

Controlli Automatici II a.a. 2005/2006

Esercitazione n° 3

Prof. Maria D. Di Benedetto e Dott. Giordano Pola
Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Centro di Eccellenza DEWS,
Università di L'Aquila, Poggio di Roio, 67040 L'Aquila, Italy,
{pola,dibenede}@ing.univaq.it

February 1, 2006

Data: 1 febbraio 2006

1 Stabilizzabilità dei sistemi lineari

Il problema della stabilizzabilità (risp. stabilizzabilità asintotica) dei sistemi lineari consiste nella progettazione di un controllore lineare e statico con retroazione dallo stato che renda il sistema controllato, stabile (risp. asintoticamente stabile).

Più formalmente dato un sistema lineare tempo continuo:

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

vogliamo studiare delle condizioni affinché, mediante una retroazione lineare e statica dallo stato della forma $u = Kx$, il processo controllato:

$$dx/dt = (A + BK)x \quad (2)$$

sia stabile (risp. asintoticamente stabile).

Se il sistema (1) è controllabile allora è evidentemente sia stabilizzabile che stabilizzabile asintoticamente. Supponiamo dunque che il sistema (1) non sia controllabile e che il rango della matrice di raggiungibilità associata al sistema (1) sia $r < n$.

Applicando una opportuna trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ nello spazio di stato \mathbb{R}^n , è possibile riscrivere il sistema (1) in forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad (3)$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e la coppia (A_{11}, B_1) è raggiungibile o, in modo equivalente il sistema lineare:

$$dx_1/dt = A_{11}x_1 + B_1u, \quad (4)$$

è raggiungibile. Dunque il sistema (4) verifica le ipotesi del Teorema dell'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato e pertanto il seguente risultato è immediato:

Teorema *Il sistema (1) è stabilizzabile (risp. asintoticamente stabilizzabile) se e solo se la matrice A_{22} è stabile (risp. asintoticamente stabile), ovvero se e solo se tutti gli autovalori non raggiungibili del sistema (1) sono stabili (risp. asintoticamente stabili).*

Per verificare le ipotesi del teorema precedente si può utilizzare il PBH test. Supponiamo dunque che le ipotesi del risultato precedente siano verificate e sintetizziamo un controllore che stabilizzi (risp. stabilizzi asintoticamente) il sistema (1). Per fare ciò, utilizziamo il Teorema sull'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato e la formula di Ackermann (??).

Sia $p(\lambda)$ un polinomio di grado r le cui radici sono a parte reale non positiva (risp. negativa). Ponendo:

$$K_1 = -\mu_1 \cdot p(A_{11}),$$

dove μ_1 è l'ultima riga della matrice di raggiungibilità associata al sistema (4), il controllore $u = K_1 x_1$ assegna gli autovalori al processo controllato:

$$dx_1/dt = (A_{11} + B_1 K_1)x_1, \quad (5)$$

nelle radici del polinomio $p(\lambda)$, e dunque il sistema (5) è stabile (risp. asintoticamente stabile). Dunque, essendo le ipotesi del Teorema 1 verificate, è chiaro che per qualunque matrice $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-r)}$, il controllore:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \tilde{x},$$

stabilizza (risp. stabilizza asintoticamente) il sistema (3).

Infine, tenendo conto del cambiamento di coordinate, un controllore che stabilizzi (risp. stabilizzi asintoticamente) il sistema (1) è dato da:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} x,$$

dove:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} T.$$

Esercizio 1 Dato il sistema lineare tempo continuo

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

si chiede di:

- (i) studiare se il sistema (6) è stabilizzabile e/o asintoticamente stabilizzabile;
- (ii) progettare, se esiste, un controllore $u = Kx$ che stabilizzi asintoticamente il sistema (6).

Svolgimento - Conviene innanzitutto scrivere il sistema (6) in forma canonica di raggiungibilità. La matrice di raggiungibilità associata al sistema (6) è :

$$R = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

e dunque il sottospazio di raggiungibilità è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dunque, scegliendo una matrice di trasformazione

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (6) nella seguente forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \quad (7)$$

dove:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto gli autovalori relativi alla dinamiche non raggiungibili sono:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1,$$

e dunque il sistema (6) è stabilizzabile asintoticamente e dunque anche stabilizzabile.

Calcoliamo dunque un controllore $u = Kx$ asintoticamente stabilizzante per il sistema (6). La dinamica raggiungibile è rappresentata da:

$$dx_1/dt = x_1 + u,$$

e pertanto scegliendo un controllore $u = kx_1$ ed imponendo ad esempio che l'autovalore nel processo controllato sia -1 si ottiene:

$$dx_1/dt = (1 + k)x_1 = -x_1,$$

da cui $k = -2$. Pertanto un controllore asintoticamente stabilizzante per il sistema (7) è dato da $u = \tilde{K}\tilde{x}$ dove:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -2 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Infine tenendo conto del cambiamento di coordinate si ottiene $u = Kx$ dove:

$$\begin{aligned} K = \tilde{K}T &= \begin{bmatrix} -2 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_3 & k_2 & k_3 + 2 \end{bmatrix}, k_2, k_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Dato il sistema lineare tempo continuo:

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si chiede di:

- (i) studiare al variare del parametro a , la stabilizzabilità e la stabilizzabilità asintotica del sistema (8);
- (ii) progettare se esiste un controllore $u = Kx$ che stabilizzi asintoticamente il sistema (8).

Svolgimento - Conviene innanzitutto studiare la raggiungibilità del sistema (8). La matrice di raggiungibilità è:

$$R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1-a \\ a & a \end{bmatrix},$$

e pertanto il sistema (8) è raggiungibile se e solo se

$$\det(R) = a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0.$$

Studiamo adesso il caso critico $a = 0$. Sostituendo tale valore critico nel sistema (8), si ottengono le seguenti matrici dinamiche:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

e pertanto per $a = 0$ il sistema (8) è direttamente in forma canonica di raggiungibilità. Dunque l'autovalore $\lambda_1 = 1$ è raggiungibile mentre l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è non raggiungibile.

Dall'analisi fatta risulta evidente che il sistema è stabilizzabile per qualunque valore di $a \in \mathbb{R}$ mentre è asintoticamente stabilizzabile se e solo $a \neq 0$.

Calcoliamo adesso dei controllori stabilizzanti ed asintoticamente stabilizzanti.

Per calcolare un controllore asintoticamente stabilizzante possiamo applicare la formula di Ackermann assegnando gli autovalori per esempio in -1 :

$$\begin{aligned} K &= -\mu \cdot p(A) = \\ &= -\frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-a & -3 \\ 3a & 1-a \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a^2 - a & 2a + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e dunque un controllore asintoticamente stabilizzante per $a \neq 0$ è:

$$u = -\frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a^2 - a & 2a + 1 \end{bmatrix} x.$$

Esercizio 3 Dato il sistema lineare tempo continuo:

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -a^2 & 3a^2 - 8 \\ a^2 - 2 & a^2 - 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a + 2 \\ a + 2 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si chiede di:

- (i) studiare al variare del parametro a , la stabilizzabilità e la stabilizzabilità asintotica del sistema (9);
- (ii) progettare se esiste un controllore che stabilizzi asintoticamente il sistema (9).

Svolgimento - Conviene innanzitutto scrivere il sistema (9) in forma canonica di raggiungibilità. La matrice di raggiungibilità associata al sistema (9) è :

$$R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} a + 2 & 2a^3 + 4a^2 - 8a - 16 \\ a + 2 & 2a^3 + 4a^2 - 8a - 16 \end{bmatrix}.$$

E' facile osservare che il rango di R è uno per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ e che il sottospazio di raggiungibilità è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

da cui, scegliendo ad esempio una matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (9) nella seguente forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad (10)$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2a^2 - 8 & 2a^2 - 6 \\ 0 & -2a^2 + 2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} a + 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dall'analisi del sistema (10) è possibile studiare le condizioni di: (i,1) stabilizzabilità e di (ii,2) stabilizzabilità asintotica.

(i,1) L'autovalore non raggiungibile del sistema (10) è $\lambda_2 = -2a^2 + 2$ e pertanto:

$$\lambda_2 \leq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Inoltre si osservi che l'autovalore $\lambda_1 = 2a^2 - 8$ è raggiungibile se e solo se $a \neq -2$. Pertanto per $a = -2$ l'autovalore λ_1 è non raggiungibile e vale $\lambda_1 = 0$. Siccome in questo caso stiamo studiando la stabilizzabilità (e non la stabilizzabilità asintotica), si ha ancora stabilizzabilità e dunque l'insieme di tutti i valori del parametro a per cui si ha stabilizzabilità è dato da:

$$a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

(ii,2) In questo caso l'autovalore non raggiungibile λ_2 deve essere a parte reale non negativa e pertanto:

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Inoltre per $a = -2$, l'autovalore $\lambda_1 = 2a^2 - 8$ è non raggiungibile e vale $\lambda_1 = 0$. Dobbiamo dunque escludere il caso critico $a = -2$, e pertanto l'insieme di tutti i valori del parametro a per cui si ha asintotica stabilizzabilità è dato da:

$$a \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, +\infty).$$

Passiamo adesso alla sintesi del controllore asintoticamente stabilizzante. Il sottosistema raggiungibile associato al sistema (10) è:

$$dx_1/dt = (2a^2 - 8)x_1 + (a + 2)u. \quad (11)$$

Imponendo un controllore $u = kx_1$ sul sistema (11), si ottiene il seguente sistema controllato:

$$dx_1/dt = (2a^2 - 8 + (a + 2)k)x_1. \quad (12)$$

Il sistema controllato (12) è asintoticamente stabile se e solo se:

$$2a^2 - 8 + (a + 2)k < 0. \quad (13)$$

Scegliendo per esempio:

$$k = \frac{-2a^2}{a + 2},$$

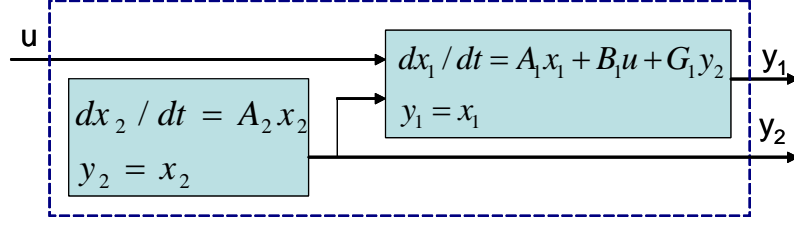
la condizione (13) è verificata per ogni $a \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, +\infty)$, e dunque un controllore asintoticamente stabilizzante per il sistema (10) è dato da $u = \tilde{K}_2 \tilde{x}$ dove:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \frac{-2a^2}{a+2} & k_2 \end{bmatrix}, k_2.$$

Infine, tenendo conto del cambiamento di coordinate si ottiene $u = Kx$ dove:

$$K = \tilde{K}T = \begin{bmatrix} \frac{-2a^2}{a+2} + k_2 & \frac{2a^2}{a+2} + k_2 \end{bmatrix}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4 Dato il seguente schema di controllo:



dove:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a+1 & 3 \\ 0 & 1-a^2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} a+2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} -a & a+1 \\ -2a^2 & 2a(a+1) \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Si chiede di:

- (i) determinare tutti i valori di a affinché il sistema sia stabilizzabile asintoticamente;
- (ii) calcolare l'espressione di tale controllore.

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ha come rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & G_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (14)$$

Dall'analisi del sistema (14) ci si accorge che gli autovalori relativi alla matrice dinamica A_2 sono non raggiungibili e pertanto bisogna imporre che:

$$\lambda_{1,2} = a+1$$

$$\lambda_{2,2} = 1-a^2,$$

siano negativi. Pertanto si ottiene:

$$\lambda_{1,2} < 0 \iff a < -1;$$

$$\lambda_{2,2} < 0 \iff a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Da questa analisi preliminare i valori ammissibili di a per cui contemporaneamente $\lambda_{1,2} < 0$ e $\lambda_{2,2} < 0$ sono

$$a < -1.$$

Inoltre considerando il sottosistema:

$$\begin{cases} dx_1/dt = A_1x_1 + B_1u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a+2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = x_1, \end{cases} \quad (15)$$

ci si accorge che c'è un autovalore non raggiungibile in $\lambda_{2,1} = -2$, che verifica direttamente la specifica ed un autovalore in $\lambda_{1,1} = 2$, la cui raggiungibilità dipende dalla matrice B_1 parametrizzata da a : da ciò risulta evidente richiedere che l'autovalore $\lambda_{1,1} = 2$ sia raggiungibile e pertanto che:

$$a+2 \neq 0 \iff a \neq -2.$$

Quindi, il sistema è asintoticamente stabilizzabile se e solo se:

$$a \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1).$$

Consideriamo la dinamica raggiungibile relativa al sistema (15), e definiamo la sua variabile di stato $x_{1,1}$. Imponendo un controllore $u = k_{1,1}x_{1,1}$ a tale sistema, si ottiene:

$$dx_{1,1}/dt = 2x_{1,1} + (a+2)k_{1,1}x_{1,1} = (2 + (a+2)k_{1,1})x_{1,1},$$

da cui, imponendo per esempio:

$$2 + (a+2)k_{1,1} = -1,$$

si ottiene:

$$k_{1,1} = \frac{-3}{a+2}.$$

Infine, l'espressione generale del controllore che risolve la specifica al punto (i) è data da:

$$u = \left[\begin{array}{cccc} \frac{-3}{a+2} & k_1 & k_2 & k_3 \end{array} \right] x, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5 Dato il sistema lineare tempo continuo:

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^4, u \in \mathbb{R} \quad (16)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & a^2-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a-1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si chiede di studiare la stabilizzabilità e la stabilizzabilità asintotica al variare del parametro a .

Svolgimento - Definiamo una trasformazione di coordinate dello spazio di stato \mathbb{R}^4 , $\tilde{x} = Tx$ dove:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema così trasformato è dato da:

$$d\tilde{x}/dt = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (17)$$

dove:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 2-a \end{bmatrix}; \\ A_{22} = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ 3 & a^2-1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} a \\ a-1 \end{bmatrix}$$

Si noti che il sistema (17) è in forma canonica di raggiungibilità e pertanto gli autovalori $\lambda_3 = a-1$, $\lambda_4 = a^2-1$, relativi alla matrice dinamica A_{22} , sono non raggiungibili. Dunque affinché si abbia stabilizzabilità deve essere:

$$\lambda_3 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 1, \\ \lambda_4 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [-1, 1],$$

da cui:

$$a \in [-1, 1],$$

ed affinché si abbia stabilizzabilità asintotica deve essere:

$$\lambda_3 < 0 \Leftrightarrow a < 1, \\ \lambda_4 < 0 \Leftrightarrow a \in (-1, 1),$$

da cui:

$$a \in (-1, 1).$$

Consideriamo adesso il sistema:

$$d\tilde{x}_1/dt = A_{11}\tilde{z}_1 + B_1u. \quad (18)$$

Innanzitutto conviene studiare la raggiungibilità del sistema (18). La matrice di raggiungibilità associata a tale sistema è:

$$R_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 3a-2 \\ a-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque il sistema (18) è raggiungibile se e solo se:

$$\det(R_1) = -(3a - 2)(a - 1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2/3; a \neq 1.$$

Da ciò si evince che per $a \neq 2/3$ e $a \neq 1$, il sistema (18) è stabilizzabile e stabilizzabile asintoticamente.

Studiamo adesso i caso singolari. E' facile osservare che gli autovalori della matrice A_{11} sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

Caso 1) Sia $a = 2/3$ e cerchiamo in questo caso quali sono gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili del sistema (18). Per fare ciò utilizziamo il PBH Test:

$$\begin{aligned} \rho([A_{11} - \lambda_1 I \mid B_1]) &= \rho\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}\right) = 2, \\ \rho([A_{11} - \lambda_2 I \mid B_1]) &= \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2/3 \\ 0 & -1 & -1/3 \end{bmatrix}\right) = 1. \end{aligned}$$

In questo caso si evince che l'autovalore $\lambda_1 = 0$ è raggiungibile e l'autovalore instabile $\lambda_2 = 1$ è non raggiungibile. Da ciò desumiamo che per $a = 2/3$ non si ha stabilizzabilità e dunque neanche stabilizzabilità asintotica.

caso 2) Sia $a = 1$ e cerchiamo in questo caso quali sono gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili del sistema (18). Per fare ciò utilizziamo di nuovo il PBH Test:

$$\begin{aligned} \rho([A_{11} - \lambda_1 I \mid B_1]) &= \rho\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \\ \rho([A_{11} - \lambda_2 I \mid B_1]) &= \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2. \end{aligned}$$

In questo caso si evince che l'autovalore $\lambda_1 = 0$ è non raggiungibile e l'autovalore, instabile $\lambda_2 = 1$ è raggiungibile. Da ciò desumiamo che per $a = 1$ si ha stabilizzabilità ma non stabilizzabilità asintotica.

Riassumendo i risultati si ottiene:

- Il sistema (16) è stabilizzabile se e solo se:

$$a \in [-1, 2/3) \cup (2/3, 1];$$

- Il sistema (16) è stabilizzabile asintoticamente se e solo se:

$$a \in (-1, 2/3) \cup (2/3, 1).$$