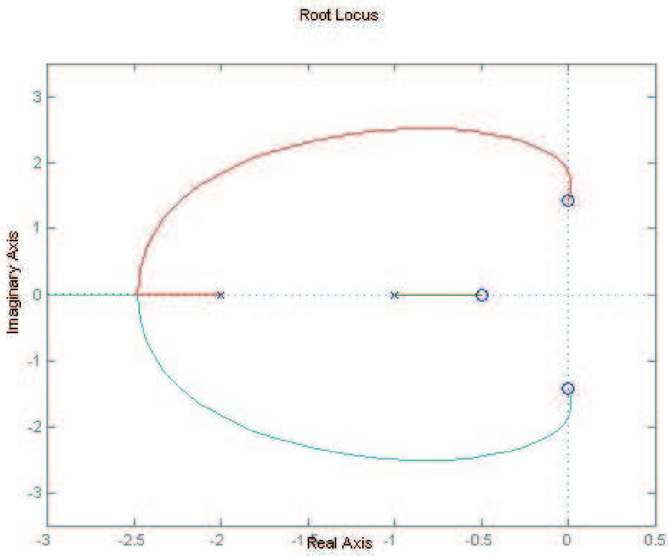

Figure 34: Luogo negativo F.

Si è risolto l'esercizio mediante un controllore stabilizzante così fatto

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s + 3} \quad \text{e scegliendo } K' > 6.$$

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 8

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

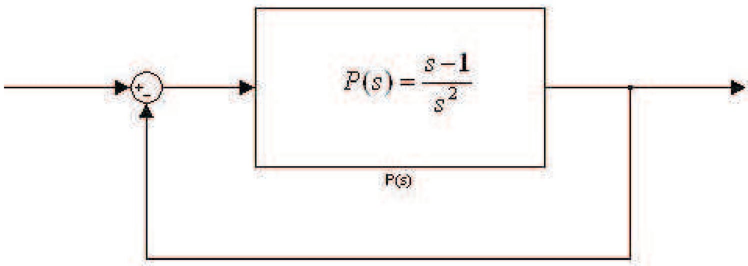

Figure 35: Schema

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{s - 1}{s^2}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 2,\, m = 1 \Rightarrow n - m = 1 \\ z_1 &= 1 \Longrightarrow \text{il sistema non è a fase minima} \\ p_1 &= 0,\, p_2 = 0 \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria), aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s-1)}{K'\,(s-1) + s^2}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\,(s-1) + s^2 = s^2 + K's - K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$. L'andamento del luogo è riportato in Fig. 36 e Fig. 37.

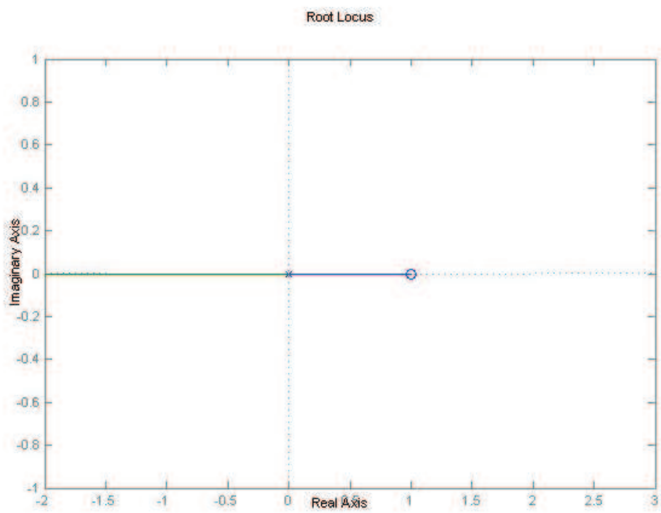

Figure 36: Luogo positivo P.

Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.
Stabilizzazione: per $K' \neq 0$ ci sono sempre 2 variazioni di segno e quindi 2 radici positive. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni $K' \neq 0$. Il caso $K' = 0$ non ha senso (si tornerebbe al sistema di partenza). Bisognerà ricorrere ad un controllore più complicato per stabilizzare il sistema, ma non è immediato capire come procedere.
Un problema di questo genere si può risolvere ricorrendo ad un procedimento che non si basa sul luogo delle radici, ma su considerazioni di tipo analitico.
Teorema: *Dato un processo di ordine n, esiste sempre un controllore proprio di ordine n-1 che stabilizza asintoticamente il sistema.*

Il suddetto teorema è uno strumento molto potente che serve a risolvere un problema più forte di quello della stabilizzazione: consente infatti di imporre la coincidenza dei poli del sistema a ciclo chiuso con valori prefissati (assegnazione dei poli).

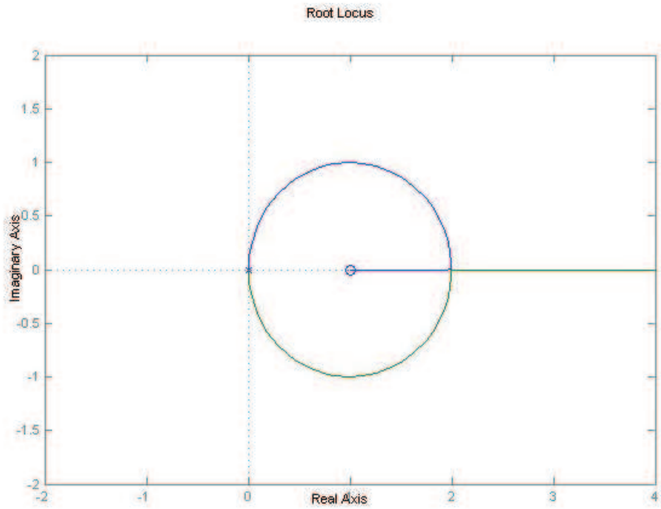

Figure 37: Luogo negativo P.

Nel caso in esame, poichè $n = 2$, basterà ricorrere ad un controllore proprio di ordine 1

$$G(s) = \frac{as+b}{s+c}$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto è

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{as+b}{s+c}\frac{s-1}{s^2} = \frac{(s-1)(as+b)}{s^2(s+c)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)} = \frac{(s-1)(as+b)}{(s-1)(as+b)+s^2(s+c)}.$$

I poli del sistema ad anello chiuso sono soluzioni di $D_W(s) = 0$. Posso imporre la coincidenza di essi con valori prefissati. Ad esempio si possono porre 3 poli coincidenti in -1

$$(s-1)(as+b) + s^2(s+c) = (s+1)^3$$

e quindi

$$s^3 + (a+c)s^2 + (b-a)s - b = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Si tratta, in definitiva, di risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (a+c) = 3 \\ (b-a) = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \\ c = 7 \end{cases}$$

Si è quindi risolto l'esercizio mediante un controllore stabilizzante così fatto

$$G(s) = \frac{-4s-1}{s+7}$$

La nuova funzione di trasferimento sul ramo diretto è

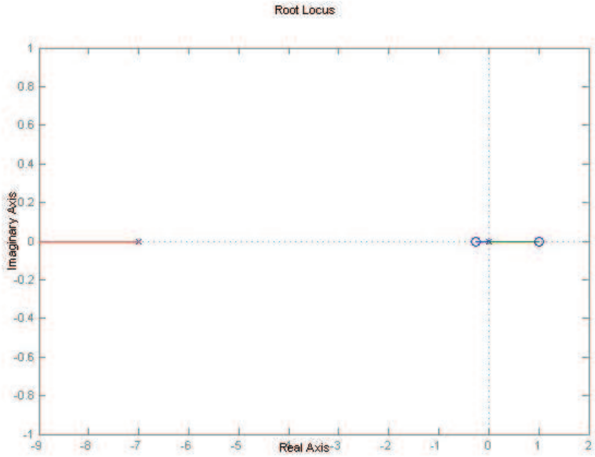

Figure 38: Luogo positivo F.

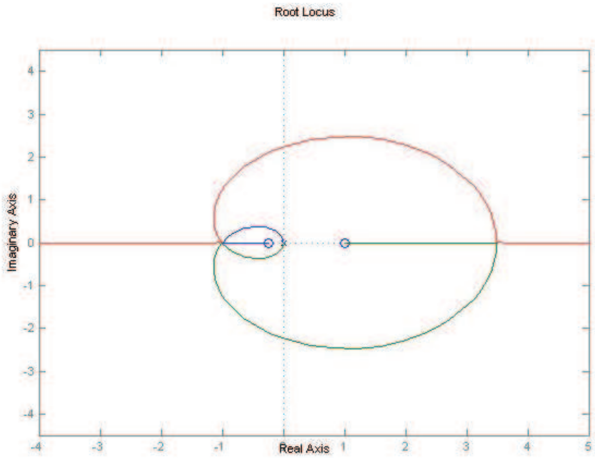

Figure 39: Luogo negativo F.

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{-4s-1}{s+7}\frac{s-1}{s^2} = -4\frac{(s-1)\left(s+\frac{1}{4}\right)}{s^2\,(s+7)}$$

Il luogo delle radici (aggiungendo un fattore -$\frac{K'}{4}$ sul ramo diretto) si presenta come in Fig. 38 e Fig. 39.

Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.

Punti singolari: non c'è bisogno di calcolarli esplicitamente. Si nota infatti il punto triplo in $s=-1$ per $K'=-4$ (soluzione del problema in esame), un punto doppio in $s=0$ per $K'=0$ (poli del sistema originario) ed un altro punto singolare nel ramo di luogo negativo a destra dello zero positivo.

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 9

Si consideri il seguente processo:

$$P(s) = \frac{1}{(s-4)(s+1)}$$

Utilizzare il luogo delle radici per sintetizzare un controllore tale che i poli del sistema controreazionato abbiano parte reale minore di -3 rad/s. Calcolare utilizzando il criterio di Routh l'insieme dei valori di K' per cui tale specifica è soddisfatta, e discutere il luogo delle radici ottenuto.

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{1}{(s-4)(s+1)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 2,\, m = 0 \Rightarrow n - m = 2 \\ Non\ ci\ sono\ zeri &\Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= -1,\, p_2 = 4 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_P(s)}{N_P(s) + D_P(s)} = \frac{K'}{K' + (s+1)(s-4)}$$

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = s^2 - 3s - 4 + K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Osservazione: c'è almeno una variazione di segno e quindi almeno una radice positiva. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni K'.

Il luogo delle radici si presenta come in Fig. 40 e Fig. 41.
Analisi del luogo: come negli esercizi precedenti.
Osservando il luogo positivo si deduce che per avere i poli del sistema controreazionato con parte reale minore di -3 rad/s bisogna spostare il centro degli asintoti a sinistra di -3, in questo modo esisterà sicuramente un valore di K' per cui la specifica sarà rispettata. Si può aggiungere quindi una coppia polo-zero:

$$G(s) = \frac{s+z}{s+p}$$

Si può scegliere $z = 1$ in modo da cancellare il polo stabile in $P(s)$; inoltre si può imporre il nuovo centro degli asintoti in $-\frac{7}{2}$ ottenendo così

$$G(s) = K' \frac{s+1}{s+11}.$$

Otteniamo quindi

$$F(s) = K' \frac{1}{(s-4)(s+11)}$$

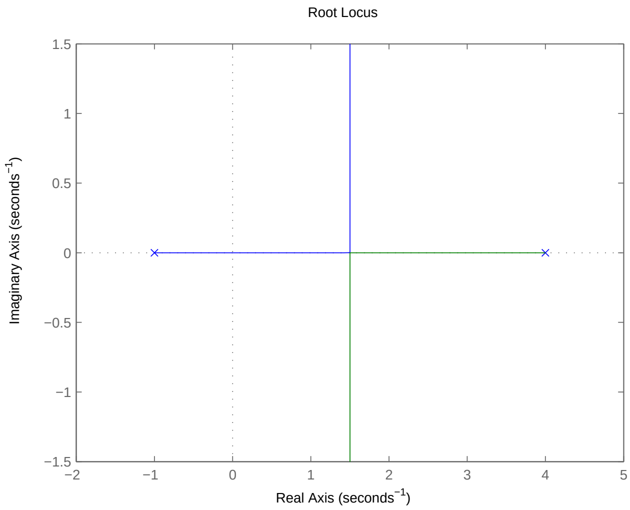

Figure 40: Luogo positivo P.

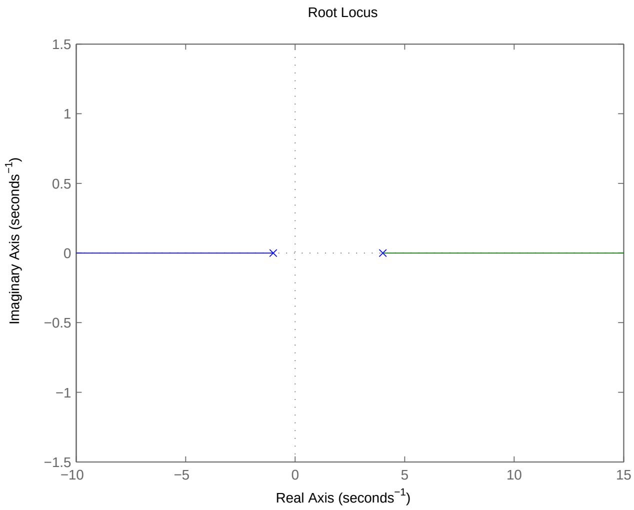

Figure 41: Luogo negativo P.

A questo punto bisogna trovare K' per cui è rispettata la specifica dell'esercizio. Per fare questo si può pensare di traslare l'asse immaginario in -3 e di applicare il criterio di Routh nel nuovo sistema di riferimento ottenuto. A tal proposito si effettua un cambiamento di variabile ponendo $s' = s + 3$, ottenendo così il processo controllato nella nuova variabile:

$$F(s') = K' \frac{1}{(s' - 3 - 4)(s' - 3 + 11)} = K' \frac{1}{(s' - 7)(s' + 8)}.$$

Il luogo delle radici, nella variabile s', è ora descritto dall'equazione

$$s'^2 + s' + K' - 56$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Applicando il criterio di Routh si ottiene:

$$\begin{array}{l|ll} 2 & 1 & K'-56 \\ 1 & 1 & \\ 0 & K'-56 & \end{array}$$

Quindi i poli del sistema controreazionato avranno parte reale minore di -3 rad/s se e solo se

$$K' > 56.$$

In particolare scegliamo $K' = 60$ ottenendo:

$$F(s) = \frac{60}{(s+11)(s-4)}$$

Il nuovo luogo delle radici è rappresentato in Fig. 42 e Fig. 43.

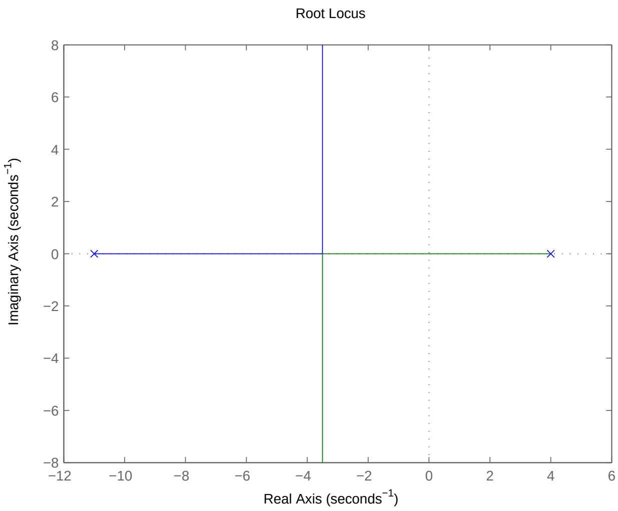

Figure 42: Luogo positivo F.

Osservazione: La cancellazione del polo in $(s+1)$ corrisponde alla cancellazione del polo in $(s'-2)$ nella variabile s' e quindi ad una cancellazione di una dinamica instabile nella variabile s'. Questo potrebbe far sì che ci sia una dinamica a parte reale maggiore di -3. Tuttavia non va in contrasto con le specifiche perchè il polo in questione, una volta cancellato, corrisponde ad un autovalore non controllabile o non osservabile, che quindi non è più un polo della funzione di trasferimento. Inoltre è un autovalore stabile nel sistema originale e quindi non crea problemi di stabilità.

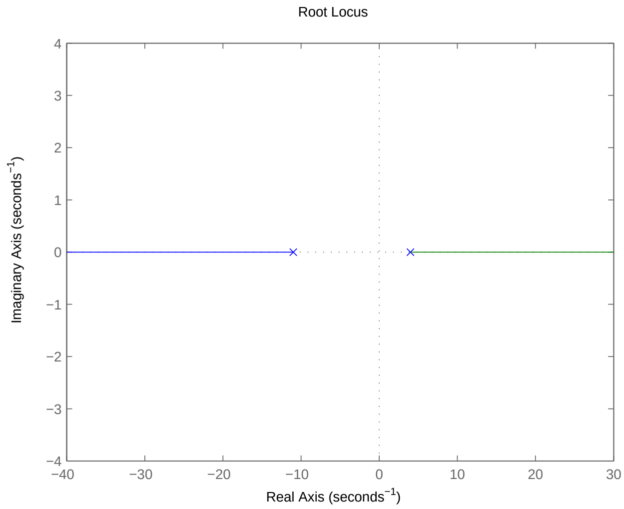

Figure 43: Luogo negativo F.

Esercizi aggiuntivi

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 10

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

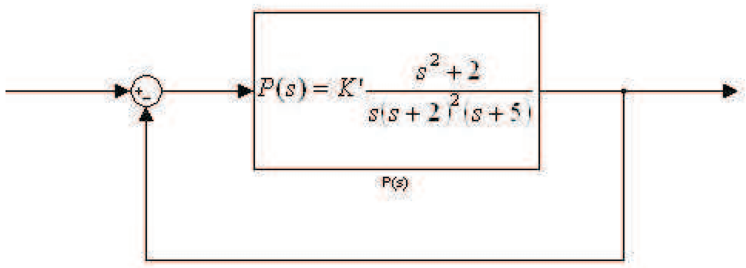

Figure 44: Schema

<u>Soluzione:</u>

La funzione di trasferimento del sistema (semplicemente stabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K' \frac{s^2+2}{s\ (s+2)^2\,(s+5)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 4,\ m = 2 \Rightarrow n - m = 2 \\ z_1 &= -j\sqrt{2},\ z_2 = j\sqrt{2} \Longrightarrow \text{il sistema ha gli zeri sull'asse immaginario} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = -2,\ p_3 = -2,\ p_4 = -5 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0-2-2-5-j\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2} = -\frac{9}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{P'}(s)}{N_P(s)+D_P(s)} = \frac{K'\left(s^2+2\right)}{K'\left(s^2+2\right)+s\ \left(s+2\right)^2\left(s+5\right)}.$$

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\left(s^2+2\right)+s\ \left(s+2\right)^2\left(s+5\right) = s^4+9s^3+\left(K'+24\right)s^2+20s+2K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.
Il grafico si presenta come in Fig. 45 e Fig. 46

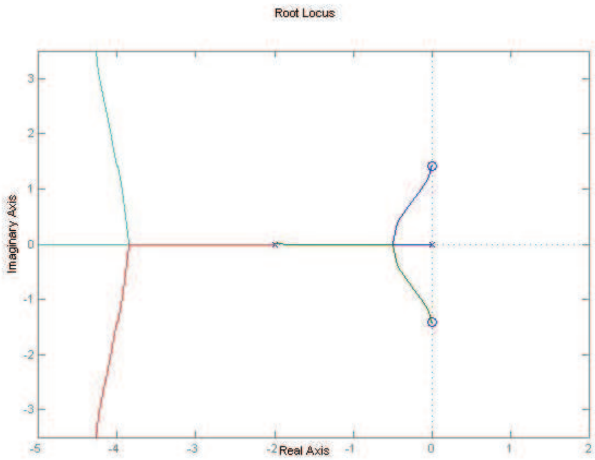

Figure 45: Luogo positivo P.

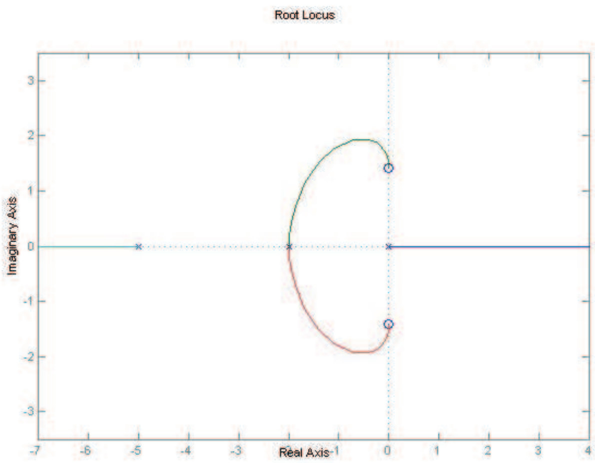

Figure 46: Luogo negativo P.

Stabilizzazione: condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 0.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|lll}
4 & 1 & K'+24 & 2K' \\
3 & 9 & 20 & 0 \\
2 & 9K'+196 & 18K' & \\
1 & 18K'+3920 & 0 & \\
0 & 18K' & &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 0$$

Si può scegliere un qualsiasi K' positivo ed il problema è risolto.
Punti singolari: non c'è bisogno di calcolarli esplicitamente. C'è sicuramente il punto doppio in $s = -2$ per $K' = 0$ (poli del sistema originario), un punto singolare tra -5 e -2 ed uno tra -2 e 0.
Diagrammi di Nyquist: essendo in un caso di retroazione unitaria, si può anche ricorrere al diagramma di Nyquist (Fig. 47) per ritrovare le considerazioni effettuate in precedenza. La funzione di trasferimento $P(s)$ va riscritta opportunamente, trascurando il fattore moltiplicativo K'

$$\bar{P}(s) = \frac{s^2+2}{s\ (s+2)^2\,(s+5)} = \frac{1}{10}\frac{\left(1+\frac{s^2}{2}\right)}{s\ \left(1+\frac{s}{2}\right)^2\left(1+\frac{s}{5}\right)}$$

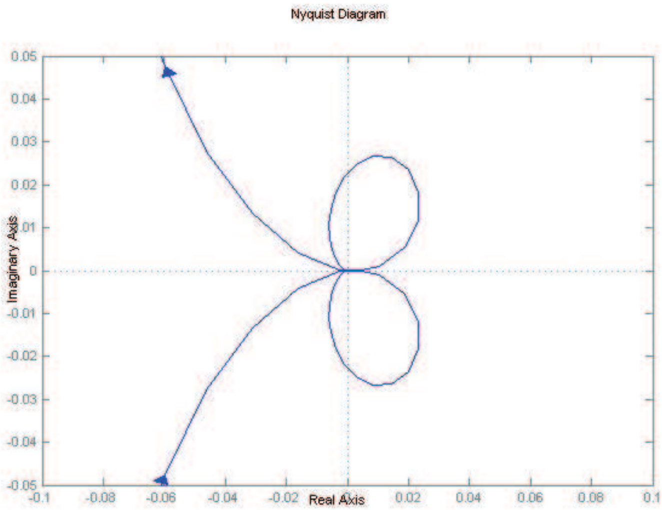

Figure 47: Diagramma di Nyquist di P per $K' > 0$.

Si vede che per qualsiasi valore di guadagno positivo, il diagramma di Nyquist non circonda mai il punto -1. Quindi avrò, essendo $P_{AP} = 0$ il numero di poli a parte reale positiva del sistema a catena aperta, ed N il numero di giri che il diagramma di Nyquist compie in senso antiorario intorno al punto critico $-1 + j0$:

$$P_{CH} = P_{AP} - N = 0$$

dove si è indicato con P_{CH} il numero di poli a parte reale positiva del sistema retroazionato (criterio di Nyquist). Il sistema è quindi asintoticamente stabile $\forall K' > 0$.

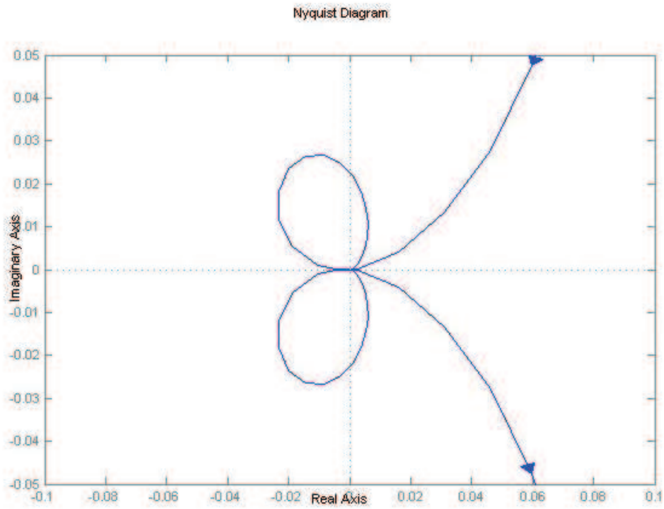

Figure 48: Diagramma di Nyquist di P per $K' < 0$.

Per valori negativi del guadagno, invece, il diagramma si presenta come in Fig. 48
Si potranno avere 2 situazioni. Per $K' < 0$ sufficientemente grande in modulo, il diagramma compirà 3 giri in senso orario intorno al punto critico ($N = -3$), per valori più vicini a zero (ma sempre negativi), si avrà 1 giro in senso orario ($N = -1$). Si avrà, rispettivamente (essendo $P_{AP} = 0$)

$$\begin{aligned} P_{CH} &= -N = 3 & \qquad & K' < 0 \text{ “grande” in modulo} \\ P_{CH} &= -N = 1 & \qquad & K' < 0 \text{ “piccolo” in modulo} \end{aligned}$$

Quindi il sistema a retroazione, per il criterio di Nyquist, sarà instabile per ogni valore di $K' < 0$. Si ritrovano così le considerazioni viste mediante lo studio del luogo delle radici.

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 11

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici

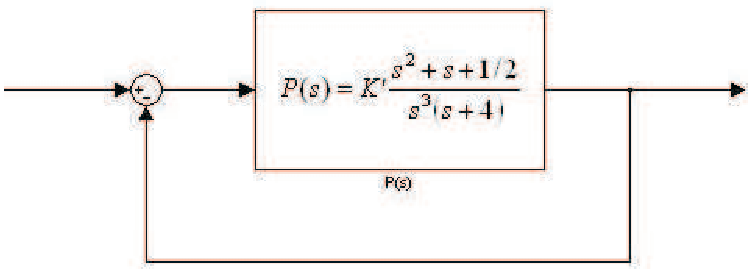

Figure 49: Schema

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K' \frac{s^2 + s + \frac{1}{2}}{s^3 \ (s+4)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 4, \, m = 2 \Rightarrow n - m = 2 \\ z_1 &= \frac{-1-j}{2}, \, z_2 = \frac{-1+j}{2} \Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0, \, p_2 = 0, \, p_3 = 0, \, p_4 = -4 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0+0+0-4-\frac{-1-j}{2}-\frac{-1+j}{2}}{2} = -\frac{3}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{P'}(s)}{N_P(s) + D_P(s)} = \frac{K' \left(s^2 + s + \frac{1}{2}\right)}{K' \left(s^2 + s + \frac{1}{2}\right) + s^3 \ (s+4)}.$$

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K' \left(s^2 + s + \frac{1}{2}\right) + s^3 \ (s+4) = s^4 + 4s^3 + K's^2 + K's + \frac{K'}{2}$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.
Il luogo delle radici si presenta come in Fig. 50 e Fig. 51

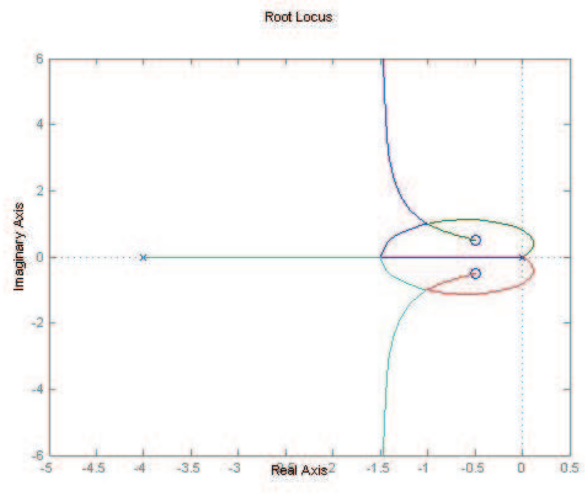

Figure 50: Luogo positivo P.

Stabilizzazione: condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 0.$$

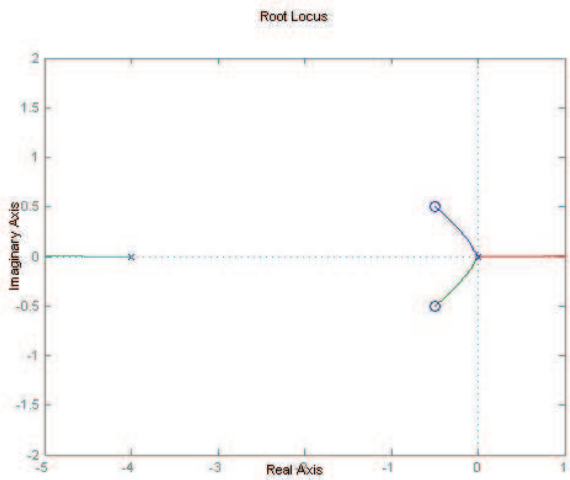

Figure 51: Luogo negativo P.

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|lll} 4 & 1 & K' & \frac{K'}{2} \\ 3 & 4 & K' & \\ 2 & 3K' & 2K' & \\ 1 & 3\left(K'\right)^2 - 8K' & 0 & \\ 0 & 2K' & & \end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > \frac{8}{3}$$

Si può scegliere $K' = 5 > \frac{8}{3}$ ed il problema è risolto.
Punti singolari:

$$\begin{cases} s^4 + 4s^3 + K's^2 + K's + \frac{K'}{2} = 0 \\ 4s^3 + 12s^2 + 2K's + K' = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha 5 soluzioni, tutte valide ($K' \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{3}{2} && \text{con } K'_1 = \frac{27}{4} \\ s_{2/3} &= 0 && \text{con } K'_{2/3} = 0 \text{ (soluzione doppia)} \\ s_4 &= -1 - j && \text{con } K'_4 = 8 \\ s_5 &= -1 + j && \text{con } K'_5 = 8 \end{aligned}$$

Si noti la presenza di due punti singolari complessi e coniugati.