

Controlli Automatici II a.a. 2005/2006

Esercitazione n° 7

Prof. Maria D. Di Benedetto e Dott. Giordano Pola
Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Centro di Eccellenza DEWS,
Università di L'Aquila, Poggio di Roio, 67040 L'Aquila, Italy,
{pola,dibenede}@ing.univaq.it

March 15, 2006

Data: 16 febbraio 2006

1 Il principio di separazione

Il principio di separazione permette di studiare la stabilizzazione con retroazione dinamica dall'uscita. Dato un sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1)$$

il problema è di progettare un controllore dinamico della forma:

$$\begin{cases} d\xi/dt = F\xi + Gy, \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ u = H\xi, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2)$$

che stabilizzi asintoticamente il sistema (1).

Per fare ciò riscriviamo il sistema (2) come osservatore:

$$\begin{cases} d\xi/dt = (A - GC + BH)\xi + Gy, \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ u = H\xi, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3)$$

da cui interconnettendo i sistemi (1) e (3), si ottiene:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ d\xi/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BH \\ GC & A - GC + BH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

Operando adesso una trasformazione nello spazio di stato:

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ de/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BH & -BH \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}.$$

Da ciò si ottengono i seguenti risultati:

Teorema 1 *Il sistema (1) è stabilizzabile asintoticamente per mezzo di una retroazione dinamica dall'uscita se e solo se è stabilizzabile e rilevabile.*

Teorema 2 *E' possibile assegnare ad arbitrio gli autovalori al sistema (1) per mezzo di una retroazione dinamica dall'uscita se e solo se il sistema (1) è raggiungibile e osservabile.*

La sintesi delle matrici G e H del controllore (3) può essere effettuata utilizzando le formula di Ackerman.

Esercizio 1 Dato il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Progettare un controllore dinamico con retroazione dall'uscita che assegni gli autovalori in -1 .

Svolgimento - Studiamo innanzitutto le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del processo.

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque il processo è raggiungibile ed osservabile e pertanto verifica le ipotesi del Teorema 2: dunque esiste un controllore che verifica le specifiche. Per calcolare tale controllore bisogna sintetizzare le matrici G e H del controllore dinamico (3) e per fare ciò utilizziamo la formula di Ackerman. Innanzitutto:

$$p(A) = (A + I)^2 = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$H = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 Dato il sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; C = [1/2 \quad 0 \quad -1/2],$$

si chiede di progettare se esiste un controllore dinamico che stabilizzi asintoticamente il processo.

Svolgimento - Prima di tutto conviene studiare le proprietà di stabilizzabilità asintotica e di rilevabilità del sistema. Gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3.$$

Dunque il problema della stabilizzazione con retroazione dinamica dall'uscita ha soluzione se e solo se $\lambda_2 = 1$ è raggiungibile e osservabile. Verifichiamo tali proprietà per mezzo del PBH Test. Si ottiene:

$$\rho([A - \lambda_2 \quad B]) = \rho\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}\right) = 3$$

e dunque il problema ha soluzione. Per sintetizzare tale controllore dobbiamo calcolare H e G . La matrice di osservabilità del processo è

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\mathcal{I} = \ker(O) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Dunque una matrice T^{-1} invertibile che porti il sistema in forma canonica di osservabilità è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cui corrisponde una matrice T data da:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sulla base di T possiamo costruire la forma canonica di osservabilità:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases}$$

dove:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \\ \tilde{B} &= TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ \tilde{C} &= CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Il sottosistema osservabile è:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + 2u \\ y_1 = 1/2x_1. \end{cases}$$

da cui imponendo ad esempio una velocità di convergenza pari a quella di e^{-3t} , si ottiene

$$A_{11} - \tilde{G}C_1 = 1 - g_1 1/2 = -3 \iff g_1 = 8,$$

da cui:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 8 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, g_2, g_3 \in \mathbb{R},$$

cui corrisponde:

$$G = T^{-1}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 8 + g_3 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, g_2, g_3 \in \mathbb{R}.$$

La matrice di raggiungibilità associata al processo è:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

e dunque il sottospazio di raggiungibilità è:

$$\mathcal{P} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dunque scegliendo una matrice di trasformazione

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (4) nella seguente forma canonica di raggiungibilità:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Il sottosistema raggiungibile è:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + u \\ y_1 = x_1. \end{cases}$$

da cui imponendo ad esempio l'autovalore del sistema a ciclo chiuso in -1 si ottiene con un controllore $u = h_1 x_1$

$$A_{11} + B_1 h_1 = 1 + h_1 = -1 \iff h_1 = -2;$$

da cui

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -2 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}, h_2, h_3 \in \mathbb{R},$$

cui corrisponde una matrice H data da:

$$H = \tilde{H}T = \begin{bmatrix} h_3 & h_2 & 2 + h_3 \end{bmatrix}, h_2, h_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 Dato il sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ a & -2a \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}; C = [1 \quad 1], a \in \mathbb{R},$$

studiare al variare del parametro a se è possibile stabilizzare asintoticamente il processo per mezzo di un controllore dinamico a retroazione dall'uscita e nei casi in cui è possibile, di determinare tale controllore.

Svolgimento - Calcoliamo le matrici di raggiungibilità e osservabilità per studiare la raggiungibilità e osservabilità del processo. Si ottiene:

$$R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a - 2a^2 \end{bmatrix},$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a+1 & -2a-1 \end{bmatrix},$$

Pertanto il sistema è raggiungibile se e solo se:

$$\det(R) = -2a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

ed il sistema è osservabile se e solo se:

$$\det(O) = -2 - 4a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1/2.$$

caso 1.) In virtù del Teorema 2, per $a \neq 0, -1/2$, il problema ha soluzione. La sintesi del controllore è fatta per mezzo delle formule di Ackerman. Quindi imponendo ad esempio gli autovalori del processo controllato coincidenti in -1 , si ottiene:

$$p(A) = (A + I)^2 = \begin{bmatrix} a^2 + 3a + 4 & a - 3 \\ -a^2 + 3a & 4a^2 - 5a + 1 \end{bmatrix},$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} (2a-1)/2a & 1/2a^2 \\ 1/2a & -1/2a^2 \end{bmatrix},$$

$$O^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/(4a+2) \\ 1/2 & -1/(4a+2) \end{bmatrix};$$

$$H = -[1/2a \quad -1/2a^2] \begin{bmatrix} a^2 + 3a + 4 & a - 3 \\ -a^2 + 3a & 4a^2 - 5a + 1 \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{2a^2} [-a^3 - 4a^2 - a \quad 3a^2 - 2a + 1],$$

$$G = \begin{bmatrix} a^2 + 3a + 4 & a - 3 \\ -a^2 + 3a & 4a^2 - 5a + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(4a+2) \\ -1/(4a+2) \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{4a+2} \begin{bmatrix} a^2 + 2a + 7 \\ -5a^2 + 8a - 1 \end{bmatrix}.$$

caso 2.) Studiamo il caso critico per $a = 0$. Le matrici dinamiche del processo per questo caso critico sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 1], a \in \mathbb{R};$$

e pertanto essendo il sistema in forma canonica di raggiungibilità, l'autovalore non raggiungibile è 0: il sistema non è stabilizzabile con retroazione statica dallo stato ed il problema non ha soluzione. caso 3.) Studiamo il caso critico per $a = -1/2$. Le matrici dinamiche del processo per questo caso critico sono

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 1], a \in \mathbb{R}.$$

Gli autovalori del processo in questo caso sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3/2,$$

ed uno di essi non è osservabile: dunque il sistema non è rilevabile ed il problema non ha soluzione.

Esercizio 4 Dato il sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 - 3 & 0 \\ 1 & -2 & a^2 + 3a \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad 0], a \in \mathbb{R}.$$

- (i) trovare i valori del parametro a affinché il sistema (5) sia stabilizzabile con una retroazione dinamica dall'uscita;
- (ii) trovare i valori del parametro a affinché esista un controllore dinamico con retroazione dall'uscita che assegni gli autovalori al processo controllato coincidenti in -2 ;
- (iii) trovare l'espressione di un controllore che risolva il punto (ii).

Svolgimento - Innanzitutto conviene studiare quali autovalori della matrice A sono raggiungibili e non ed osservabili e non. Gli autovalori della matrice A sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= a^2 - 3, \\ \lambda_3 &= a^2 + 3a. \end{aligned}$$

Per studiare l'osservabilità applichiamo il PBH Test:

$$\begin{aligned} \rho \begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} &= \rho \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 - 4 & 0 \\ 1 & -2 & a^2 + 3a - 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}. \\ \rho \begin{pmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{pmatrix} &= \rho \begin{pmatrix} -a^2 - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3a - 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq \frac{2}{3}. \\ \rho \begin{pmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{pmatrix} &= \rho \begin{pmatrix} -a^2 - 3a + 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3a - 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} < 3, \text{ per ogni valore di } a. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le proprietà di raggiungibilità si osservi che se il vettore di stato è $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]'$, possiamo riscrivere il sistema (5) per mezzo di una trasformazione di coordinate

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

dove

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema nelle nuove coordinate è

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a^2 + 3a & -2 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} a - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{cases}$$

ed è in forma canonica di raggiungibilità. In particolare si osservi che l'autovalore $\lambda_2 = a^2 - 3$ è non raggiungibile. Calcolando la matrice di raggiungibilità associata al sottosistema di variabili di stato x_1 e x_3 :

$$R_{1,3} = \begin{bmatrix} a - 1 & a - 1 \\ 0 & a - 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene che gli autovalori λ_1 e λ_3 sono raggiungibili se e solo se $a \neq 1$.

Riassumendo l'analisi finora svolta si ottiene:

- λ_1 è un autovalore osservabile se $a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$ ed è raggiungibile se e solo se $a \neq 1$,
- λ_2 è un autovalore osservabile se $a \neq \frac{2}{3}$ e non raggiungibile,
- λ_3 è un autovalore non osservabile ed è raggiungibile se e solo se $a \neq 1$,

Da questa analisi preliminare è possibile risolvere i quesiti richiesti come segue.

(i) I valori del parametro a per cui esista un osservatore asintotico dello stato sono quelli per cui il sistema (5) è rilevabile e pertanto se e solo se $a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, $a \neq \frac{2}{3}$ e $\lambda_3 = a^2 + 3a < 0$. Dunque:

$$a \in (-3, 0).$$

(ii) I valori del parametro a per cui il sistema (5) è stabilizzabile con una retroazione dinamica dall'uscita sono quelli per cui gli autovalori non osservabili e non raggiungibili sono a parte reale negativa. Essendo $\lambda_1 > 0$ risulta evidente imporre $a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, $a \neq 1$ ed inoltre,

$$\begin{aligned} \lambda_2 < 0 &\iff a \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \\ \lambda_3 < 0 &\iff a \in (-3, 0). \end{aligned}$$

Dunque le specifiche del punto ii) sono verificate se e solo se:

$$a \in (-\sqrt{3}, 0).$$

(iii) I valori del parametro a per cui esista un controllore dinamico con retroazione dinamica dall'uscita che assegni gli autovalori al processo controllato coincidenti in -2 sono quelli per cui gli autovalori non raggiungibili e non osservabili sono coincidenti in -2 . Anche in questo caso risulta evidente imporre

$$a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad a \neq 1 \tag{6}$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned} \lambda_2 = a^2 - 3 = -2 &\iff a = -1, 1, \\ \lambda_3 = a^2 + 3a = -2 &\iff a = -1, -2. \end{aligned} \tag{7}$$

Interscendendo le condizioni (6) e (7), si ottiene:

$$a = -1.$$

(iv) Le matrici dinamiche del sistema (5) per $a = -1$ sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Utilizzando il principio di separazione e la formula di Ackerman è possibile sintetizzare le matrici H e G per cui il controllore

$$\begin{cases} d\xi/dt = (A - GC + BH)\xi + Gy, \\ u = H\xi, \end{cases}$$

verifichi le specifiche di cui al punto iii). Le dinamiche relative agli autovalori raggiungibili sono date da

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_3/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

cui è associata una matrice di raggiungibilità

$$R_{1,3} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ricordando la formula di Ackerman $H_{1,3} = -\mu p(A_{11})$, dove $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$ e μ è l'ultima colonna di

$$R_{1,3}^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} H_{1,3} &= -1/4 \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 \\ &= -1/4 \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque:

$$H = \begin{bmatrix} 3/2 & h_2 & 0 \end{bmatrix}, h_2 \in \mathbb{R}.$$

Inoltre le dinamiche relative agli autovalori osservabili sono date da:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

cui è associata la matrice di osservabilità

$$O_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ricordando la formula di Ackerman $G = p(A) \cdot \mu$, dove $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$ e μ è l'ultima colonna di

$$O_{1,2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

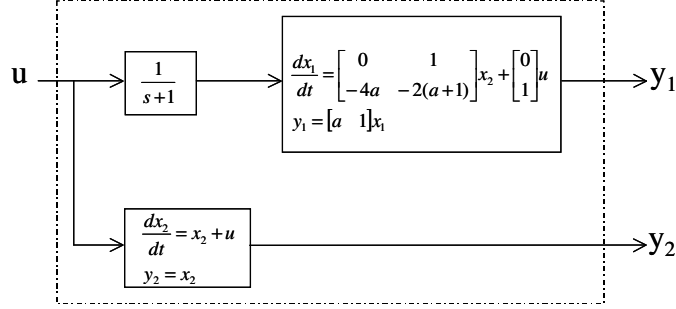
si ottiene:

$$\begin{aligned} G_{1,2} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Infine, tenendo conto anche della dinamica inosservabile si ottiene:

$$G = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, g \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5 Si consideri il processo in figura



dove a è un parametro reale. Si trovino tutti i valori di a per cui esiste un controllore con retroazione dall'uscita che assegni gli autovalori al processo controllato coincidenti in -2 .

Svolgimento - Una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in figura è dato da:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2(a+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori associati al sistema sono:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -2; \quad \lambda_4 = -2a.$$

Applichiamo il PBH Test agli autovalori λ_1 , λ_2 e λ_4 per trovare delle condizioni sul parametro a come richiesto dalle specifiche del testo.

$$\rho([A - \lambda_1 \quad B]) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4;$$

$$\rho([A - \lambda_2 \quad B]) = \rho\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4;$$

$$\rho([A - \lambda_4 \quad B]) = \rho\left(\begin{bmatrix} 2a-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4a & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 \text{ se e solo se } a \neq -1/2.$$

Studiamo adesso l'osservabilità degli autovalori del processo:

$$\begin{aligned} \rho \left(\begin{array}{c} A - \lambda_1 I \\ C \end{array} \right) &= \rho \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4 \text{ se e solo se } a \neq 1; \\ \rho \left(\begin{array}{c} A - \lambda_2 I \\ C \end{array} \right) &= \rho \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4; \\ \rho \left(\begin{array}{c} A - \lambda_4 I \\ C \end{array} \right) &= \rho \left(\begin{bmatrix} 2a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4 \text{ se e solo se } a \neq 0. \end{aligned}$$

Dunque il problema ammette soluzione se e solo se $a \neq -1/2, a \neq 0$ e $a \neq 1$.