

Controlli Automatici II a.a. 2005/2006

Esercitazione n° 10

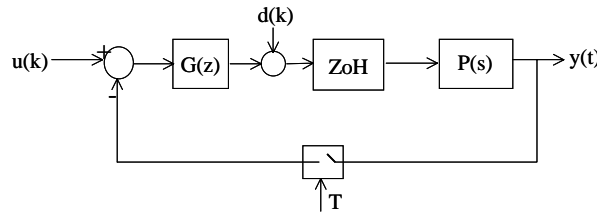
Prof. Maria D. Di Benedetto e Dott. Giordano Pola
Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Centro di Eccellenza DEWS,
Università di L'Aquila, Poggio di Roio, 67040 L'Aquila, Italy,
{pola,dibenede}@ing.univaq.it

February 20, 2007

Data: 8 marzo 2006

1 Sintesi di Sistemi a Risposta Piatta

Si consideri il processo in figura:



Il processo in figura si dice *a risposta piatta* se, eccitato con ingresso a gradino $u(k) = \delta_{-1}(k)$, presenta errore nullo per ogni $t \geq lT$ dove $l \in \mathbb{N}$. Il seguente risultato fornisce una condizione necessaria e sufficiente che caratterizza i sistemi a risposta piatta.

Teorema 1: *Il processo in figura ha risposta piatta con $l \in \mathbb{N}$ se e solo se:*

- $D_F(z)$ ha radice in $z = 1$;
- $N_F(z) + D_F(z) = z^l$ con $l = gr(D_F(z))$;
- nessun polo di $G(z)$ coincide con uno zero di $P(z)$.

Inoltre posto:

$n =$ grado denominatore di $P(z)$;

$m =$ grado della parte di denominatore $P(z)$ cancellabile

$$r = \begin{cases} n - m, & \text{se il denominatore di } P(z) \text{ non contiene un fattore } (z - 1), \\ n - m - 1, & \text{se il denominatore di } P(z) \text{ contiene un fattore } (z - 1). \end{cases}$$

il valore minimo di l per cui si ha risposta piatta è dato da:

$$l_{\min} = n + r.$$

Infine il grado del numeratore di $G(z)$ è pari alla somma di $r + m$.

Esercizio 1 Data la seguente funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s-2},$$

progettare uno schema di controllo numerico con passo di campionamento $T = 1$ che verifichi le seguenti specifiche:

- (i) errore a regime permanente per ingressi a rampa nullo;
- (ii) risposta piatta nel più breve tempo possibile;
- (iii) stabilità asintotica del processo.

Svolgimento - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P(z)$ come segue.

$$\begin{aligned}\frac{P(s)}{s} &= \frac{1}{s(s-2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/2}{s-2} \\ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} &= (-1/2 + 1/2e^{-2k}) \delta_{-1}(k) \\ \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) &= -1/2 \frac{z}{z-1} + 1/2 \frac{z}{z-e^2} \\ P(z) &= -1/2 + 1/2 \frac{z-1}{z-e^2} = \frac{1/2e^2}{z-e^2}\end{aligned}$$

La specifica i) impone che la funzione di trasferimento del processo in catena aperta abbia due poli coincidenti in $z = 1$; dunque poniamo:

$$G(z) = \frac{az^2 + bz + c}{(z-1)^2}.$$

La funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$F(z) = 1/2e^2 \frac{az^2 + bz + c}{(z-1)^2(z-e^2)}$$

Imponendo che:

$$N_F(z) + D_F(z) = z^3$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}a &= 2(2e^2 + 4)/e^2, \\ b &= 2(2 + 4e^2)/e^2, \\ c &= 4.\end{aligned}$$

Non essendoci state cancellazioni tra il controllore $G(z)$ ed il processo $P(z)$, si ha che il denominatore del processo a ciclo chiuso coincide con z^3 e pertanto il processo è asintoticamente stabile.

Esercizio 2 Data la seguente funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{s+2}{s^2-1},$$

progettare uno schema di controllo numerico con passo di campionamento $T = 2$ che verifichi le seguenti specifiche:

- (i) errore nullo a regime permanente per ingressi costanti;
- (ii) risposta piatta nel più breve tempo possibile.

Svolgimento - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P(z)$ come segue.

$$\begin{aligned}\frac{P(s)}{s} &= \frac{1}{s(s-2)} = \frac{-2}{s} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{3/2}{s-1} \\ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} &= (-2 + 1/2e^{-2k} + 3/2e^{2k}) \delta_{-1}(k) \\ \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) &= -2 \frac{z}{z-1} + 1/2 \frac{z}{z-e^{-2}} + 3/2 \frac{z}{z-e^2} \\ P(z) &= -2 + 1/2 \frac{z-1}{z-e^{-2}} + 3/2 \frac{z-1}{z-e^2} = \frac{A(T)z+B(T)}{(z-e^{-2})(z-e^2)},\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}A(T) &= 2e^{-2} + 2e^2 - 1/2(1+e^2) - 3/2(1+e^{-2}) \\ B(T) &= -2 + 1/2e^2 + 3/2e^{-2}\end{aligned}$$

Per verificare le specifiche richieste dall'esercizio, si scelga un controllore:

$$G(z) = \frac{(z-e^{-2})(az+b)}{(z-1)(z+c)}.$$

La funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$F(z) = 1/2e^2 \frac{az^2 + bz + c}{(z-1)^2(z-e^2)}$$

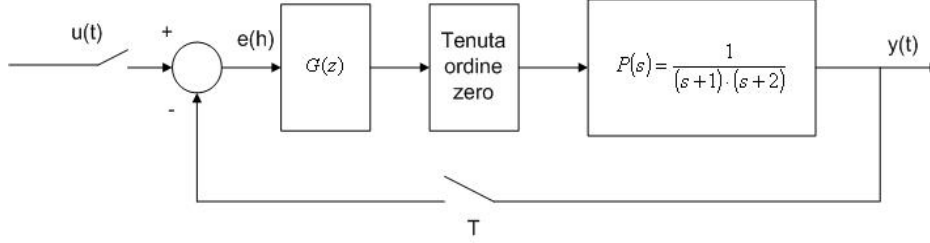
Imponendo che:

$$N_F(z) + D_F(z) = z^3$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{A(T)} \left(e^2 + 1 + \frac{B(T)}{e^2} \frac{-e^2 - \frac{B(T)}{A(T)}(e^2+1)}{\frac{e^2+1}{e^2}B(T)+A(T)+\frac{B(T)^2}{A(T)e^2}} \right), \\ b &= \frac{-e^2 - \frac{B(T)}{A(T)}(e^2+1)}{\frac{e^2+1}{e^2}B(T)+A(T)+\frac{B(T)^2}{A(T)e^2}}, \\ c &= -\frac{B(T)}{e^2} \frac{-e^2 - \frac{B(T)}{A(T)}(e^2+1)}{\frac{e^2+1}{e^2}B(T)+A(T)+\frac{B(T)^2}{A(T)e^2}}.\end{aligned}$$

Esercizio 3 Si consideri il seguente schema di controllo:



Determinare il controllore tempo discreto $G(z)$ e il passo di campionamento T in modo che:

- (i) L'errore tra la risposta $y(t)$ e l'ingresso $u(t)$ a gradino sia nullo per ogni istante di tempo $t \geq \ell T$, con ℓ numero naturale più piccolo possibile;
- (ii) Il modulo del segnale $e(h)$ in regime permanente in corrispondenza ad un ingresso a rampa sia minore di 1,1.

Svolgimento - Calcoliamo la funzione di trasferimento $P(z)$ associata alla discretizzazione del processo $P(s)$:

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} = R_1 + (e^{-T})^k R_2 + R_3 (e^{-2T})^k \delta_{-1}(kT)$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) = R_1 \frac{z}{z-1} + R_2 \frac{z}{z-e^{-T}} + R_3 \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

$$P(z) = R_1 + R_2 \frac{(z-1)}{z-e^{-T}} + R_3 \frac{z}{z-e^{-2T}} = \frac{A(T)z+B(T)}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

con $R_1 = 1/2$, $R_2 = -1$ e $R_3 = 1/2$ e:

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T}; \\ B(T) &= \frac{1}{2}e^{-3T} - e^{-2T} + \frac{1}{2}e^{-T}. \end{aligned} \quad (1)$$

Per soddisfare la prima specifica scegliamo:

$$G(z) = \frac{(z - e^{-T})(z - e^{-2T})a}{(z - 1)(z + b)}$$

Dall'espressione del controllore $G(z)$ si ottiene:

$$F(z) = \frac{(z - e^{-T})(z - e^{-2T})a(A(T)z + B(T))}{(z - 1)(z + b)(z - e^{-T})(z - e^{-2T})} = \frac{a(A(T)z + B(T))}{(z - 1)(z + b)}$$

Essendo la differenza poli zero di $G(z)$ zero, otteniamo che è possibile sintetizzare un controllore per avere rispoa piatta con $\ell = 2$.

Dunque imponendo:

$$aA(T)z + aB(T) + z^2 + (b - 1)z - b = z^2,$$

otteniamo:

$$\begin{cases} aA(T) + b - 1 = 0, \\ aB(T) - b = 0. \end{cases}$$

da cui:

$$a = \frac{1}{(A(T)+B(T))}; \quad b = \frac{B(T)}{(A(T)+B(T))}.$$

Dunque l'espressione del controllore $G(z)$ per cui il processo compensato verifica la specifica 1) è data da:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{(z - e^{-T})(z - e^{-2T}) \frac{1}{(A(T)+B(T))}}{(z - 1) \left(\frac{A(T)+B(T)z+B(T)}{(A(T)+B(T))} \right)} \\ &= \frac{(z - e^{-T})(z - e^{-2T})}{(z - 1)(A(T) + B(T)z + B(T))} \end{aligned} \quad (2)$$

Osservazione: Il grado del denominatore del processo $P(z)$ è $n = 2$. Inoltre con riferimento alla notazione introdotta nei richiami di teoria si ha $m = 2$ e dunque:

$$\begin{aligned} r &= n - m = 0 \\ k_{\min} &= h + r = 2 \\ gr(N_G(z)) &= r + m = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Consideriamo adesso la seconda specifica. La trasformata Zeta dell'ingresso a rampa

$$u(k) = k\delta_{-1}(k)$$

è data da:

$$U(z) = \frac{z}{(z - 1)^2}.$$

La specifica impone che:

$$\left| \lim_{h \rightarrow \infty} e(h) \right| \leq 1, 1. \quad (3)$$

Sfruttando il teorema del valore finale, la condizione (3) può essere riscritta come:

$$\left| \lim_{h \rightarrow \infty} [e(h)] \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \mathcal{Z}[e(h)] \right| \leq 1, 1. \quad (4)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(e(h)) &= \frac{1}{1 + F(z)} U(z) = \frac{D_f(z)}{N_f(z) + D_f(z)} U(z) \\ &= \frac{(z - 1)(z + b)}{[A(T)z + B(T)]a + (z - 1)(z + b)} \frac{z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

Dunque:

$$\left| \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{(z - 1)(z + b)}{[A(T)z + B(T)]a + (z - 1)(z + b)} \frac{z}{(z - 1)^2} \right| = \left| \frac{A(T) + 2B(T)}{A(T) + B(T)} \right| \leq 1, 1$$

Andando a sostituire l'espressione dei coefficienti $A(T)$ e $B(T)$ con i valori in (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{A(T) + 2B(T)}{A(T) + B(T)} \right| &= \left| \frac{(\frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T}) + 2(\frac{1}{2}e^{-3T} - e^{-2T} + \frac{1}{2}e^{-T})}{(\frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T}) + (\frac{1}{2}e^{-3T} - e^{-2T} + \frac{1}{2}e^{-T})} \right| \\ &= \left| \frac{2e^{-3T} - 3e^{-2T} + 1}{e^{-3T} - e^{-2T} - e^{-T} + 1} \right| \leq 1, 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Ponendo $x = e^{-T}$ con $T \geq 0$ si ottiene $x \in (0, 1)$ e:

$$\frac{2e^{-3T} - 3e^{-2T} + 1}{e^{-3T} - e^{-2T} - e^{-T} + 1} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

La condizione (5) può essere dunque riscritta come:

$$\left| \frac{2x + 1}{x + 1} \right| \leq 1, x \in (0, 1). \quad (6)$$

Per studiare (6), studiamo come varia $\operatorname{sgn} \left(\frac{2x+1}{x+1} \right)$ al variare di $x \in (0, 1)$. Si ottiene che:

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{2x + 1}{x + 1} \right) = 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$$

e dunque in particolare:

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{2x + 1}{x + 1} \right) = 1, \forall x \in (0, 1).$$

Dunque la disequazione (6) diviene:

$$\frac{2x + 1}{x + 1} \leq 1, 1$$

ed è verificata se e solo se

$$x \in (-1, 1/9) \cap (0, 1) \Rightarrow x \in (0, 1/9).$$

Avendo precedentemente posto $x = e^{-T}$, si ottiene:

$$T > \ln 9 \simeq 2,2$$

Quindi per passo di campionamento $T > 2,2$ il controllore $G(z)$ come in (2), verifica le specifiche richieste dall'esercizio.