

Controlli Automatici II a.a. 2005/2006

Esercitazione n° 9

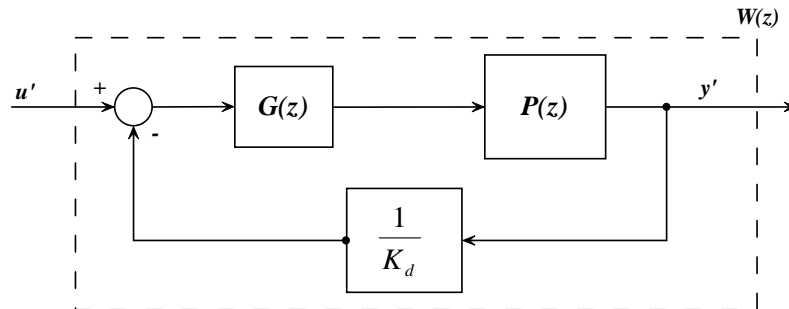
Prof. Maria D. Di Benedetto e Dott. Giordano Pola
Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Centro di Eccellenza DEWS,
Università di L'Aquila, Poggio di Roio, 67040 L'Aquila, Italy,
{pola,dibenede}@ing.univaq.it

July 18, 2006

Data: 22 febbraio 2006

1 Sintesi di Sistemi a Tempo di Risposta Finito

Si consideri il processo in figura:



e si ponga:

$$F(z) = \frac{1}{K_d} \cdot G(z) \cdot P(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)}$$

Il processo $W(z)$ si dice *a tempo di risposta finito* $l \in \mathbb{N}$ se, eccitato con ingresso a gradino $u(k) = \delta_{-1}(k)$, presenta errore nullo per ogni $k \geq l$. Il seguente risultato fornisce una condizione necessaria e sufficiente che caratterizza i sistemi a tempo di risposta finito.

Teorema 1: *Il processo $W(z)$ ha tempo di risposta finito $l \in \mathbb{N}$ se e solo se:*

- $D_F(z)$ ha radice in $z = 1$;
- $N_F(z) + D_F(z) = z^l$ con $l = gr(D_F(z))$.

Esercizio 1 Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Trovare la discretizzazione del sistema (1) con passo di campionamento $T > 0$;

(ii) Trovare la funzione di trasferimento associata al sistema di cui al punto i);

(iii) Trovare l'espressione di un controllore digitale $G(z)$ tale che si abbia:

iii.1) errore nullo a regime permanente per ingresso a rampa;

iii.2) uscita nulla a regime permanente per ingresso $u(k) = (4 \cos 3k - \sin 3k) \delta_{-1}(k)$;

iii.3) risposta in tempo finito nel più breve tempo possibile.

Svolgimento - Per risolvere il punto i) si osservi che $A = S\Lambda S^{-1}$ dove

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui ricordando $A_d(T) = e^{AT} = Se^{\Lambda T}S^{-1}$, si ottiene:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & e^{-T} - 1 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Infine

$$B_d = \int_0^T e^{A(t-T)} B dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}; \\ C_d = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per risolvere il punto ii) ricordiamo

$$P(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d = \\ = \frac{1}{(z-1)(z-e^{-T})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-e^{-T} & e^{-T}-1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \frac{T}{(z-1)}$$

Si osservi che c'è la cancellazione di una dinamica non raggiungibile e non osservabile che comunque è asintoticamente stabile.

Per risolvere il punto iii,1) il controllore $G(z)$ deve avere un polo in $z = 1$, mentre per risolvere anche il punto iii,2) deve essere:

$$G(z) = \frac{(z^2 - 2 \cos 3z + 1)}{z-1} R(z).$$

Infine per risolvere la specifica iii,3) si può scegliere:

$$R(z) = \frac{az+b}{z^2+cz+d},$$

da cui imponendo $D_F(z) + N_F(z) = z^4$ dove:

$$F(z) = G(z)P(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)},$$

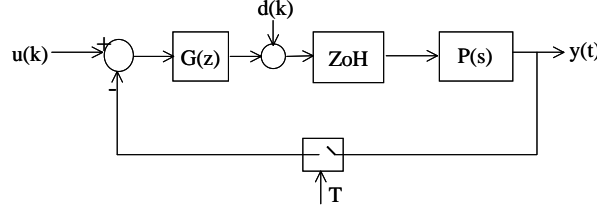
si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{2T(1-\cos 3)} \\ b = \frac{1}{T(\cos 3-1)} \\ c = \frac{1+4\cos 3}{2(1+\cos 3)} \\ d = \frac{1}{1-\cos 3}. \end{array} \right.$$

Infine il controllore che risolve il punto iii) è dato da:

$$G(z) = \frac{(z^2 - 2\cos 3z + 1) \left(\frac{3}{2(1-\cos 3)}z + \frac{1}{\cos 3-1} \right)}{(z-1) \left(z^2 + \frac{1+4\cos 3}{2(1+\cos 3)}z + \frac{1}{1-\cos 3} \right)}.$$

Esercizio 2 Dato il seguente schema di controllo numerico:



dove $P(s) = 1/(s + 1)$, si determini un controllore $G(z)$ tale che si abbia:

- (i) errore nullo a regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante;
- (ii) errore nullo a regime permanente per un ingresso $u(k) = \sin(4k)$;
- (iii) risposta in tempo finito nel più breve tempo possibile.

Svolgimento - Calcoliamo innanzitutto la funzione $P(z)$ come segue.

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} = (1 - e^{-kT}) \delta_{-1}(kT)$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-e^{-T}}$$

$$P(z) = 1 - \frac{-1(z-1)}{z-e^{-T}} = \frac{\alpha}{z-e^{-T}}$$

dove $\alpha = 1 - e^{-T}$. La specifica i) nota come astatismo rispetto a disturbi costanti, richiede un polo in $z = 1$ a monte del disturbo $d(k)$, mentre la specifica ii) richiede che $|W(e^{j4})| = |W(e^{-j4})| = 0$. Pertanto, essendo

$$W(z) = \frac{N_P(z)N_G(z)}{N_P(z)N_G(z) + D_P(z)D_G(z)},$$

$$G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)},$$

$$P(z) = \frac{N_P(z)}{D_P(z)},$$

si ottiene:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2 - (2 \cos 4)z + 1)} R(z),$$

dove $R(z)$ sarà scelto opportunamente per soddisfare la specifica iii).

Per verificare la specifica iii) possiamo scegliere:

$$R(z) = (az^2 + bz + c)(z - e^{-T}).$$

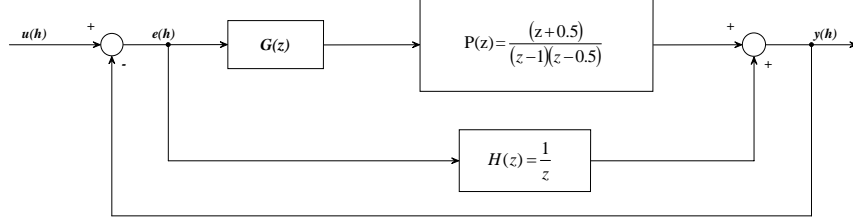
Calcolando

$$F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{(az^2 + bz + c)(z - e^{-T})}{(z-1)(z^2 - (2 \cos 4)z + 1)} \frac{\alpha}{z - e^{-T}},$$

ed imponendo $N_F(z) + D_F(z) = z^3$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a &= (1 + 2 \cos 4)/\alpha, \\ b &= -(1 + 2 \cos 4)/\alpha, \\ c &= 1/\alpha. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Si consideri il seguente schema di controllo tempo-discreto:



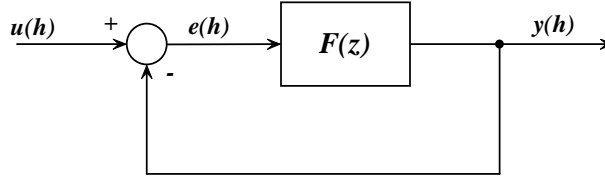
Determinare il controllore $G(z)$ affinché le seguenti specifiche siano verificate:

- (i) eccitando il sistema con un ingresso a gradino $u(h) = \delta_{-1}(h)$, l'errore $e(h) = 0$, $\forall h \geq l$, con l più piccolo possibile;
- (ii) l'errore $e(h)$ in regime permanente, in corrispondenza all'ingresso $u(h) = \sin(4h)$, sia nullo;
- (iii) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

Svolgimento - Poniamo:

$$F(z) = P(z)G(z) + H(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)},$$

dove $N_F(z)$ e $D_F(z)$ sono, rispettivamente il numeratore ed il denominatore di $F(z)$. Lo schema di controllo può essere riformulato come segue :



Calcoliamo la funzione di trasferimento dell'errore:

$$W_e(z) = \frac{e(z)}{u(z)} = \frac{1}{1 + F(z)} = \frac{D_F(z)}{N_F(z) + D_F(z)}.$$

Per soddisfare la seconda specifica, dobbiamo imporre che:

$$|W_e(e^{j4})| = |W_e(e^{-j4})| = 0;$$

dunque $D_F(z)$ deve annullarsi in e^{j4} e in e^{-j4} e quindi contenere il termine :

$$(z - e^{j4})(z - e^{-j4}) = z^2 - 2\cos(4) \cdot z + 1 \simeq z^2 + 1.31z + 1.$$

Per rispettare la prima specifica il polinomio $D_F(z)$ deve avere radice in $z = 1$ e

$$N_F(z) + D_F(z) = z^l, \quad (2)$$

con $l = gr(D_F(z))$.

Analizziamo singolarmente queste due condizioni :

La prima condizione è già verificata perché:

$$\begin{aligned} F(z) &= P(z)G(z) + H(z) = \frac{N_P(z)}{D_P(z)} \cdot \frac{N_G(z)}{D_G(z)} + \frac{1}{z} \\ &= \frac{z \cdot N_P(z) \cdot N_G(z) + D_P(z) \cdot D_G(z)}{D_P(z) \cdot D_G(z) \cdot z} \end{aligned}$$

e $D_P(z)$ contiene il fattore $(z - 1)$. Per quanto riguarda la condizione (2):

$$N_F(z) + D_F(z) = z \cdot N_P(z) \cdot N_G(z) + (z + 1) \cdot D_P(z) \cdot D_G(z) = z^l \quad (3)$$

con l grado di $D_F(z)$. A questo punto bisogna progettare un controllore $G(z)$ che rispetti sia la specifica al punto (ii) che la condizione (2). Scegliamo innanzitutto:

$$G(z) = \frac{(z - 0.5)}{(z + 0.5)(z^2 + 1.31z + 1)} \cdot R(z)$$

in modo che cancelliamo le dinamiche stabili del processo e verifichiamo la specifica al punto (ii). Supponiamo a questo punto

$$R(z) = az^2 + bz + c,$$

ed imponiamo la condizione (2):

$$\begin{aligned} F(z) &= P(z)G(z) + H(z) \\ &= \frac{(z + 0.5)}{(z - 0.5)(z - 1)} \frac{(z - 0.5)}{(z + 0.5)} \frac{az^2 + bz + c}{(z^2 + 1.31z + 1)} + \frac{1}{z} = \\ &= \frac{cz - 0.31z + 0.31z^2 + z^3 + az^3 + bz^2 - 1}{z(z - 1)(z^2 + 1.31z + 1)}. \end{aligned}$$

e dunque:

$$cz - 0.31z + 0.31z^2 + z^3 + az^3 + bz^2 - 1 + z(z - 1)(z^2 + 1.31z + 1) = z^4.$$

Dunque non è possibile questa identità polinomiale. Scegliamo adesso:

$$R(s) = \frac{bz^3 + cz^2 + dz + e}{z + a}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z - 0.5)(bz^3 + cz^2 + dz + e)}{(z + 0.5)(z^2 + 1.31z + 1)(z + a)} \frac{(z + 0.5)}{(z - 0.5)(z - 1)} + \frac{1}{z} = \\ &= \frac{0.31z^3 - z - 0.31az - 0.31z^2 - a + z^4 + 0.31az^2 + az^3 + ze + bz^4 + cz^3 + dz^2}{z(a + z)(z - 1)(1.31z + z^2 + 1)} \end{aligned}$$

Imponendo la condizione (2) con $l = 5$ si ottiene:

$$\begin{aligned} &0.31z^3 - z - 0.31az - 0.31z^2 - a + z^4 + 0.31az^2 \\ &+ az^3 + ze + bz^4 + cz^3 + dz^2 + 0.31z^4 - z^2 - 0.31z^3 \\ &- az + z^5 - 0.31az^2 + 0.31az^3 + az^4 = z^5 \end{aligned}$$

Da cui per identità polinomiale, si ottiene:

$$\begin{cases} 1.31 + a + b = 0 \\ 1.31a + c = 0 \\ -1.31 + d = 0 \\ e - 1 - 1.31a = 0 \\ -a = 0 \end{cases}$$

e quindi :

$$a = 0, b = -1.31, c = 0, d = 1.31, e = 1.$$

L'espressione di un controllore che verifica le specifiche (i) ed (ii) è dunque data da:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{(z - 0.5)(bz^3 + cz^2 + dz + e)}{(z + 0.5)(z^2 + 1.31z + 1)(z + a)} \\ &= \frac{(z - 0.5)(-1.31z^3 + 1.31z + 1)}{(z + 0.5)(z^2 + 1.31z + 1)z} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda lo studio della stabilità, si osservi che, se un polo di $G(z)$ cancella uno zero di $P(z)$, dà luogo a una dinamica non raggiungibile e se uno zero di $G(z)$ cancella un polo di $P(z)$, dà luogo a una dinamica non osservabile. Nel nostro caso abbiamo la prima di queste situazioni e

$$gr(D_F(z)) = l = 5.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{F(z)}{1 + F(z)} = \frac{N_F(z)}{z^5} = \\ &= \frac{(z + 1)(z - 1)(-1.31z^3 + 1.31z + 1)z}{z^5} \\ &= \frac{(z + 1)(z - 1)(-1.31z^3 + 1.31z + 1)}{z^4} \end{aligned}$$

Da questo si evince che il sistema è caratterizzato da 7 dinamiche scalari di cui :

- una dinamica non raggiungibile relativa all'autovalore $z = 0.5$ che è asintoticamente stabile;
- due dinamiche non osservabili relative agli autovalori $z = -0.5$ e $z = 0$ che sono asintoticamente stabili;
- quattro dinamiche raggiungibili e osservabili relative all'autovalore $z = 0$ che sono asintoticamente stabili.

Quindi il sistema è asintoticamente stabile. Come verifica poniamo in ingresso al nostro sistema una funzione di ingresso a gradino di ampiezza unitaria e analizziamo la risposta a regime permanente che otteniamo.

La trasformata Zeta del gradino unitario $u(h) = \delta_{-1}(h)$ è

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

e dunque l'uscita $Y(z)$ sarà data da:

$$\begin{aligned} Y(z) &= W(z) \cdot U(z) \\ &= \frac{(z + 1)(z^2 + 1.31z + 1)(z - 1)}{z^4} \frac{z}{z - 1} \\ &= \frac{(z + 1)(1.31z + z^2 + 1)}{z^3} \end{aligned}$$

Fattorizzandola mediante il metodo delle frazioni parziali si ottiene:

$$Y(z) = \frac{2.31}{z} + \frac{2.31}{z^2} + \frac{1}{z^3} + 1$$

Utilizzando il Teorema del Valore Iniziale:

$$\lim_{k \rightarrow 0} y(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$$

ricordando che:

$$\mathcal{Z}(y(k+i)) = z^i \cdot \left(\mathcal{Z}(y(k)) - \sum_{K=0}^{i-1} y(k) \cdot z^{-k} \right)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} y(k) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^0 \cdot Y(z) = 1 \\ \lim_{k \rightarrow 0} y(k+1) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^1 \cdot (Y(z) - 1) = R_{11} \\ \lim_{k \rightarrow 0} y(k+2) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \cdot (Y(z) - \frac{R_{11}}{z} - 1) = R_{12} \\ \lim_{k \rightarrow 0} y(k+3) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \cdot (Y(z) - \frac{R_{11}}{z} - 1 - \frac{R_{12}}{z^2}) = R_{13} \\ \lim_{k \rightarrow 0} y(k+4) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 \cdot (Y(z) - \frac{R_{11}}{z} - 1 - \frac{R_{12}}{z^2} - \frac{R_{13}}{z^3}) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow 0} y(k+5) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^5 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$