

Controlli Automatici II a.a. 2005/2006

Esercitazione n° 11

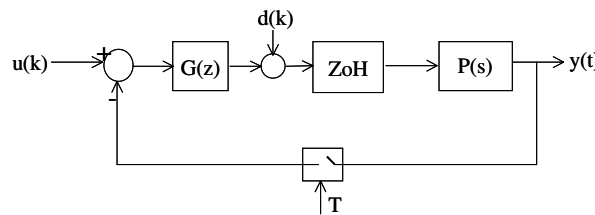
Prof. Maria D. Di Benedetto e Dott. Giordano Pola
Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Centro di Eccellenza DEWS,
Università di L'Aquila, Poggio di Roio, 67040 L'Aquila, Italy,
{pola,dibenede}@ing.univaq.it

March 12, 2006

Data: 15 marzo 2006

1 Esercizi di Riepilogo: Controllo Numerico

Esercizio 1 Dato il seguente schema di controllo numerico:



dove $P(s) = 1/(s + 1)$, si determini un controllore $G(z)$ tale che si abbia:

- (i) errore nullo a regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante;
- (ii) errore nullo a regime permanente per un ingresso $u(k) = \sin(4k)$;
- (iii) risposta piatta nel più breve tempo possibile.

Esercizio 2 Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

dove:

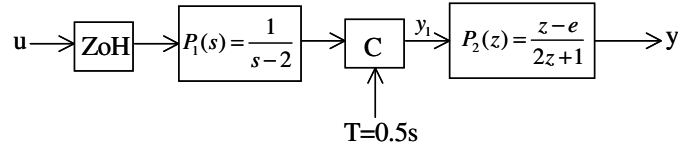
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Trovare la discretizzazione del sistema (1) con passo di campionamento $T > 0$;
- (ii) Trovare la funzione di trasferimento associata al sistema di cui al punto i);

- (iii) Trovare l'espressione di un controllore digitale $G(z)$ tale che si abbia:
- (iii,1) errore nullo a regime permanente per ingresso a rampa;
 - (iii,2) uscita nulla a regime permanente per ingresso $u(k) = (4 \cos 3k - \sin 3k) \delta_{-1}(k)$;
 - (iii,3) risposta piatta nel più breve tempo possibile.

Esercizio 3 Si consideri il processo $P(s) = \frac{1}{s^2-4}$. Si determini uno schema di controllo digitale con $G(z)$ di dimensione uno tale che il sistema a ciclo chiuso abbia due poli reali coincidenti.

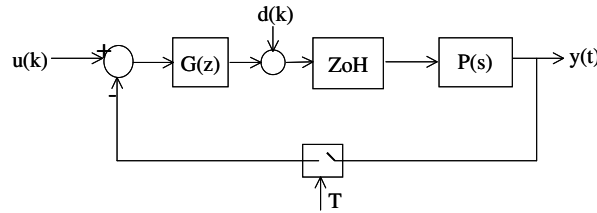
Esercizio 4 Si consideri il seguente sistema:



dove ZoH è un organo di tenuta di ordine 0, C è un campionario con passo di campionamento $T = 0.5s$, e le grandezze y_1 e y sono misurabili. Si progetti un controllore digitale tale che:

- (i) il processo sia asintoticamente stabile;
- (ii) si abbia risposta piatta nel più breve tempo possibile.

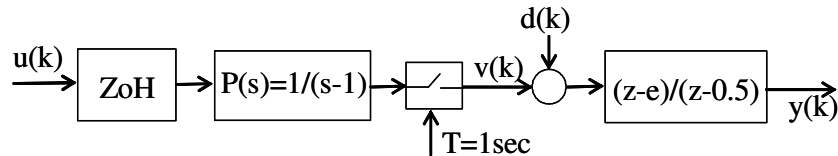
Esercizio 5 Dato il seguente schema di controllo numerico:



dove $P(s) = 1/(s+1)$, si determini un controllore $G(z)$ tale che si abbia:

- (i) errore nullo a regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante;
- (ii) Errore nullo a regime permanente per un ingresso $u(k) = 4 - \sin(4k) + 3 \cos(4k)$;
- (iii) risposta piatta nel più breve tempo possibile.

Esercizio 6 Dato il seguente processo digitale:

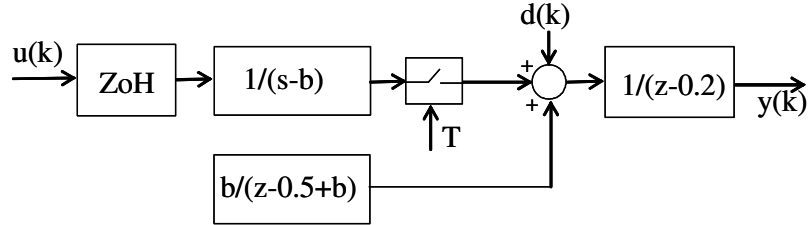


dove le grandezze v e y sono misurabili, si determini uno schema di controllo digitale che soddisfi le seguenti specifiche:

- (i) errore nullo a regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante;
- (ii) risposta piatta nel più breve tempo possibile.

(iii) asintotica stabilità del processo compensato.

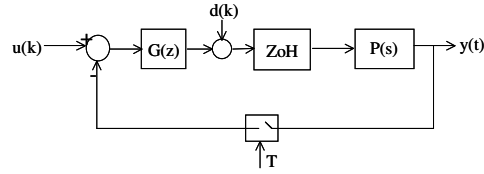
Esercizio 7 Dato il seguente processo digitale:



Si determinino i valori del parametro b ed un controllore digitale di dimensione minima $G(z)$ tale che si abbia:

- (i) errore nullo a regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante;
- (ii) tutti gli autovalori del processo compensato coincidenti in 0.5.

Esercizio 8 Dato il seguente schema di controllo numerico:



dove $P(s) = 1/(s + 2)$, si determini un controllore $G(z)$ tale che si abbia:

- (i) errore nullo a regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante;
- (ii) errore nullo a regime permanente per un ingresso $u(k) = 2 - 3 \sin(2k)$;
- (iii) risposta piatta nel più breve tempo possibile.

Svolgimento Esercizio 1 - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P(z)$ come segue.

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} = (1 - e^{-kT}) \delta_{-1}(kT)$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-e^{-T}}$$

$$P(z) = 1 - \frac{-1(z-1)}{z-e^{-T}} = \frac{\alpha}{z-e^{-T}}$$

dove $\alpha = 1 - e^{-T}$. La specifica i) nota come astatismo rispetto a disturbi costanti, richiede un polo in $z = 1$ a monte del disturbo $d(k)$, mentre la specifica ii) richiede che $|W(e^{j4})| = |W(e^{-j4})| = 0$. Pertanto, essendo

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{N_P(z)N_G(z)}{N_P(z)N_G(z) + D_P(z)D_G(z)}, \\ G(z) &= \frac{N_G(z)}{D_G(z)}, \\ P(z) &= \frac{N_P(z)}{D_P(z)}, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2 - (2\cos 4)z + 1)} R(z),$$

dove $R(z)$ sarà scelto opportunamente per soddisfare la specifica iii). Per verificare la specifica iii) possiamo scegliere:

$$R(z) = (az^2 + bz + c)(z - e^{-T}).$$

Calcolando

$$F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{(az^2 + bz + c)(z - e^{-T})}{(z-1)(z^2 - (2\cos 4)z + 1)} \frac{\alpha}{z - e^{-T}},$$

ed imponendo $N_F(z) + D_F(z) = z^3$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a &= (1 + 2\cos 4)/\alpha, \\ b &= -(1 + 2\cos 4)/\alpha, \\ c &= 1/\alpha. \end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio 2 - Per risolvere il punto i) si osservi che $A = SAS^{-1}$ dove

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui ricordando $A_d(T) = e^{AT} = Se^{\Lambda T}S^{-1}$, di ottiene:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & e^{-T} - 1 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Infine

$$\begin{aligned} B_d &= \int_0^T e^{A(t-T)} B dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}; \\ C_d &= C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per risolvere il punto ii) ricordiamo

$$\begin{aligned} P(z) &= C_d(zI - A_d)^{-1}B_d = \\ &= \frac{1}{(z-1)(z-e^{-T})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-e^{-T} & e^{-T}-1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{T}{(z-1)} \end{aligned}$$

Si osservi che c'è la cancellazione di una dinamica non raggiungibile e non osservabile che comunque è asintoticamente stabile.

Per risolvere il punto iii,1) il controllore $G(z)$ deve avere un polo in $z = 1$, mentre per risolvere anche il punto iii,2) deve essere:

$$G(z) = \frac{(z^2 - 2\cos 3z + 1)}{z-1} R(z).$$

Infine per risolvere la specifica iii,3) si può scegliere:

$$R(z) = \frac{az + b}{z^2 + cz + d},$$

da cui imponendo $D_F(z) + N_F(z) = z^4$ dove:

$$F(z) = G(z)P(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)},$$

si ottiene:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2T(1-\cos 3)} \\ b = \frac{1}{T(\cos 3-1)} \\ c = \frac{1+4\cos 3}{2(1+\cos 3)} \\ d = \frac{1}{1-\cos 3}. \end{cases}$$

Infine il controllore che risolve il punto iii) è dato da:

$$G(z) = \frac{(z^2 - 2\cos 3z + 1) \left(\frac{3}{2(1-\cos 3)}z + \frac{1}{\cos 3-1} \right)}{(z-1) \left(z^2 + \frac{1+4\cos 3}{2(1+\cos 3)}z + \frac{1}{1-\cos 3} \right)}.$$

Svolgimento Esercizio 3 - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P_1(z)$ come segue.

$$\frac{P_1(s)}{s} = \frac{1}{s(s-2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/2}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P_1(s)}{s} \right) \Big|_{t=k/2} = (-1/2 + 1/2e^k) \delta_{-1}(k/2)$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P_1(s)}{s} \right) \Big|_{t=k/2} \right) = \frac{-1/2z}{z-1} + \frac{1/2z}{z-e}$$

$$P_1(z) = \frac{\alpha}{z-e},$$

dove $\alpha = 1/2(e-1)$. L'interconnessione dei processi $P_1(z)$ e $P_2(z)$ causa una cancellazione di una dinamica instabile $z = e$ che pertanto non verifica la condizione *i*). Per questa ragione conviene fare un primo feedback su $P_1(z)$ che è lecito visto che y_1 è misurabile. Dunque si ottiene:

$$W_1(z) = \frac{kP_1(z)}{1+kP_1(z)} = \frac{\alpha k}{z-e+\alpha k}.$$

Inoltre conviene scegliere k in modo da avere $z - e + \alpha k = z - 1$, cioè

$$k = \frac{e - 1}{\alpha} = \frac{e - 1}{1/2(e - 1)} = 2,$$

in modo che possiamo ottenere un controllore per avere risposta piatta in tempo minimo. Il processo ottenuto è

$$W_1(z) \frac{z - e}{2z + 1} = \frac{(e - 1)(z - e)}{(z - 1)(2z + 1)},$$

da cui scegliendo un controllore

$$G(z) = \frac{b(2z + 1)}{z + a}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} N_F(z) + D_F(z) &= (z - 1)(z + a) + b(e - 1)(z - e) \\ &= z^2 + (a - 1 + b(e - 1))z + (-a - e(e - 1)b) = z^2 \end{aligned}$$

da cui infine $a = e/(e - 1)$, $b = -1/(e - 1)^2$.

Svolgimento Esercizio 4 - L'espressione della $P(z)$ è della forma:

$$P(z) = \frac{\alpha(T)z + \beta(T)}{(z - e^{-2T})(z - e^{2T})},$$

per qualche coefficiente $\alpha(T)$ e $\beta(T)$. Sia

$$G(z) = \frac{(z - e^{-2T})a}{(z - b)}$$

ed imponiamo $N_F(z) + D_F(z) = z^2$ con

$$G(z) = \frac{\alpha(T)az + \beta(T)a}{(z - b)(z - e^{2T})}$$

da cui

$$\begin{cases} -b - e^{2T} + \alpha(T)a = 0 \\ \beta(T)a + be^{2T} = 0. \end{cases}$$

ed infine:

$$a = \frac{e^{2(2T)}}{T\beta + T\alpha e^{2T}}, b = -\beta \frac{e^{2T}}{\beta + \alpha e^{2T}}$$

Svolgimento Esercizio 5 - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P(z)$ come segue.

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} = (1 - e^{-kT}) \delta_{-1}(kT)$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-e^{-T}}$$

$$P(z) = 1 - \frac{-1(z-1)}{z-e^{-T}} = \frac{\alpha}{z-e^{-T}}$$

dove $\alpha = 1 - e^{-T}$. La specifica i) nota come astatismo rispetto a disturbi costanti, richiede un polo in $z = 1$ a monte del disturbo $d(k)$, mentre la specifica ii) richiede che $|W(e^{j4})| = |W(e^{-j4})| = 0$

essendo già presente un polo nell'origine che ponga a zero l'uscita relativa all'ingresso $u(k) = 4$. Pertanto, essendo

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{N_P(z)N_G(z)}{N_P(z)N_G(z) + D_P(z)D_G(z)}, \\ G(z) &= \frac{N_G(z)}{D_G(z)}, \\ P(z) &= \frac{N_P(z)}{D_P(z)}, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2 - (2\cos 4)z + 1)} R(z),$$

dove $R(z)$ sarà scelto opportunamente per soddisfare la specifica iii). Per verificare la specifica iii) possiamo scegliere:

$$R(z) = (az^2 + bz + c)(z - e^{-T}).$$

Calcolando

$$F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{(az^2 + bz + c)(z - e^{-T})}{(z-1)(z^2 - (2\cos 4)z + 1)} \frac{\alpha}{z - e^{-T}},$$

ed imponendo $N_F(z) + D_F(z) = z^3$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a &= (1 + 2\cos 4)/\alpha, \\ b &= -(1 + 2\cos 4)/\alpha, \\ c &= 1/\alpha. \end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio 6 - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P(z)$ come segue.

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{s} &= \frac{1}{s(s-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}, \\ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=k} &= (-1 + e^k) \delta_{-1}(k), \\ \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=k} \right) &= -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e}, \\ P(z) &= \frac{e-1}{z-e}. \end{aligned}$$

Si noti che c'è cancellazione di una dinamica instabile $z = e$, dunque affinché sia verificata la specifica iii) bisogna fare un primo feedback da $v(k)$ a $u(k)$, con guadagno k sul ramo diretto, in modo tale che:

$$k(e-1) + z - e = z - 1,$$

da cui $k = 1$. Si noti che in questo modo la specifica i) è già verificata essendo presente un polo in $z = 1$ davanti al disturbo.

Per quanto riguarda la specifica ii) si consideri il processo completo:

$$P(z) = \frac{(e-1)(z-e)}{(z-1)(z-0.5)},$$

Si scelga un controllore:

$$G(z) = \frac{a(z-0.5)}{z+b}.$$

Calcolando la funzione di trasferimento $F(z)$ sul ramo diretto:

$$F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{a(e-1)(z-e)}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{a(e-1)z - e(e-1)a}{z^2 + (b-1)z - b},$$

ed imponendo $N_F(z) + D_F(z) = z^2$, si ottiene:

$$\begin{cases} b-1+a(e-1) = 0 \\ -ea(e-1)-b = 0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene infine:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{(e-1)^2} \\ b = \frac{e}{e-1}. \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio 7 - La trasformata Zeta del processo $P_1(s) = 1/(s-b)$ è

$$P_1(z) = \frac{e^{bT}-1}{b} \frac{1}{(z-e^{bT})}.$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento ingresso-uscita:

$$P(z) = \frac{e^{bT}-1}{b} \frac{1}{(z-e^{bT})(z-0.2)}.$$

Si osservi che la dinamica del processo $b/(z-0.5+b)$ è non raggiungibile e pertanto per verificare la specifica ii) deve essere necessariamente $b=0$. Si osservi che per $b=0$ l'uscita del processo $b/(z-0.5+b)$ è identicamente nulla. D'altro canto la dinamica interna del processo ha un autovalore in 0.5 che verifica direttamente la specifica ii). Inoltre per $b=0$ si ottiene che

$$P(z) = \frac{T}{(z-1)(z-0.2)}$$

ed dunque $P(z)$ ha direttamente un polo in $z=1$ e pertanto la specifica i) è verificata. Per sintetizzare un controllore $G(z)$ che assegni gli autovalori (raggiungibili e osservabili) in 0.5 si scelga:

$$G(z) = \frac{\alpha(z-0.2)}{z+\beta}.$$

La funzione di trasferimento a ciclo aperto ottenuta è:

$$F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = G(z)P(z) = \frac{\alpha T}{(z-1)(z+\beta)};$$

da cui, imponendo $N_F(z) + D_F(z) = (z-0.5)^2$, si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha T - \beta = 1/4 \\ \beta - 1 = -1 \end{cases}$$

da cui si ottiene $\alpha = 1/4T$ e $\beta = 0$.

Svolgimento Esercizio 8 - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P(z)$ come segue.

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} = (1/2 - 1/2e^{-2kT}) \delta_{-1}(kT)$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) = 1/2 \frac{z}{z-1} - 1/2 \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

$$P(z) = 1/2 - \frac{1/2(z-1)}{z-e^{-2T}} = \frac{\alpha}{z-e^{-2T}}$$

dove $\alpha = 1/2(1 - e^{-2T})$. La specifica i) nota come astatismo rispetto a disturbi costanti, richiede un polo in $z = 1$ a monte del disturbo $d(k)$, mentre la specifica ii) richiede che $|W(e^{j2})| = |W(e^{-j2})| = 0$ essendo già presente un polo nell'origine che ponga a zero l'uscita relativa all'ingresso $u(k) = 2$. Pertanto, essendo

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{N_P(z)N_G(z)}{N_P(z)N_G(z) + D_P(z)D_G(z)}, \\ G(z) &= \frac{N_G(z)}{D_G(z)}, \\ P(z) &= \frac{N_P(z)}{D_P(z)}, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2 - (2\cos 2)z + 1)} R(z),$$

dove $R(z)$ sarà scelto opportunamente per soddisfare la specifica iii). Per verificare la specifica iii) possiamo scegliere:

$$R(z) = (az^2 + bz + c)(z - e^{-2T}).$$

Calcolando

$$F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{(az^2 + bz + c)(z - e^{-2T})}{(z-1)(z^2 - (2\cos 2)z + 1)} \frac{\alpha}{z - e^{-2T}},$$

ed imponendo $N_F(z) + D_F(z) = z^3$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a &= 1/\alpha (1 + 2\cos 2) \\ b &= 1/\alpha (-2\cos 2 - 1), \\ c &= 1/\alpha. \end{aligned}$$