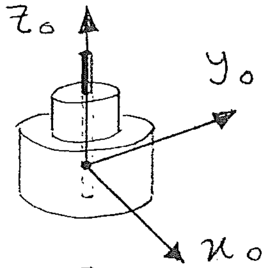
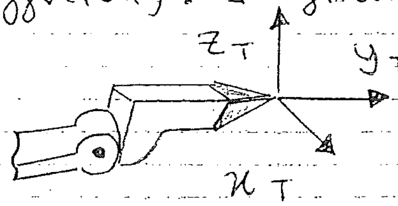
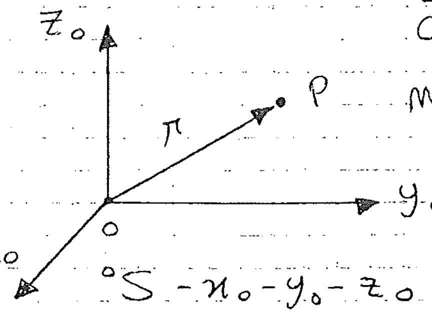
CINEMATICA: L'esigenza è quella di esprimere la posizione di un punto materiale nello spazio attraverso una terna di coordinate $\Rightarrow$ si vuole determinare univocamente la posizione mediante un sistema di riferimento fissato. Generalmente



si sceglie il sistema di riferimento in modo che il piantone principale del robot coincida con l'asse z_0 (nel KUKA ad esempio il riferimento è scelto in questo modo e l'asse x_0 è scelto in modo da bisecare l'angolo di lavoro visto che il piantone principale ruota su un settore circolare e non a 360°, in genere non $\exists$ vincoli nella scelta di x_0 ed y_0). Il sistema di coordinate fino descritto è detto WORLD FRAME (cioè sistema o cornice relativa al mondo: è inerziale nella rob. industriale mentre può essere non inerziale nella robotica avanzata) ed è una terna rispetto alla quale vengono specificate le coordinate dei punti dello spazio. $\exists$ altri frames diversi come il TOOL FRAME (o task frame relativo all'end effector). I frames sono diversi dallo WORK SPACE che è insieme dei punti raggiungibili.



La rappresentazione di un punto P nello spazio si ottiene mediante un segmento $\overrightarrow{OP}$ che individua il punto rispetto al sistema di riferimento ^0S $\Rightarrow$ P è definito dalle coordinate del segmento $\overrightarrow{OP}$ nello spazio $\Rightarrow$ cioè da una combinazione lineare dei tre versori x_0, y_0 e z_0 $\Rightarrow$ è per cui definito da una terna di numeri:



$^0S - x_0 - y_0 - z_0$

$$\overrightarrow{OP} = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ è una combinazione lineare di tre vettori.

Affinché la rappresentazione sia unica i tre vettori x_0, y_0 ed z_0 (versori) devono essere $\perp$ (ma non necessariamente ortogonali). Per semplicità si prenderanno ortogonali. Inoltre per semplicità di notazione si tralascia il simbolo di vettore: $r = \overrightarrow{OP}$.

<u>NB</u>: Notazione → ${}^0r_x$: indica la coordinata della componente x del vettore r nel sistema di riferimento ${}^0S$.
In tal modo r può essere espresso come:

$$r = {}^0r_x\, x_0 + {}^0r_y\, y_0 + {}^0r_z\, z_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ {}^0r_z \end{bmatrix}$$

Se non viene specificato altro allora $r \in E^3$ dove E^3 è lo spazio euclideo. Inoltre:

$$r = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}}\, {}^0r \quad \text{con} \quad {}^0r = \begin{bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ {}^0r_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow {}^0r \text{ è un vettore col.}$$

<u>OSS</u>: Questo <u>non</u> è un vettore riga ma è solo una simbologia comoda per esprimere r. È una collezione di versori che vivono in E^3.

r: vettore dello spazio euclideo che unisce il punto P all'origine O del sistema di riferimento.

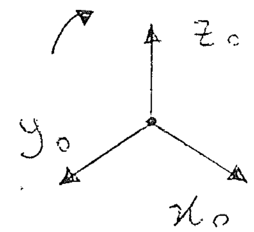
$x_0 \in E^3$, $y_0 \in E^3$ e $z_0 \in E^3$ sono dei versori.

${}^0r$: è la rappresentazione di $r \in E^3$ nelle coordinate del sistema di riferimento ${}^0S$, ${}^0r \in \mathbb{R}^3$

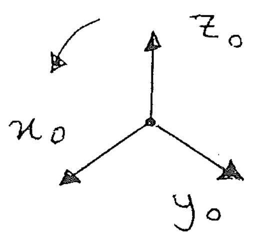
<u>OSS</u>: ${}^0x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^0y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^0z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono terne in $\mathbb{R}^3$ (vettori colonna), mentre x_0, y_0 e z_0 sono versori $\in E^3$.

D'ora in avanti considereremo sempre sistemi di riferimento costituiti da terne destrorse di assi che siano ortonormali, dette anche terne levogire ortonormali (in questo modo otteniamo delle semplificazioni nei calcoli):

Una Terna destrorsa è una Terna per la quale $\boxed{z_0 = x_0 \times y_0}$ mentre per la Terna sinistrorsa: $z_0 = -x_0 \times y_0$



TERNA SINISTRORSA



TERNA DESTRORSA

L'Hp di Terna ortonormale implica due proprietà che devono essere soddisfatte dalla Terna:

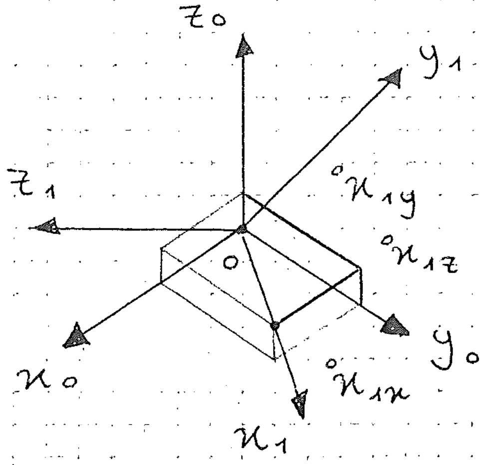
NORMALITÀ $\Rightarrow \begin{cases} \|x_0\| = 1 \\ \|y_0\| = 1 \\ \|z_0\| = 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x_0 \cdot x_0 = 1 \\ y_0 \cdot y_0 = 1 \\ z_0 \cdot z_0 = 1 \end{cases}$

ORTOGONALITÀ $\Rightarrow \begin{cases} x_0 \cdot y_0 = 0 \\ y_0 \cdot z_0 = 0 \\ z_0 \cdot x_0 = 0 \end{cases}$

Si consideriamo due sistemi di riferimento ${}^0S$ ed ${}^1S$ con le origini degli assi coincidenti, ma ruotato uno rispetto all'altro (entrambi i sistemi di riferimento sono destrorsi ed ortonormali). Si vuole rappresentare lo stesso segmento $r = \overrightarrow{OP}$ in ${}^0S$ ed in ${}^1S$ e capire come sono legate le coordinate nei due sistemi di riferimento. Quindi $r \in E^3$ si può scrivere in due modi:

$r = [x_0\; y_0\; z_0]\,{}^0r = [x_1\; y_1\; z_1]\,{}^1r$

sia come combinazione lineare dei versori di ${}^0S$ sia dei versori ${}^1S$. Un tipico problema di cinematica è: note le coordinate nel riferimento ${}^0S$ cioè le ${}^0r$, come posso ricavare quelle in ${}^1S$ cioè ${}^1r$? (Ad es cambio di coordinate da World frame a Tool frame).



${}^0S - x_0 - y_0 - z_0$

${}^1S - x_1 - y_1 - z_1$

Per fare questo è necessario sapere come si esprimono i versori x_1, y_1, z_1 di ${}^1S$ nel sistema ${}^0S$. Allora la ${}^0x_1 \in \mathbb{R}^3$ è una Terna di numeri che rappresenta le coordinate di x_1 nel sistema ^0S. Abbiamo quindi che:

$$^0x_1 = \begin{bmatrix} ^0x_{1x} \\ ^0x_{1y} \\ ^0x_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

Le componenti di $^0x_1$ rappresentano i coseni direttori di x_1 nel riferimento ^0S. Infatti siccome sia x_1 sia x_0 hanno norma unitaria $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \cdot x_0 = \|x_1\| \|x_0\| \cos\theta = \cos\theta$, dove θ è l'angolo tra x_1 ed x_0. Conosco quindi l'orientamento di ^1S rispetto ad ^0S quando conosco le coordinate dei versori di ^1S rispetto ad ^0S. Per gli altri versori analogamente:

$$^0y_1 = \begin{bmatrix} ^0y_{1x} \\ ^0y_{1y} \\ ^0y_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \cdot x_0 \\ y_1 \cdot y_0 \\ y_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \quad e \quad ^0z_1 = \begin{bmatrix} ^0z_{1x} \\ ^0z_{1y} \\ ^0z_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \cdot x_0 \\ z_1 \cdot y_0 \\ z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

Il terzo versore si può anche calcolare sfruttando l'identità vettoriale valida per la terna destrorsa. Note queste coordinate posso rappresentare lo stesso vettore sia in ^0S sia in ^1S. Rappresentiamo allora r in ^1S:

$$r = {}^1r_x x_1 + {}^1r_y y_1 + {}^1r_z z_1 = [x_1\ y_1\ z_1]\ ^1r$$

abbiamo visto che i versori di ^1S si possono esprimere in ^0S:

$$x_1 = {}^0x_{1x} x_0 + {}^0x_{1y} y_0 + {}^0x_{1z} z_0 = [x_0\ y_0\ z_0]\ ^0x_1$$

$$y_1 = [x_0\ y_0\ z_0]\ ^0y_1 \quad e \quad z_1 = [x_0\ y_0\ z_0]\ ^0z_1$$

quindi i versori di ^1S in funzione dei versori di ^0S sono:

$$[x_1\ y_1\ z_1] = [x_0\ y_0\ z_0] \underbrace{[^0x_1\ ^0y_1\ ^0z_1]}$$

coordinate

Matrice $\in \mathbb{R}^{3\times3}$ che raccoglie le rappresentazioni dei versori di ^1S rispetto al riferimento ^0S e viene indicata:

$$\boxed{^0R_1 = [^0x_1\ ^0y_1\ ^0z_1]}$$

MATRICE di ROTAZIONE: fornisce delle informazioni sull'orientamento del sistema ^1S rispetto al sistema ^0S (si può rappresentare l'orientamento di corpi rigidi). Visto che ${}^0R_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ⇒ i nove numeri che la compongono sono i coseni direttori degli assi di ${}^1S$ rispetto ad ${}^0S$:

$$ {}^0R_1 = \begin{bmatrix} x_1\cdot x_0 & y_1\cdot x_0 & z_1\cdot x_0 \\ x_1\cdot y_0 & y_1\cdot y_0 & z_1\cdot y_0 \\ x_1\cdot z_0 & y_1\cdot z_0 & z_1\cdot z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} $$

→ { prodotto scalare simbolico

Adesso mettendo insieme quanto trovato:

$$ \begin{cases} r = [x_0\ y_0\ z_0]\ {}^0r & \oplus \\ r = [x_1\ y_1\ z_1]\ {}^1r \\ [x_1\ y_1\ z_1] = [x_0\ y_0\ z_0]\ {}^0R_1 \end{cases} \Rightarrow \overset{\odot}{r} = [x_0\ y_0\ z_0]\ {}^0R_1\ {}^1r $$

confrontando la ⊕ con la ⊙ otteniamo che:

$\boxed{{}^0r = {}^0R_1\ {}^1r}$ La matrice ${}^0R_1$ è una matrice di cambio delle coordinate che può essere così utilizzata:

$$ {}^0x_1 = {}^0R_1\ {}^1x_1 = [{}^0x_1\ {}^0y_1\ {}^0z_1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^0x_1 $$

<u>OSS</u>: ${}^1x_1 = {}^0x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ cioè le coordinate dell'asse x_1 (o x_0) nel riferimento ${}^1S$ (o ${}^0S$) si possono esprimere facilmente. In modo analogo:

$$ {}^0y_1 = {}^0R_1\ {}^1y_1 = [{}^0x_1\ {}^0y_1\ {}^0z_1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^0y_1 $$

$$ {}^0z_1 = {}^0R_1\ {}^1z_1 = [{}^0x_1\ {}^0y_1\ {}^0z_1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0z_1 $$

La matrice ${}^0R_1$ consente di trasformare non solo gli assi, ma $\forall$ vettore. La trasformazione di coordinate inversa (una volta dimostrata la invertibilità della ${}^0R_1$) si ottiene nel seguente modo: $\boxed{{}^1r = {}^0R_1^{-1}\ {}^0r}$

<u>OSS</u>: Visto che ${}^1r$ può essere espresso:

$$ {}^1r = \underbrace{{}^1R_0}\ {}^0r = \underbrace{[{}^1x_0\ {}^1y_0\ {}^1z_0]}\ {}^0r \Rightarrow $$

Coordinate dei versori di ${}^0S$ rispetto al riferimento ${}^1S$.

per l'unicità della rappresentazione di uno stesso vettore all'interno di uno stesso sistema di riferimento, deve necessariamente risultare che:

$\boxed{{}^0R_1^{-1} = {}^1R_0}$ La matrice che contiene le coordinate del riferimento ${}^0S$ rispetto al riferimento ${}^1S$ è l'inversa della matrice che contiene le coordinate di ${}^1S$ rispetto ad ${}^0S$. OSS: Vedremo di seguito che per calcolare la trasformazione inversa di coordinate non sarà necessario calcolare l'inversa di ${}^0R_1$. Passiamo ora ad esaminare le proprietà delle quali gode la matrice di rotazione partendo dalle seguenti osservazioni:

1) $(a+b)\cdot c = (a\cdot c) + (b \cdot c)$

2) $a\cdot b = ({}^0a_x x_0 + {}^0a_y y_0 + {}^0a_z z_0)\cdot({}^0b_x x_0 + {}^0b_y y_0 + {}^0b_z z_0)$

Se ora sfruttiamo le proprietà di ortogonalità e di normalità del riferimento scelto, abbiamo che:

$$x_0\cdot y_0 = x_0 \cdot z_0 = z_0 \cdot y_0 = 0$$
$$x_0\cdot x_0 = y_0\cdot y_0 = z_0 \cdot z_0 = 1 \text{ con } \sqrt{x_0\cdot x_0} = \|x_0\| = 1 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ il prodotto scalare tra due vettori si può esprimere:

$$a\cdot b = {}^0a_x\,{}^0b_x + {}^0a_y\,{}^0b_y + {}^0a_z\,{}^0b_z = {}^0a^T\cdot{}^0b \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{a\cdot b = {}^0a^T\cdot{}^0b}$ cioè in un sistema ortonormale, il prodotto scalare tra due vettori è esprimibile come prodotto riga per colonna dei vettori colonna che contengono le coordinate di a e b nel sistema di riferimento ${}^0S$. Allo stesso modo se consideriamo un altro sistema di riferimento ${}^1S$ ortonormale deve risultare che $a\cdot b = {}^1a^T\cdot{}^1b \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{{}^1a^T\cdot{}^1b = {}^0a^T\cdot{}^0b}$ OSS: Questa proprietà non vale per il prodotto vettoriale.

La condizione trovata, implica che, date le rappresentazioni ${}^0r$ ed ${}^1r$ dello stesso vettore r in due sistemi di riferimento ${}^0S$ ed ${}^1S$, risulta: $\|r\| = \sqrt{r\cdot r} = \sqrt{{}^0r^T\,{}^0r} = \sqrt{{}^1r^T\,{}^1r}$

cioè il modulo o norma del vettore r è una proprietà intrinseca del vettore stesso $\perp\!\!\!\perp$ dalla rappresentazione scelta. Queste proprietà sono valide per $\forall$ vettore ed in particolare, quindi, anche per i versori. Si consideri ora il prodotto della Trasposta della ${}^{0}R_1$ per la ${}^{0}R_1$ stessa:

$$
{}^{0}R_1^T\,{}^{0}R_1 = \begin{bmatrix} {}^{0}x_1^T \\ {}^{0}y_1^T \\ {}^{0}z_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{0}x_1 & {}^{0}y_1 & {}^{0}z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}x_1^T \cdot {}^{0}x_1 & {}^{0}x_1^T \cdot {}^{0}y_1 & {}^{0}x_1^T \cdot {}^{0}z_1 \\ {}^{0}y_1^T \cdot {}^{0}x_1 & {}^{0}y_1^T \cdot {}^{0}y_1 & {}^{0}y_1^T \cdot {}^{0}z_1 \\ {}^{0}z_1^T \cdot {}^{0}x_1 & {}^{0}z_1^T \cdot {}^{0}y_1 & {}^{0}z_1^T \cdot {}^{0}z_1 \end{bmatrix} = I =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Grazie all'ortonormalità del sistema di riferimento ed in base alle osservazioni fatte precedentemente si può infatti affermare:

$$
\begin{cases} x_1 \cdot x_1 = {}^{0}x_1^T \cdot {}^{0}x_1 = {}^{1}x_1^T \cdot {}^{1}x_1 = 1 \\ x_1 \cdot y_1 = {}^{0}x_1^T \cdot {}^{0}y_1 = 0 \end{cases}
$$

ed applicando in modo analogo le altre identità:

$$
{}^{0}R_1^T\,{}^{0}R_1 = I \Rightarrow \begin{cases} ({}^{0}R_1^T)^{-1} = {}^{0}R_1 \\ ({}^{0}R_1)^{-1} = {}^{0}R_1^T \end{cases}
$$

Grazie all'unicità della matrice inversa. Inoltre ciascuna delle due matrici è invertibile perché il loro prodotto (I) è una matrice a rango pieno. Si può quindi dire che:

$$\boxed{{}^{0}R_1^{-1} = {}^{0}R_1^T}$$

cioè l'inversa della matrice di rotazione coincide con la sua trasposta (sotto le Hp di ortonormalità del riferimento).

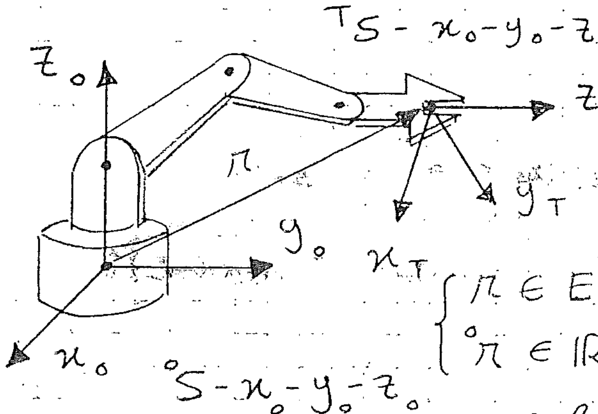
OSS: ${}^{1}R_0 = {}^{0}R_1^{-1} = {}^{0}R_1^T \Rightarrow \boxed{{}^{1}R_0 = {}^{0}R_1^T}$

Se ho: ${}^{0}r = {}^{0}R_1\,{}^{1}r$ allora:

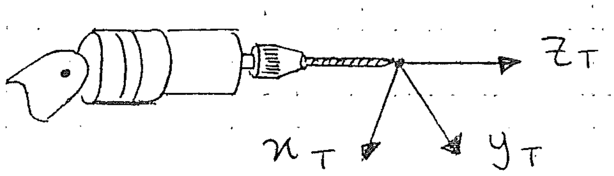
${}^{1}r = {}^{1}R_0\,{}^{0}r \Rightarrow {}^{1}r = {}^{0}R_1^T\,{}^{0}r$

OSS: Finora abbiamo considerato ${}^{0}R_1 = \text{cost.}$ perché siamo in condizioni statiche mentre nel caso dinamico avremo una ${}^{0}R_1 = {}^{0}R_1(t)$. Inoltre la matrice di rotazione può essere utilizzata per la rappresentazione dell'orientamento ad esempio dell'end-effector, o più in generale per rappresentare l'orientamento di un corpo rigido nello spazio. Questo tuttavia non è un modo efficiente per tale rappresentazione (si utilizzano 9 coordinate, quando invece basterebbero

bero 3 coordinate per individuare la posizione ed altre 3 per individuare l'orientamento $\Rightarrow$ $\exists$ delle rappresentazioni di orientamento minime che sono importanti nel controllo d'assetto dei satelliti) <u>TASK o TOOL</u>



$$\begin{cases} r \in E^3 \\ {}^0 r \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$



Sia ${}^T v$ la velocità del tool in movimento riferita al tool frame cioè ad ${}^T S$: se il compito da svolgere fosse quello di perforare lungo la direzione di z_T alla velocità di avanzamento di 1 mm/s avrei una ${}^T v$ espressa come:

$${}^T v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 0{,}001 \ (m/s)$$

Se voglio tradurre le coordinate del compito richiesto da ${}^T S$ ad ${}^0 S$ (riferendomi solo alla rotazione e non preoccupandomi della traslazione $\Rightarrow$ voglio tradurre le coordinate di un vettore libero senza punto di applicazione fissato) ho bisogno di conoscere la: ${}^0 R_T = [\,{}^0 x_T \ \ {}^0 y_T \ \ {}^0 z_T\,]$, in tal modo posso calcolare: ${}^0 v = {}^0 R_T \, {}^T v$

La matrice di rotazione oltre ad essere una matrice che opera un cambio di coordinate, può essere interpretata come una matrice che opera una rotazione.

<u>OSS</u>: Un operatore lineare $A(r)$ che opera su vettori $r \in E^3$ cioè tale che $A: E^3 \rightarrow E^3$, è rappresentato in un sistema di riferimento ${}^0 S$ da una matrice ${}^0 A$ che applicata alle coordinate di r (cioè alle ${}^0 r$) restituisce le coordinate di un vettore $v \in E^3$ (cioè le ${}^0 v$), espresse ancora nel riferimento ${}^0 S$. Cioè data $v = A(r)$

$\Rightarrow {}^{\circ}(\mathcal{A}(r)) = {}^{\circ}A\,{}^{\circ}r \Rightarrow {}^{\circ}v = {}^{\circ}A\,{}^{\circ}r$. Il vettore risultante v può essere espresso come:

$v = \mathcal{A}(r) = \mathcal{A}({}^{\circ}r_x x_0 + {}^{\circ}r_y y_0 + {}^{\circ}r_z z_0) \Rightarrow$

<u>OSS</u>: Visto che $\mathcal{A}$ è un operatore lineare risulta che: $\mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$ ed inoltre $\mathcal{A}(\alpha v) = \alpha \mathcal{A}(v)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v = \mathcal{A}(r) = {}^{\circ}r_x \mathcal{A}(x_0) + {}^{\circ}r_y \mathcal{A}(y_0) + {}^{\circ}r_z \mathcal{A}(z_0) \Rightarrow$

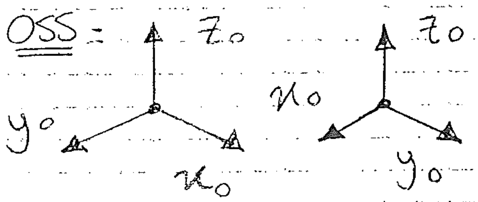
$\Rightarrow v = \left[\mathcal{A}(x_0)\ \mathcal{A}(y_0)\ \mathcal{A}(z_0)\right] {}^{\circ}r$ con ${}^{\circ}r = \begin{bmatrix} {}^{\circ}r_x \\ {}^{\circ}r_y \\ {}^{\circ}r_z \end{bmatrix}$

Quindi se conosco come è operatore trasforma i vettori della base (cioè i versori x_0, y_0, z_0) $\Rightarrow$ conosco anche come agisce su l'altro vettore esprimibile come combinazione lineare di tali versori $\Rightarrow$ è una conoscenza completa dell'operatore $\mathcal{A}$. Se volessi la rappresentazione coordinata di v rispetto ad ${}^{\circ}S$, avrei bisogno delle rappresentazioni coordinate delle trasformazioni dei versori:

$\left[{}^{\circ}\mathcal{A}(x_0)\ \ {}^{\circ}\mathcal{A}(y_0)\ \ {}^{\circ}\mathcal{A}(z_0)\right] = {}^{\circ}A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \Rightarrow {}^{\circ}v = {}^{\circ}A\,{}^{\circ}r$

cioè ${}^{\circ}A$ è una matrice che contiene le coordinate delle trasformazioni di ciascun versore. Possiamo concludere che la matrice ${}^{\circ}R_1$ è anche una matrice di rotazione: ${}^{\circ}v = {}^{\circ}R_1\,{}^{\circ}r_0$.

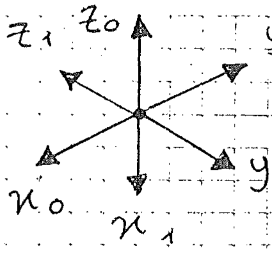
<u>OSS</u>:



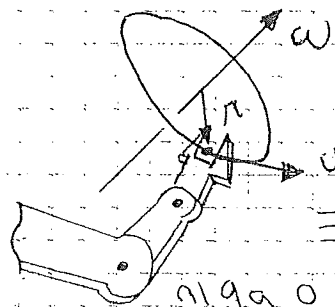
TERNA SINISTRORSA O DESTROGIRA (Left handed frame)

TERNA DESTRORSA O LEVOGIRA (Right handed frame)

Gli aggettivi destrogira e levogira si riferiscono ai sensi di rotazione degli assi per avere prodotti vettoriali positivi; per le terne destrorse vale: $|{}^{\circ}R_1| = \det {}^{\circ}R_1 = 1$ mentre per le sinistrorse: $|{}^{\circ}R_1| = \det {}^{\circ}R_1 = -1$. Passiamo ora alla interpretazione della matrice di rotazione ${}^0R_1 = [{}^0x_1\ {}^0y_1\ {}^0z_1]$.



La prima interpretazione vista è stata quella di matrice che opera un cambio di coordinate da un sistema ${}^0S$ ad un sistema di riferimento ${}^1S$. Dato il vettore $r \in E^3$ risulta che: ${}^0r = {}^0R_1\,{}^1r$, con la proprietà notevole: ${}^1R_0 = {}^0R_1^{-1} = {}^0R_1^T$ (tutto questo vale anche nel caso in cui si considerino delle terne sinistrorse). Il prodotto vettore $v = a \times b$ è definito tra vettori in E^3 ma può essere esteso alle terne di coordinate in $\mathbb{R}^3$ ${}^0v = {}^0a \times {}^0b$. OSS: torna utile in robotica definire il prodotto vettoriale per esprimere ad esempio la velocità con



cui si sta muovendo l'end effector (v) mentre sta ruotando a velocità ω: infatti $v = \omega \times r$. Per calcolare ${}^0v = {}^0a \times {}^0b$ ∃ una regola secondo cui si mettono in riga o in colonna le coordinate dei vettori a, b e:

$$\begin{bmatrix} {}^0a_x & {}^0a_y & {}^0a_z \\ {}^0b_x & {}^0b_y & {}^0b_z \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} {}^0a_x & {}^0b_x \\ {}^0a_y & {}^0b_y \\ {}^0a_z & {}^0b_z \end{bmatrix}$$

e le componenti di ${}^0v$ sono le seguenti:

$${}^0v_x = \begin{vmatrix} {}^0a_y & {}^0a_z \\ {}^0b_y & {}^0b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^0a_y & {}^0b_y \\ {}^0a_z & {}^0b_z \end{vmatrix}$$

$${}^0v_y = -\begin{vmatrix} {}^0a_x & {}^0a_z \\ {}^0b_x & {}^0b_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} {}^0a_x & {}^0b_x \\ {}^0a_z & {}^0b_z \end{vmatrix}$$

$${}^0v_z = \begin{vmatrix} {}^0a_x & {}^0a_y \\ {}^0b_x & {}^0b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^0a_x & {}^0b_x \\ {}^0a_y & {}^0b_y \end{vmatrix}$$

cioè, ad esempio, la componente x di ${}^0v$ è il determinante del minore che si ottiene da una delle due matrici sopra indicate, sopprimendo la colonna o la riga relativa alle componenti x dei vettori a e b. Oppure simbolicamente si può calcolare il determinante di una matrice formale che ha come prima riga (o colonna) i versori x_0, y_0 e z_0 e come 2ª e 3ª riga (o colonna) le coordinate dei vettori a e b nel sistema di riferimento ${}^\circ S - x_\circ - y_\circ - z_\circ$

$$v = a \times b = \left| \begin{pmatrix} x_\circ & y_\circ & z_\circ \\ {}^\circ a_x & {}^\circ a_y & {}^\circ a_z \\ {}^\circ b_x & {}^\circ b_y & {}^\circ b_z \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_\circ \\ y_\circ \\ z_\circ \end{matrix}} & \begin{matrix} {}^\circ a_x \\ {}^\circ a_y \\ {}^\circ a_z \end{matrix} & \begin{matrix} {}^\circ b_x \\ {}^\circ b_y \\ {}^\circ b_z \end{matrix} \end{pmatrix} \right| =$$

non sono numeri

$$= x_\circ \begin{vmatrix} {}^\circ a_y & {}^\circ a_z \\ {}^\circ b_y & {}^\circ b_z \end{vmatrix} + y_\circ \left(- \begin{vmatrix} {}^\circ a_x & {}^\circ a_z \\ {}^\circ b_x & {}^\circ b_z \end{vmatrix} \right) + z_\circ \begin{vmatrix} {}^\circ a_x & {}^\circ a_y \\ {}^\circ b_x & {}^\circ b_y \end{vmatrix} =$$

$$= x_\circ \, {}^\circ v_x + y_\circ \, {}^\circ v_y + z_\circ \, {}^\circ v_z$$

Σ dei prodotti tra compon. omologhe

DIM: Dimostriamo ora che $|{}^\circ R_1| = 1$ per terne destrorse.

OSS: $c \cdot (a \times b) = c \cdot v = {}^\circ c_x {}^\circ v_x + {}^\circ c_y {}^\circ v_y + {}^\circ c_z {}^\circ v_z =$

$$= \begin{vmatrix} {}^\circ c_x & {}^\circ c_y & {}^\circ c_z \\ {}^\circ a_x & {}^\circ a_y & {}^\circ a_z \\ {}^\circ b_x & {}^\circ b_y & {}^\circ b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^\circ c_x & {}^\circ a_x & {}^\circ b_x \\ {}^\circ c_y & {}^\circ a_y & {}^\circ b_y \\ {}^\circ c_z & {}^\circ a_z & {}^\circ b_z \end{vmatrix} = c \cdot (a \times b) = |[{}^\circ c \;\; {}^\circ a \;\; {}^\circ b]|$$

In base a quest'ultima eguaglianza il determinante della ${}^\circ R_1$ si può esprimere nel seguente modo:

$$|{}^\circ R_1| = |{}^\circ R_1^T| = |[{}^\circ x_1 \;\; {}^\circ y_1 \;\; {}^\circ z_1]| = x_1 \cdot \underbrace{(y_1 \times z_1)}_{} = 1 \;\blacksquare$$

Se la terna è destrorsa (ed orto normale) $\Rightarrow y_1 \times z_1 = x_1$, mentre nel caso di terne sinistrorse $y_1 \times z_1 = -x_1$ ed il determinante sarebbe stato -1.

$$x_1 \cdot x_1 = \|x_1\|^2 =$$

OSS: La seconda interpretazione che è stata data delle matrici di rotazione è appunto che rappresenta un operatore di rotazione. Se ho infatti un operatore lineare $\mathcal{A} : E^3 \to E^3$, per la proprietà di linearità, l'operatore è completamente definito dalle trasformazioni che opera sui versori della terna di riferimento: cioè note $\mathcal{A}(x_\circ)$, $\mathcal{A}(y_\circ)$ e $\mathcal{A}(z_\circ)$, so come trasformare $\forall$ altro vettore $r = {}^\circ r_x x_\circ + {}^\circ r_y y_\circ + {}^\circ r_z z_\circ$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(r) = {}^\circ r_x \mathcal{A}(x_\circ) + {}^\circ r_y \mathcal{A}(y_\circ) + {}^\circ r_z \mathcal{A}(z_\circ) \Rightarrow$$

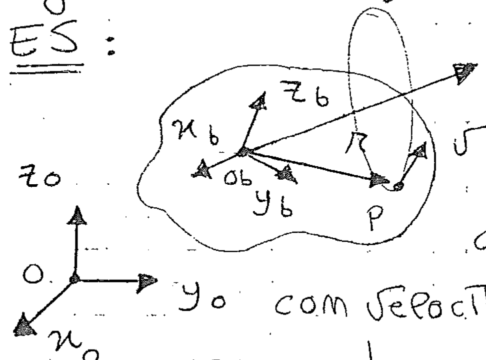
$$\Rightarrow \mathcal{A}(r) = [\mathcal{A}(x_\circ) \;\; \mathcal{A}(y_\circ) \;\; \mathcal{A}(z_\circ)] \begin{bmatrix} {}^\circ r_x \\ {}^\circ r_y \\ {}^\circ r_z \end{bmatrix}$$

passando dai vettori alle coord:

$$^\circ\mathcal{A}(r) = \left[\,^\circ\mathcal{A}(x_0)\ \ ^\circ\mathcal{A}(y_0)\ \ ^\circ\mathcal{A}(z_0)\right] \begin{bmatrix} ^\circ r_x \\ ^\circ r_y \\ ^\circ r_z \end{bmatrix} = {}^\circ A \begin{bmatrix} ^\circ r_x \\ ^\circ r_y \\ ^\circ r_z \end{bmatrix}$$

Sapere come l'operatore $\mathcal{A}$ opera sulla base di vettori del riferimento $^\circ S$ equivale a conoscere la matrice $^\circ A$ che è rappresentazione dell'operatore lineare $\mathcal{A}$ nel sistema di riferimento $^\circ S$ $\Rightarrow$ se $v = \mathcal{A}(r)$ allora $^\circ v = {}^\circ A\, {}^\circ r$ ....

ES:



ω. Si consideri un corpo rigido (BODY) sul quale viene fissato un sistema di riferimento $^bS - x_b - y_b - z_b$ solidale al corpo stesso. Se il body è in rotazione con velocità angolare ω, il generico punto P del corpo rigido si muove a velocità $v = \omega \times r$ (dove r è il vettore che congiunge l'origine di ^bS con P). Se avessi scelto un punto q individuato dal vettore s, la velocità di q sarebbe stata $v_q = \omega \times s$. Possiamo quindi concludere che $(\omega \times)$ è un operatore lineare che va da $\omega \in E^3$ a $v \in E^3$, infatti fissato ω: $\omega \times (\alpha a + \beta b) = \alpha\, \omega \times a + \beta\, \omega \times b$.

Quindi l'operatore $\mathcal{A}: E^3 \to E^3$ è definito come:

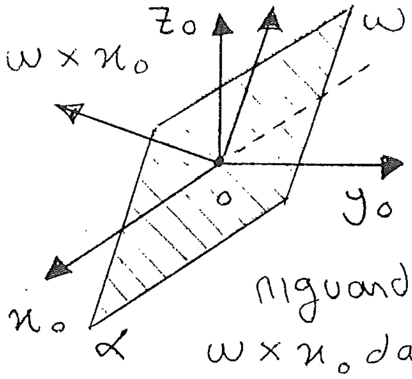
$\mathcal{A}(r) = \omega \times r$ cioè se $v = \omega \times r \to {}^\circ v = {}^\circ\omega \times {}^\circ r$, ma visto che $\mathcal{A}$ è un operatore lineare, $\exists$ la possibilità di rappresentarlo in $^\circ S$ per mezzo di una matrice: $^\circ v = {}^\circ A\, {}^\circ r$ $\Rightarrow$ per ricavare $^\circ A$ bisogna raccogliere in $^\circ A$ le coordinate delle trasformazioni dei versori della base espresse in $^\circ S$:

$$^\circ A = \left[\,^\circ\mathcal{A}(x_0)\ \ ^\circ\mathcal{A}(y_0)\ \ ^\circ\mathcal{A}(z_0)\right] = \left[\,^\circ(\omega \times x_0)\ \ ^\circ(\omega \times y_0)\ \ ^\circ(\omega \times z_0)\right]$$

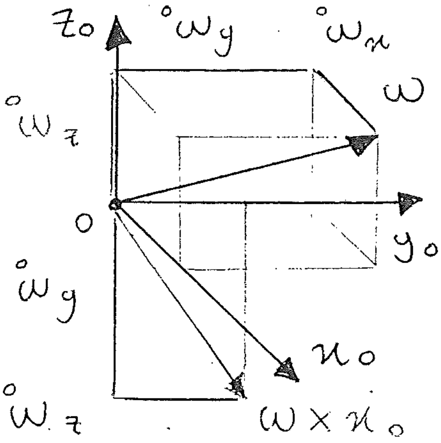
1) Calcoliamo $^\circ(\omega \times x_0) = {}^\circ\omega \times {}^\circ x_0$ in due modi diversi:

sfruttando la matrice $\begin{bmatrix} ^\circ\omega_x & ^\circ\omega_y & ^\circ\omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to {}^\circ x_0$ otteniamo:

$$^\circ(\omega \times x_0)_x = 0 \ ; \quad ^\circ(\omega \times x_0)_y = {}^\circ\omega_z \ ; \quad ^\circ(\omega \times x_0)_z = -{}^\circ\omega_y$$



Geometricamente questo risultato è giusto in quanto il vettore $\omega \times x_0$ è $\perp$ al piano α individuato da ω e da x_0 $\Rightarrow$ non può avere componenti lungo x_0. Per quanto riguarda le componenti di $\omega \times x_0$ dalla rappresentazione a DX risulta evidente che tale vettore ha componente pari a ${}^{\circ}\omega_z$ lungo y_0 e $-{}^{\circ}\omega_y$ lungo z_0. Oppure potevamo calcolare $(\omega \times x_0)$ nel seguente modo:



$$\omega \times x_0 = ({}^{\circ}\omega_x x_0 + {}^{\circ}\omega_y y_0 + {}^{\circ}\omega_z z_0) \times x_0$$

$$\Rightarrow \omega \times x_0 = -{}^{\circ}\omega_y z_0 + {}^{\circ}\omega_z z_0$$

avendo che: $\begin{cases} y_0 \times x_0 = -z_0 \\ z_0 \times x_0 = y_0 \end{cases}$

2) Calcoliamo ${}^{\circ}(\omega \times y_0)$:

$${}^{\circ}(\omega \times y_0) = {}^{\circ}\omega \times {}^{\circ}y_0 = \dots = \begin{bmatrix} -{}^{\circ}\omega_z \\ 0 \\ {}^{\circ}\omega_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{\circ}(\omega \times y_0)_x \\ {}^{\circ}(\omega \times y_0)_y \\ {}^{\circ}(\omega \times y_0)_z \end{bmatrix}$$

$${}^{\circ}y_0 \leftarrow \begin{bmatrix} {}^{\circ}\omega_x & {}^{\circ}\omega_y & {}^{\circ}\omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

oppure: ${}^{\circ}(\omega \times y_0) = {}^{\circ}\omega \times {}^{\circ}y_0$ si può calcolare considerando:

$$\omega \times y_0 = ({}^{\circ}\omega_x x_0 + {}^{\circ}\omega_y y_0 + {}^{\circ}\omega_z z_0) \times y_0 = {}^{\circ}\omega_x z_0 - {}^{\circ}\omega_z x_0$$

3) Infine calcoliamo anche ${}^{\circ}(\omega \times z_0) = {}^{\circ}\omega \times {}^{\circ}z_0 \Rightarrow$

$$\omega \times z_0 = ({}^{\circ}\omega_x x_0 + {}^{\circ}\omega_y y_0 + {}^{\circ}\omega_z z_0) \times z_0 = {}^{\circ}\omega_y x_0 - {}^{\circ}\omega_x y_0$$

In conclusione la matrice ${}^{\circ}A$ è la seguente:

$$\boxed{{}^{\circ}A = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{\circ}\omega_z & {}^{\circ}\omega_y \\ {}^{\circ}\omega_z & 0 & -{}^{\circ}\omega_x \\ -{}^{\circ}\omega_y & {}^{\circ}\omega_x & 0 \end{bmatrix} = [{}^{\circ}\omega \times]}$$

Quindi la matrice ${}^{\circ}A$ che rappresenta il prodotto vettoriale nel sistema di riferimento ${}^{\circ}S$, è una matrice antisimmetrica: d'ora in poi scriveremo: ${}^{\circ}(\omega \times \pi) = [{}^{\circ}\omega \times]\,{}^{\circ}\pi = {}^{\circ}A\,{}^{\circ}\pi$

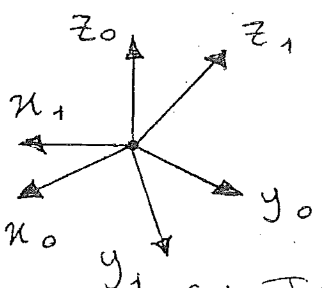
OSS: Non è strettamente necessario calcolare la 3ª colonna perché si dimostra che la matrice ${}^{\circ}A = [{}^{\circ}\omega \times \pi]$ è antisimmetrica

metrica (SKEW SYMMETRY):

<u>DIM</u>: Sappiamo infatti che $r \cdot (\omega \times r) = 0$ perché $\omega \times r$ è un vettore di E^3 perpendicolare sia ad ω sia ad r. Se esprimiamo questo prodotto misto in coordinate relative al riferimento ^0S: $^0r^T(^0A\,^0r) = 0 \Rightarrow$ otteniamo una forma quadratica nulla per $\forall r$. Visto che una forma quadratica del tipo $x^T S x = 0 \ \forall x \iff S^T = -S$, risulta che $^0A^T = -{}^0A$ cioè ^0A è una matrice antisimmetrica.

▨

Quindi un operatore lineare $\mathcal{A}(r) = \omega \times r$ può essere rappresentato in un sistema di riferimento ^0S da una matrice che raccoglie nelle colonne gli effetti dell'operatore applicato ai versori del riferimento stesso. Useremo lo stesso procedimento per verificare che l'operatore di rotazione può essere rappresentato da una matrice ortonormale. Si consideri ora l'operatore lineare $\mathcal{A}$ che agisce sui versori della terna x_0, y_0, z_0 nel seguente modo:



$\mathcal{A}(x_0) = x_1$, $\mathcal{A}(y_0) = y_1$, $\mathcal{A}(z_0) = z_1$ cioè trasforma gli assi di ^0S in quelli del riferimento ^1S → <u>OSS</u>: questo discorso vale in E^n con n generico. Analogamente a quanto fatto precedentemente data la trasformazione: $v = \mathcal{A}(r)$ si va alla ricerca della sua rappresentazione in ^0S che ci permetta di scrivere: $^0v = {}^0A\,^0r$.

$$^0A = \left[{}^0\mathcal{A}(x_0)\ {}^0\mathcal{A}(y_0)\ {}^0\mathcal{A}(z_0)\right] = \left[{}^0x_1\ {}^0y_1\ {}^0z_1\right] = {}^0R_1$$

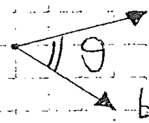
Questa matrice è la rappresentazione di un operatore che trasforma gli assi x_0, y_0, z_0 in x_1, y_1, z_1; si dimostra che tale operatore è un operatore di rotazione. Infatti dalla $^0v = {}^0R_1\,^0r$ capiamo subito che non è un cambio di coordinate in quanto non avviene la pseudo semplificazione tra il pedice di ${}^0R_1$ e l'apice di ${}^0r$, ed inoltre il vettore v (di coordinate ${}^0v$) è ruotato rispetto al vettore r (di coordinate ${}^0r$) per due motivi:

1) Non cambia la norma del vettore v rispetto a quella di r: $\|{}^0v\|^2 = {}^0v^T\,{}^0v = {}^0r^T\,{}^0R_1^T\,{}^0R_1\,{}^0r = {}^0r^T\,{}^0r = \|r\|^2$ cioè le norme dei due vettori sono le stesse

per la proprietà di ortonormalità della base ${}^0R_1^T\,{}^0R_1 = {}^0R_1^{-1}\,{}^0R_1 = 1$

2) Il vettore v ruota soltanto rispetto a r cioè l'angolo tra i due vettori cambia. Per dimostrarlo basta dimostrare che l'angolo tra due vettori a e b è lo stesso angolo tra i vettori trasformati $A(a)$ ed $A(b)$ $\Rightarrow$ si può dimostrare facilmente mostrando che il prodotto scalare è invariato:

$a \cdot b = \|a\|\,\|b\| \cos\theta$



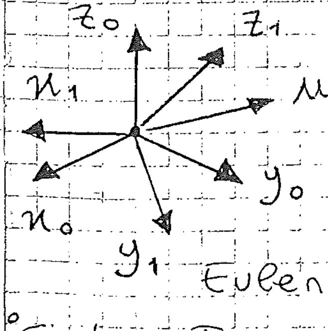
allora necessariamente l'angolo è lo stesso. Se dimostriamo che:

$A(a) \cdot A(b) = \|A(a)\|\,\|A(b)\| \cos\theta = \|a\|\,\|b\| \cos\theta = a \cdot b$

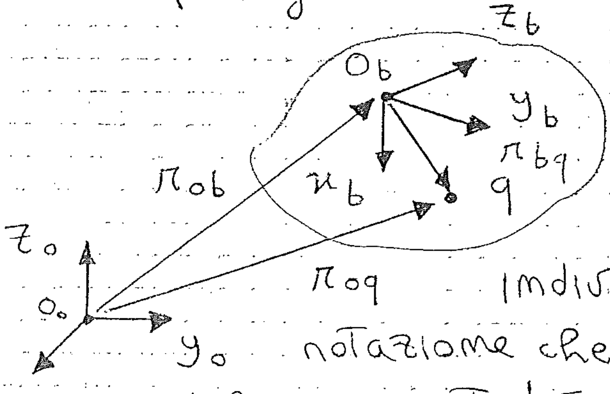
allora la tesi è dimostrata. Per far ciò scriviamo il prodotto scalare in questo modo:

$A(a) \cdot A(b) = ({}^0R_1\,{}^0a)^T({}^0R_1\,{}^0b) = {}^0a^T\,\underbrace{{}^0R_1^T\,{}^0R_1}_{1}\,{}^0b = {}^0a^T\,{}^0b = a \cdot b$

☒. Ulteriormente si dimostra che ${}^0R_1$ possiede un autovalore 1 relativo all'autovettore μ che individua l'asse attorno al quale bisogna ruotare il riferimento ${}^1S$ per sovrapporlo a ${}^0S$: ${}^0\mu = {}^0R_1\,{}^0\mu$. Il vettore μ individua cioè l'asse di Eulero.

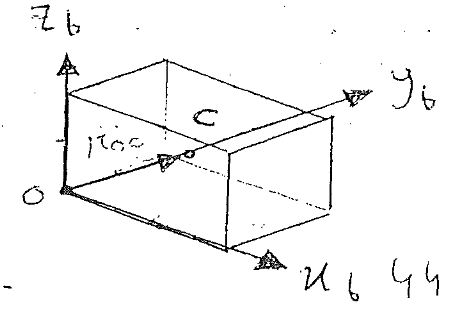


∃ un teorema di Eulero secondo il quale basta un'unica rotazione attorno all'asse di Eulero per far coincidere gli assi di ${}^1S$ con quelli di ${}^0S$. La rotazione attorno ad un asse di Eulero è rappresentata da una retta nello spazio delle rotazioni ed ha come analogia in E^3 la traiettoria rettilinea che unisce due punti. È una problematica importante nella pianificazione delle traiettorie quando l'orientamento dell'end effector nella posizione finale non coincide con l'orientamento che esso aveva nella posizione iniziale. (OSS: l'insieme di posizione ed orientamento di un corpo viene definito POSA oppure POSATURA). $\exists$ diversi modi per indicare la posa di un corpo rigido.



La posizione del body rispetto ad ${}^oS$ viene individuata mediante un vettore $\overrightarrow{O_oO_b} = r_{ob}$ mentre l'orientamento si può individuare mediante la matrice di rotazione che indica la rotazione degli assi del riferimento ${}^bS$ rispetto al riferimento ${}^oS$: ${}^oR_b = [{}^ox_b \; {}^oy_b \; {}^oz_b]$; considerando i vettori indicati, a prescindere dal sistema di riferimento abbiamo che: $r_{oq} = r_{ob} + r_{bq}$. Se voglio conoscere la posizione del punto q sul corpo rigido nel riferimento ${}^oS$ (${}^or_{oq}$), devo conoscere la posizione del corpo rigido (${}^or_{ob}$), il suo orientamento (${}^oR_b$) e la posizione del punto q rispetto al riferimento ${}^bS$ (${}^br_{bq}$). Quest'ultima posizione è costante nel tempo perché il corpo è per definizione un corpo rigido (indeformabile) per cui le coordinate dei suoi punti non variano rispetto ad ${}^bS$.

<u>ES</u>: Nel Tool frame (Terna utensile) le coordinate del centro dell'utensile sono espresse nel seguente modo:

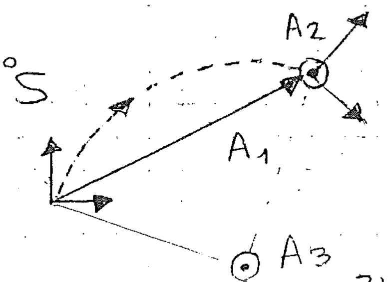


$${}^br_{oc} = [{}^br_{ocx} \; {}^br_{ocy} \; {}^br_{ocz}] = \text{cost.}$$

Le coordinate del vettore r_{bq} nel sistema fisso ${}^{0}S$ sono:
${}^{0}r_{bq} = {}^{0}R_{b}\,{}^{b}r_{bq}$ se siamo in condizioni statiche, mentre se vogliamo esprimere un movimento e siamo in cond. dinamiche: ${}^{0}r_{bq}(t) = {}^{0}R_{b}(t)\,{}^{b}r_{bq} \rightarrow$ cost.: perché il punto q non si sposta rispetto al riferimento del body. Adesso possiamo sommare nelle coordinate espresse in ${}^{0}S$:

$$\begin{cases} {}^{0}r_{oq} = {}^{0}r_{ob} + {}^{0}r_{bq} \\ {}^{0}r_{bq} = {}^{0}R_{b}\,{}^{b}r_{bq} \end{cases} \Rightarrow \boxed{{}^{0}r_{oq} = {}^{0}r_{ob} + {}^{0}R_{b}\,{}^{b}r_{bq}}$$

Per sovrapporre il riferimento ${}^{0}S$ al riferimento ${}^{b}S$ è necessario operare una traslazione ed una rotazione attorno a due assi differenti. ∃ un teorema di Eulero che afferma che è possibile effettuare una rototraslazione attorno ad uno stesso asse per sovrapporre i due riferimenti. Tale asse è chiamato appunto asse di Eulero. Consideriamo un esempio planare:



per sovrapporre ${}^{0}S$ ad ${}^{1}S$ si può sia effettuare una traslazione lungo l'asse A_1 seguita da una rotazione attorno all'asse A_2 oppure eseguire una rototraslazione unica attorno all'asse di Eulero A_3.
In genere la rototraslazione attorno all'asse di Eulero non è la scelta migliore perché potrebbe complicare il movimento anche in casi banali, e l'asse di Eulero viene sfruttato solo per effettuare delle rotazioni. Inoltre le rotazioni possono essere definite attorno ad assi fissi oppure variabili. La relazione trovata è non lineare ⇒ in robotica si preferisce lavorare con relazioni lineari, introducendo le coordinate omogenee:
$${}^{b}\tilde{r}_{bq} = \begin{bmatrix} {}^{b}r_{bq} \\ \hline 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad {}^{0}\tilde{r}_{bq} = \begin{bmatrix} {}^{0}r_{oq} \\ \hline 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$
le quali permettono di scrivere le trasformazioni di coor-

dinate dovute alla rototraslazione nel seguente modo:

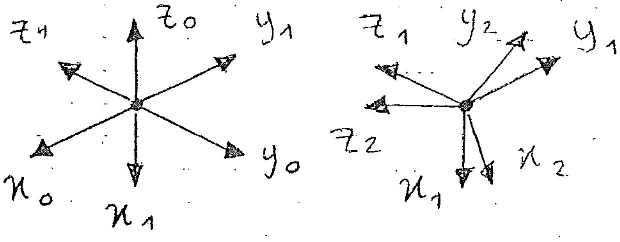
$$ {}^0\tilde{r}_{oq} = \left[\begin{array}{c} {}^0r_{oq} \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_b & {}^0r_{ob} \\ \hline 0\;0\;0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} {}^b r_{bq} \\ \hline 1 \end{array}\right] \Longrightarrow $$

$$ \Longrightarrow {}^0\tilde{r}_{oq} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} {}^0R_b & {}^0r_{ob} \\ \hline 0\;0\;0 & 1 \end{array}\right]} \, {}^b\tilde{r}_{bq} \Longrightarrow \boxed{{}^0\tilde{r}_{oq} = {}^0T_b \, {}^b\tilde{r}_{bq}} $$

${}^0T_b$: matrice di rototraslazione. Questo risultato si è ottenuto utilizzando le coordinate omogenee. La ${}^0T_b$ raccoglie informazioni sulla posizione e l'orientamento del body (ad esempio l'end-effector) rispetto al world frame.

Si ottiene una formula simile a quella ottenuta per cambio di coordinate

Vediamo ora cosa si intende per applicazione ripetuta di matrici di rotazione e consideriamo a tal proposito tre sistemi di riferimento ${}^0S$, ${}^1S$ ed ${}^2S$ con origini coincidenti:



Le posizioni di ${}^2S$ rispetto ad ${}^1S$ e di ${}^1S$ rispetto ad ${}^0S$ sono individuate dalle:

$$ \begin{cases} {}^1R_2 = [{}^1x_2 \; {}^1y_2 \; {}^1z_2] \\ {}^0R_1 = [{}^0x_1 \; {}^0y_1 \; {}^0z_1] \end{cases} $$

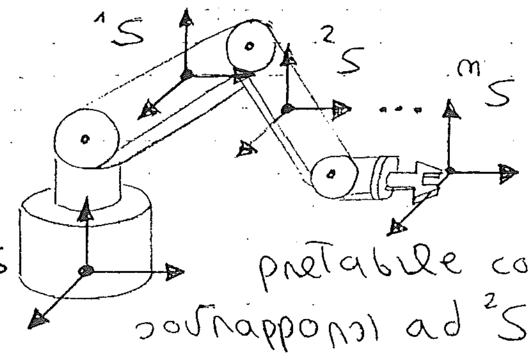
Dato un generico vettore r esso può essere espresso come:

$$ \begin{cases} {}^0r = {}^0R_1 \, {}^1r \\ {}^1r = {}^1R_2 \, {}^2r \end{cases} \Longrightarrow {}^0r = \underbrace{{}^0R_1 \, {}^1R_2} \, {}^2r = {}^0R_2 \, {}^2r $$

$$ \boxed{{}^0R_2 = [{}^0x_2 \; {}^0y_2 \; {}^0z_2] = {}^0R_1 \, {}^1R_2} $$

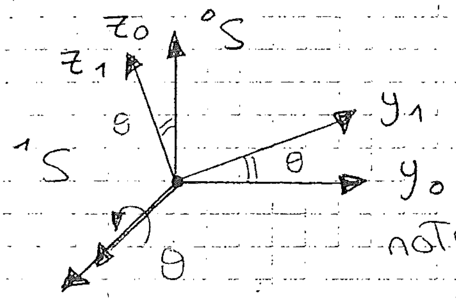
La matrice che esprime l'orientamento di ${}^2S$ rispetto ad ${}^0S$ è una composizione (prodotto) di due matrici intermedi ${}^0R_1$ ed ${}^1R_2$. È una osservazione importante per i robot a catena aperta, nei quali $\forall$ braccio verrà associato un sistema di riferimento. Possiamo esprimere l'orientamento della mano del robot rispetto alla sua base conoscendo l'orientamento del braccio i-mo rispetto al braccio $(i-1)$mo per tutti i bracci del robot. Ottengo in tal modo la matrice ^0R_n come composizione delle matrici di rotazione relative ai singoli bracci del robot:

$$\boxed{{}^0R_n = {}^0R_1\,{}^1R_2 \cdots {}^{n-2}R_{n-1}\,{}^{n-1}R_n}$$



dove n è il numero di bracci del robot. OSS: La matrice $^0R_2$ è interpretabile come la matrice che porta ^0S a sovrapporsi ad ^2S attraverso due rotazioni successive $^1R_2$ ed $^0R_1$ attorno ad assi diversi, oppure come un'unica rotazione attorno ad un asse di Eulero.

MATRICE DI ROTAZIONE ELEMENTARE: esprime rotazioni elementari attorno agli assi cartesiani. Si consideri una rotazione di un angolo θ di un sistema ^0S attorno all'asse x_0 $\Rightarrow$ si ottiene un sistema ^1S con l'asse $x_1 \equiv x_0$. Tale rotazione è espressa dalla seguente rotaz:



$$x_0 \equiv x_1 \qquad R_x(\theta) = \left[{}^0x_1\ {}^0y_1\ {}^0z_1\right] = {}^0R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

OSS: $x_0 \equiv x_1 \Rightarrow {}^0x_1 = {}^0x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mentre ciò non è vero per gli altri due assi: ${}^0y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ e ${}^0z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

OSS: Due rotazioni consecutive attorno allo stesso asse sono commutative, infatti sia geometricamente che analiticamente:

$$R_x(\alpha)\,R_x(\beta) = R_x(\alpha+\beta) = R_x(\beta)\,R_x(\alpha)$$

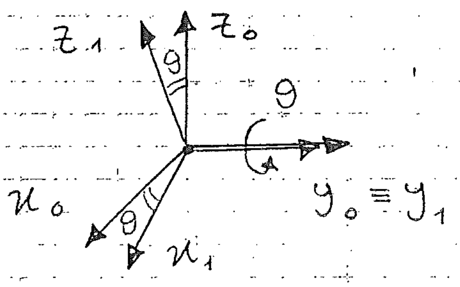
DIM:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ 0 & \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow R_x(\alpha)\,R_x(\beta) = R_x(\alpha+\beta)$ ▨

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$ e $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$

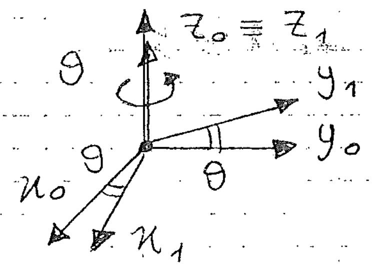
Ciò non è vero se le rotazioni avvengono attorno ad assi diversi. **OSS**: Le matrici di rotazione per $\theta = 0$ devono essere pari alla matrice identità I. La matrice di rotazione elementare attorno all'asse y è:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = {}^0R_1$$



mentre quella attorno all'asse z è:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0R_1$$



Per quanto riguarda le rotazioni inverse:

$$R_x^T(\theta) = R_x(-\theta) = R_x^{-1}(\theta) \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_x^T(\theta)\, R_x(\theta) = I$. Gli autovalori di una matrice di rotazione hanno tutti modulo unitario. C'è sempre un autovalore pari a 1 che individua l'autovettore che ha la stessa direzione dell'asse di Eulero, mentre gli altri due complessi e coniugati, devono essere dello stesso segno nel caso in cui siano reali:

$$\lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_{2,3} = e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \sin\theta$$

Se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi \Rightarrow \lambda_{2,3} \in \mathbb{R}$ e sono entrambe positivi o entrambe negativi in quanto il determinante, pari al prodotto degli autovalori, deve essere unitario:

$|{}^0R_1| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Dimostriamo ora che gli autovalori di ${}^0R_1$ hanno modulo unitario:

DIM: $\lambda_2 u_2 = {}^0R_1 u_2 \Rightarrow \|\lambda_2 u_2\| = \|u_2\| \Rightarrow$

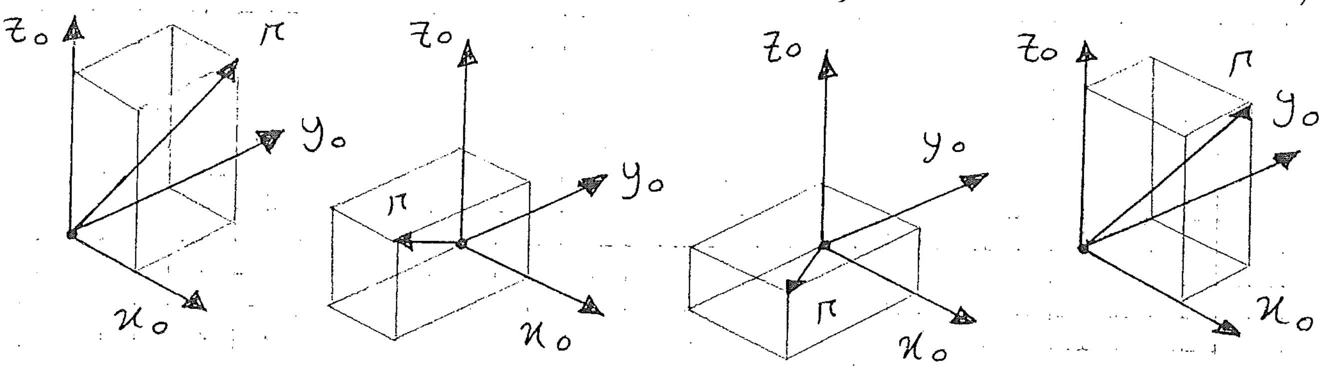
Visto che det. di ${}^0R_1$ è pari a 1

$\Rightarrow |\lambda_2|\, \|u_2\| = \|u_2\| \Rightarrow |\lambda_2| = 1$. ▨

Andiamo ora ad analizzare le rotazioni secondo assi differenti, dimostrando che non sono commutative:

Si considerino tre rotazioni attorno agli assi fissi (rotazioni elementari). Ruotiamo il vettore π attorno all'asse x di $\pi/2$, attorno ad y di $\pi/2$ e di nuovo attorno all'asse x di $-\pi/2$: $\boxed{R_x(-\pi/2)\, R_y(\pi/2)\, R_x(\pi/2)\, \overset{\circ}{\pi}}$

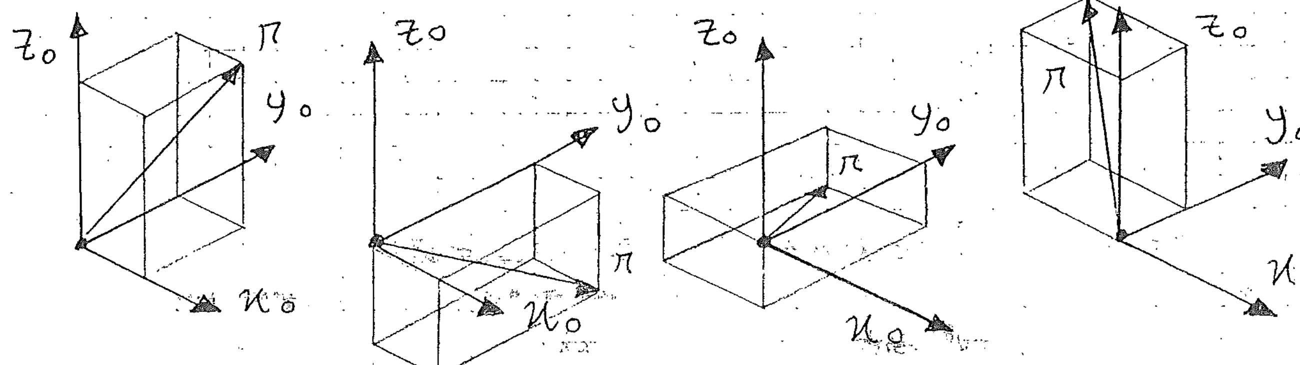
<u>OSS</u>: La rotazione prevede che in caso di rotazioni attorno ad assi fissi (x_0, y_0, z_0), la rotazione che si esegue per prima è quella che va scritta vicino ad $\overset{\circ}{\pi}$ proseguendo poi per le rotazioni successive da DX verso SX. Infatti ho una composizione secondo cui ruoto $\overset{\circ}{\pi}$ di $\pi/2$ attorno a x $\left(R_x(\pi/2)\overset{\circ}{\pi}\right)$, poi ruoto il vettore ottenuto di $\pi/2$ attorno a y $\left(R_y(\pi/2) R_x(\pi/2)\overset{\circ}{\pi}\right)$ e via dicendo. <u>NB</u>: l'ordine di scrittura viene invertito nel caso in cui le rotazioni si effettuano rispetto agli assi solidali al corpo che viene ruotato (cioè assi variabili). In tal caso vicino ad $\overset{\circ}{\pi}$ c'è la rotazione eseguita per ultima.
In base a quanto scritto nelle $\Longrightarrow$ (Trascuro Traslazioni):



Come si può vedere mediante tre rotazioni attorno agli assi x e y otteniamo una rotazione di $-\pi/2$ attorno all'asse z: $R_x(-\pi/2)\, R_y(\pi/2)\, R_x(\pi/2)\, \overset{\circ}{\pi} = R_z(-\pi/2)\, \overset{\circ}{\pi}$
Questo si può verificare anche analiticamente:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} = R_z(-\pi/2)$$

$R_x(-\pi/2)$ $\quad R_y(\pi/2)$ $\quad R_x(\pi/2)$ Si può verificare che questo risultato non coincide con la rotazione risultante da: $R_x(\pi/2)\, R_y(\pi/2)\, R_x(-\pi/2) = R_z(\pi/2)$, cioè dalla composizione delle stesse rotazioni in ordine inverso:

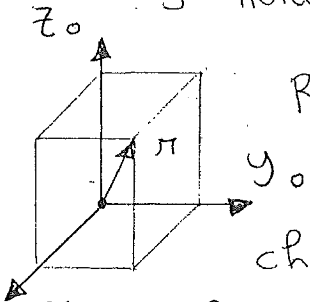


Allo stesso risultato si perviene per via analitica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(\pi/2)$$

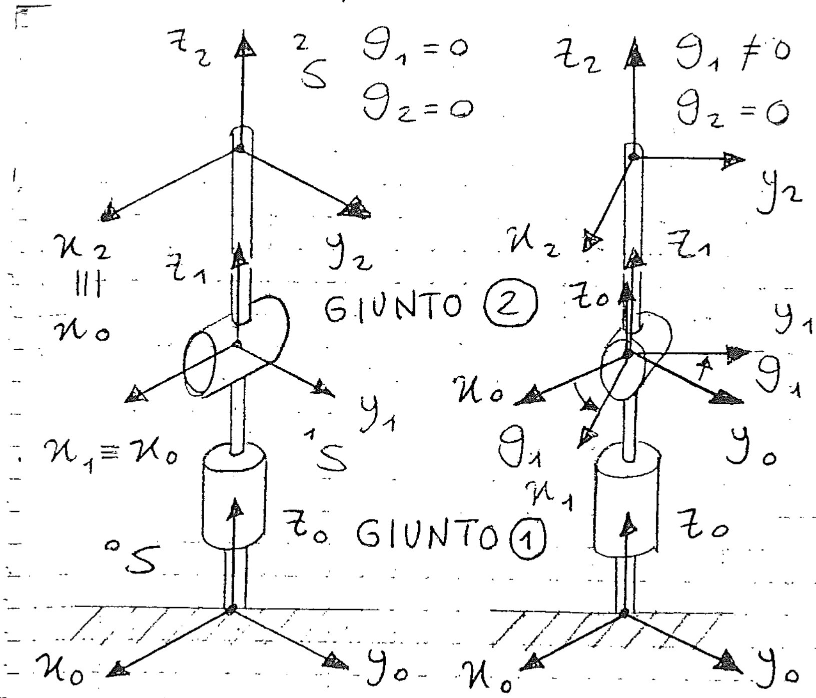
$R_x(\pi/2)\ R_y(\pi/2)\ R_x(-\pi/2)$. In conclusione, la rotazione o meglio la composizione di rotazioni effettuate attorno ad assi diversi non è commutativa contrariamente alle traslazioni.

RIC: $\underbrace{R_x(-\pi/2)}_{3^a \text{ rotazione}}\ \underbrace{R_y(\pi/2)}_{2^a \text{ rotaz.}}\ \underbrace{R_x(\pi/2)}_{1^a \text{ rotazione}} = R_z(-\pi/2)$



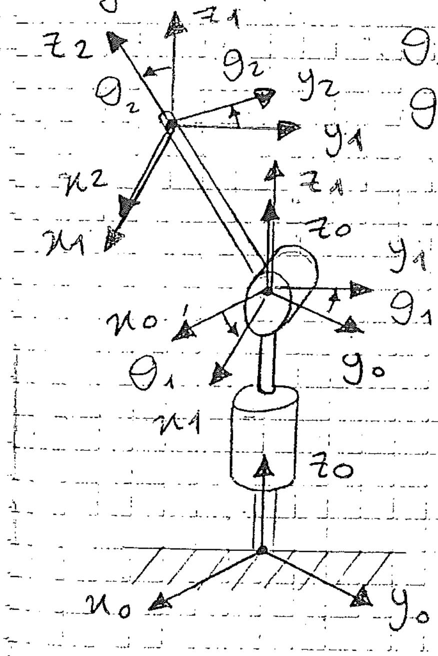
$$R_x(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ 0 & \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix}$$

Sono matrici che rappresentano in °5 degli operatori che ruotano il vettore r attorno ad assi fissi $\Rightarrow$ la sequenza indicata sopra è relativa a rotazioni attorno ad assi fissi. Se però si effettuano rotazioni attorno ad assi solidali al corpo che viene ruotato, la sequenza delle matrici di rotazione non è più quella indicata ma è opposta. Si consideri una catena cinematica costituita da 3 bracci connessi attraverso un giunto a cerniera con asse coincidente con z_0 ed un giunto con asse coincidente con x_0:



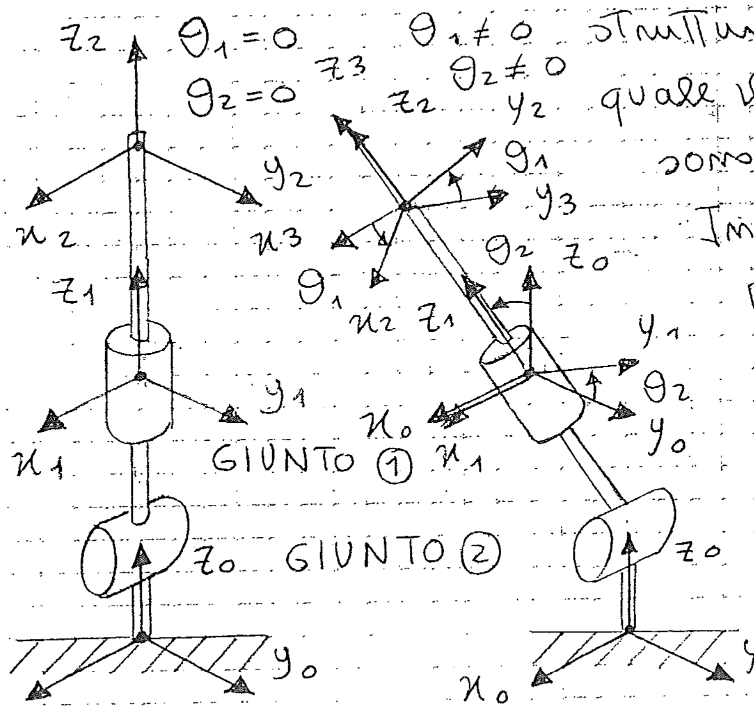
Quando i giunti sono nelle posizione di riposo (o posizione "zero") cioè $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$ ⇒ i tre riferimenti ${}^0S$, ${}^1S$ ed ${}^2S$ sono tre riferimenti con lo stesso orientamento ma "piazzato" in posizione differente sulla catena cinematica (uno ∀ braccio).

Il movimento del giunto ① sposta i riferimenti ${}^1S$ ed ${}^2S$ di un angolo θ_1 attorno all'asse z ⇒ una rotazione $R_z(\theta_1)$.



$\theta_1 \neq 0$
$\theta_2 \neq 0$

Se si considera un successivo spostamento della cerniera ② di un angolo θ_2, tale rotazione però non avviene attorno all'asse fisso x_0, ma attorno all'asse ruotato x_1 che è parallelo all'asse x_2. Ciò avviene perché il giunto ② a valle viene trasportato dal giunto ① a monte. Tuttavia se come prima rotazione effettuo una $R_x(\theta_2)$ attorno all'asse $x_0 \equiv x_1$, la seconda rotazione $R_z(\theta_1)$ è una rotazione attorno all'asse $z_0 \equiv z_1$, cioè il movimento del giunto ② non ha influito sul movimento del giunto ①, cioè la rotazione attorno all'asse verticale cambia l'asse della seconda rotazione. La sequenza per ottenere rotazioni attorno agli assi fissi è: $R_z(\theta_1) R_x(\theta_2)$. Nella discussione dell'ordine di rotazione è importante conoscere la struttura della catena cinematica. Si consideri la seguente struttura cinematica nella quale il giunto ① ed il giunto ② sono stati scambiati di posto.



In questo caso se effettuo prima una rotazione di un angolo θ_2 attorno ad x_0, il giunto ① dovrà poi ruotare di un angolo θ_1 attorno all'asse z_1 che non coincide z_0. Tuttavia se effettuo prima la rotazione di un angolo θ_1 attorno a z_0 e poi la rotazione di un angolo θ_2 attorno ad x_0, le rotazioni avvengono ancora attorno ad assi fissi e posso usare la rotazione corrispondente: $R_x(\theta_2)\,R_z(\theta_1)$.

OSS: $R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ L'asse x è l'asse x del riferimento in cui sto esprimendo le coordinate del vettore che voglio ruotare.

ES: Se consideriamo la prima struttura (quella della pagina precedente), l'orientamento del riferimento ${}^2S$ rispetto al riferimento ${}^1S$ non dipende da θ_1 ma solo da θ_2 ed è dato da $R_x(\theta_2) = {}^1R_2$, mentre l'orientamento di ${}^1S$ rispetto ad ${}^0S$ è dato da una matrice di rotazione:

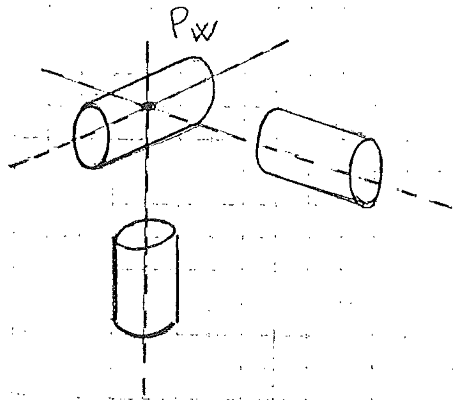
$${}^0R_1 = R_z(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

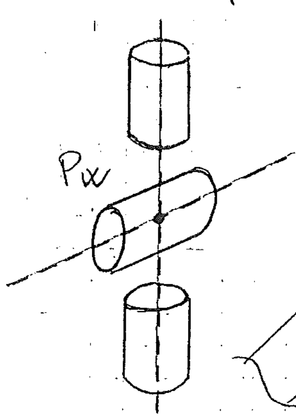
Quindi la matrice che individua l'orientamento di ${}^2S$ rispetto ad ${}^0S$ è: $\boxed{{}^0R_2 = {}^0R_1\,{}^1R_2 = R_z(\theta_1)\,R_x(\theta_2)}$

(per la prima struttura). Se si considera la seconda struttura (quella nella pagina accanto), l'orientamento del riferimento del riferimento ${}^2S$ rispetto a ${}^1S$ non dipende da θ_2 ed è ${}^1R_2 = R_z(\theta_1)$ mentre l'orientamento di ${}^1S$ rispetto ad ${}^0S$ è: ${}^0R_1 = R_x(\theta_2) \Rightarrow \boxed{{}^0R_2 = {}^0R_1\,{}^1R_2 = R_x(\theta_2)\,R_z(\theta_1)}$

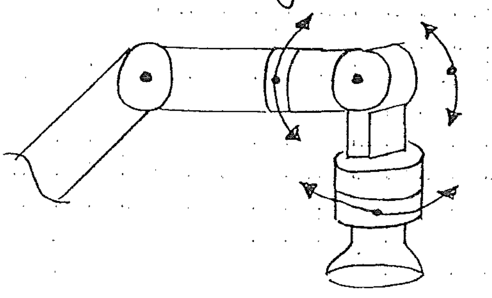
In entrambi i casi se le rotazioni avvengono attorno ad assi solidali al corpo che viene ruotato $\Rightarrow$ in questi casi all'estrema destra della composizione di matrici di rotazione si pone la matrice dell'asse che viene portato "a spasso" da tutti gli altri (asse più a valle) mentre all'estrema sinistra si pone la matrice dell'asse che porta "a spasso" tutti gli altri. Se ho una catena cinematica lunga è difficile ragionare in questo modo, conviene fare ragionamento tra un giunto ed il successivo (ragionare a coppie di giunti). Concludendo se le rotazioni sono specificate rispetto agli assi correnti (cioè solidali al corpo ruotato), vanno eseguite da SX a DX, se sono specificate rispetto al riferimento fisso, vanno eseguite da DX a SX.

POLSO SFERICO DEL ROBOT: è una struttura cinematica costituita da 3 giunti a cerniera i cui assi di rotazione si intersecano tutti in un punto P_W (con W che sta per WRIST → polso). Le posizioni zero o di riposo sono tipicamente:

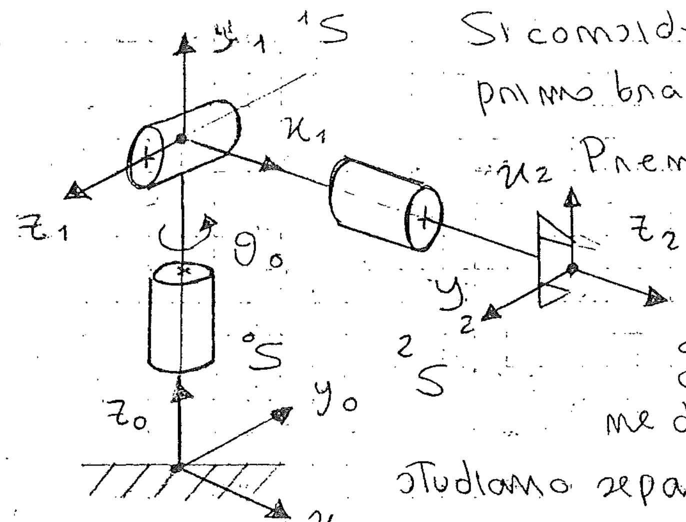




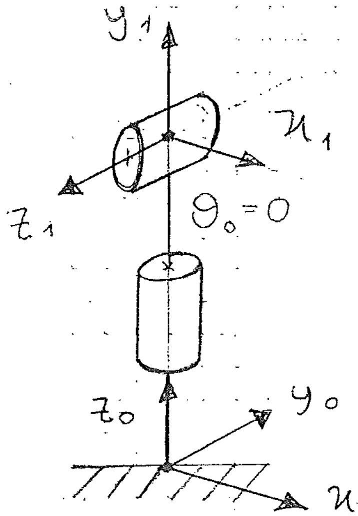
Ad esempio nel KUKA la posizione di riposo è la seguente:

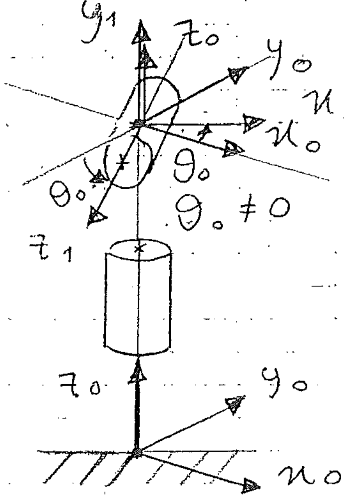


Si consideri un polso sferico con il primo braccio ancorato a terra (al mondo). Prendiamo i riferimenti in modo standard con gli assi z lungo la direzione degli assi dei giunti e consideriamo la posizione di zero mostrata a Sx.



Si studiano separatamente le strutture considerando coppie di giunti. Se $\theta_0 = 0$, basta una rotazione di $\pi/2$ attorno ad x_0 per avere $^0S \equiv {}^1S$. Se invece $\theta_0 \neq 0$ devo ruotare di θ_0 attorno a z_0 e poi di $\pi/2$ attorno a x_0': in base alla rotazione per rotazioni attorno ad assi solidali al corpo ruotato:





$$^0R_1(\theta_0) = R_z(\theta_0) R_x(\pi/2) =$$

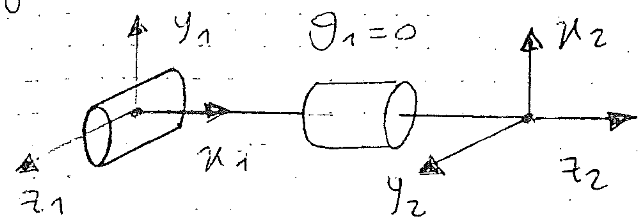
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & 0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ 0 & \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

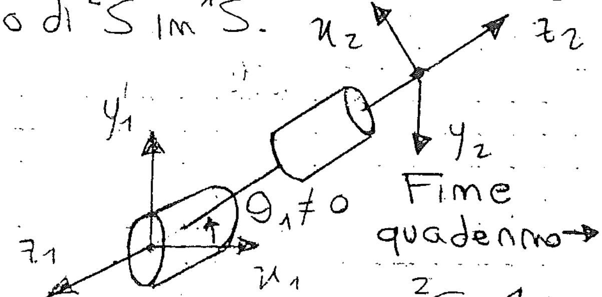
$$\Rightarrow {}^0R_1(\theta_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & 0 & \sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & 0 & -\cos\theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Allo stesso risultato si perviene considerando la $^0R_1$ come matrice che raccoglie le coordinate dei versori ^1S espresse nel riferimento ^0S:

$$^0R_1 = \begin{bmatrix} {}^0x_1 & {}^0y_1 & {}^0z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & 0 & \sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & 0 & -\cos\theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

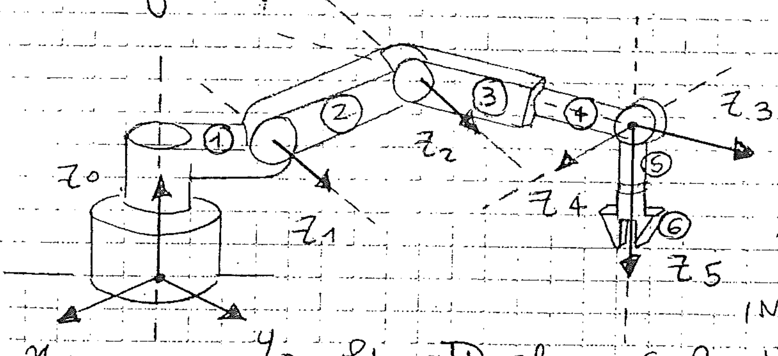
OSS: Nella convenzione l'angolo θ_0 avrà il nome θ_1 perchè è relativo al primo giunto. Un discorso analogo si fa per ricavare l'orientamento di ${}^2S$ in ${}^1S$.





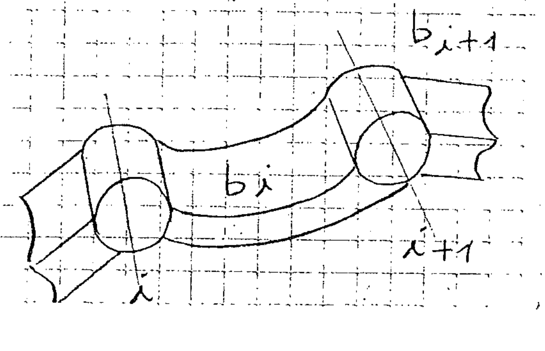
Fine quaderno → ⊛

In questo modo non si riesce ad esprimere ${}^2S \equiv {}^1S$ mediante una $R_z(\theta_1)\, R_x(\pi/2)$ perchè non abbiamo seguito la convenzione. Se si assegnano i riferimenti secondo la convenzione di DENAVIT-HARTENBERG riusciamo a far coincidere ${}^{n-1}S$ con ${}^nS$ con una composizione di rotazioni, del tipo $R_z(\theta)\, R_x(\pi/2)$. L'angolo $\pi/2$ non è fisso ma dipende dalla struttura del robot. È detto angolo di TWIST e rappresenta l'angolo tra 2 assi di giunti adiacenti. Secondo tale convenzione gli assi z di ogni riferimento agganciato ad un braccio vanno diretti secondo l'asse del giunto



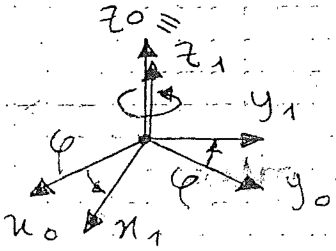
in questo modo vengono fissati gli angoli di TWIST ($\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -\pi/2$). Gli assi x vengono scelti in modo da risultare $\perp$ ad entrambe gli assi z del riferimento precedente e di quello successivo. $\forall$ braccio i, $\exists$ quattro parametri:

α_i: angolo di TWIST
a_i: lunghezza braccio
d_i: spostamento lungo asse fisso
θ_i: angolo di giunto.

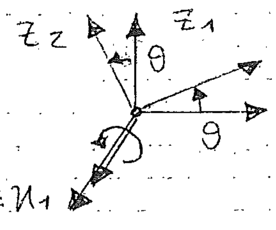


ROTAZIONE RISPETTO AD ASSE FISSO O VARIABILE

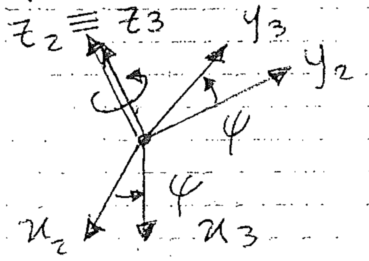
Siano dati tre riferimenti: ^0S, ^1S, ^2S ed ^3S, la rotazione complessiva è pari a $^0R_3 = {}^0R_1\,{}^1R_2\,{}^2R_3$. La prima rotazione è quella di un angolo φ attorno a z_0:



cioè una rotazione $R_z(\varphi)$, la seconda rotazione è di un angolo θ attorno all'asse x_1: $R_x(\theta)$.



Infine l'ultima rotazione è quella di un angolo ψ attorno all'asse z_2: $R_z(\psi)$,



dove (φ, θ, ψ) sono chiamati angoli di Eulero. Complessivamente la rotazione è:

$$^0R_3 = \underbrace{R_z(\varphi)}_{I^a \text{ rotazione}}\ \underbrace{R_x(\theta)}_{II^a \text{ rotaz}}\ \underbrace{R_z(\psi)}_{III^a \text{ rotaz}}$$

Quando si eseguono rotazioni rispetto all'asse corrente, cioè rispetto all'asse solidale al riferimento ancorato al corpo ruotato $\Rightarrow$ si scrive a DX la rotazione attorno all'asse che viene portato "a spasso" da tutti gli altri e le rotazioni si eseguono da SX verso DX. Se invece le rotazioni sono specificate rispetto ad assi fissi (<u>non</u> solidali con il corpo ruotato) abbiamo:

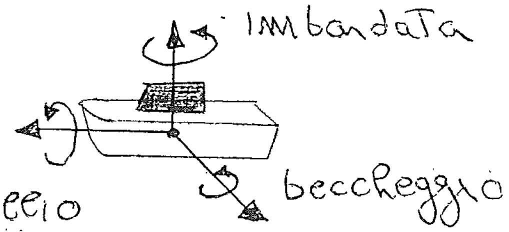
$\varphi \to z_0$ Per scrivere la rotazione complessiva si pensa all'operatore di rotazione: $R_z(\varphi)\,{}^0r$ → cioè

$\theta \to x_0$

$\psi \to z_0$ ^0r viene ruotato di φ attorno a z_0; il vettore ruotato, dovrà essere a sua volta ruotato di θ attorno ad $x_0 \Rightarrow R_x(\theta)\,R_z(\varphi)\,{}^0r$ ed infine quest'ultimo va ruotato di ψ attorno a z_0: $R_z(\psi)\,R_x(\theta)\,R_z(\varphi)\,{}^0r$

cioè se gli assi sono fissi le rotazioni vanno eseguite da $\quad III^a$ rot. $\quad II^a$ rot. $\quad I^a$ rotaz.

DX verso SX. OSS: Dato che la composizione di matrici di rotazione non è commutativa ⇒ quando se ne assegna una bisogna specificare se le rotazioni sono state assegnate rispetto ad assi fissi o rispetto ad assi correnti (cioè solidali al corpo ruotato). OSS: Generalmente, nel caso di assi solidali al corpo ruotato si usano gli angoli di ROLL - PITCH - YAW (dall' (aero) nautica → rollio, beccheggio, imbardata di uno scafo):

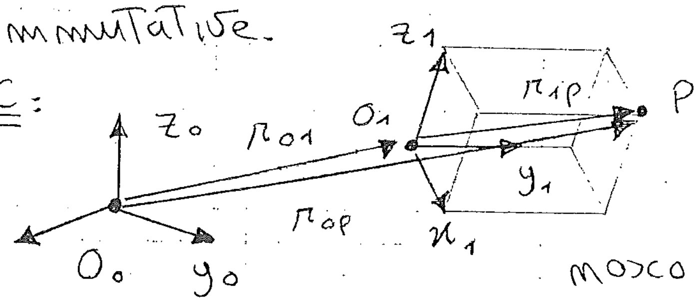


RIC: Terna mobile: $R_x(\varphi) R_y(\vartheta) R_z(\psi)$

Terna fissa: $R_z(\psi) R_y(\vartheta) R_x(\varphi)$

OSS: Rotazioni consecutive rispetto allo stesso asse sono commutative.

RIC: ^0S



Se conosco come è orientato il vettore $r_{1p} \in E^3$ rispetto ad ^1S ⇒ cioè conosco le sue coordinate $^1r_{1p} \in \mathbb{R}^3$ e conosco l'orientamento di ^1S rispetto ad ^0S cioè $^0R_1$ ⇒

⇒ $^0r_{1p} = {}^0R_1 \, {}^1r_{1p}$: mediante di rotazione calcoliamo il cambio di coordinate. Questo è sufficiente quando si è interessato solo alla direzione del moto. Se invece si vuole conoscere:

$r_{op} = r_{01} + r_{1p} \in E^3 \Rightarrow {}^0r_{op} = {}^0r_{01} + {}^0r_{1p}$, allora bisogna conoscere la posizione del riferimento ^1S rispetto ad ^0S oltre la sua orientazione: $^0R_1 = [\,^0x_1 \; ^0y_1 \; ^0z_1\,]$, in tal modo:

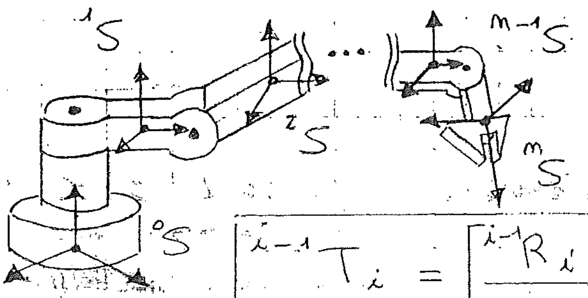
$$\boxed{^0r_{op} = {}^0r_{01} + {}^0r_{1p} = {}^0r_{01} + {}^0R_1 \, {}^1r_{1p}}$$

Trasformazione che rappr una rototraslazione.

Se utilizziamo le coordinate omogenee:

$$\boxed{^0\tilde{r}_{op} = \begin{bmatrix} ^0r_{op} \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ^0R_1 & ^0r_{01} \\ 0\;0\;0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^1r_{1p} \\ 1 \end{bmatrix} \boxed{= {}^0T_1 \, {}^1\tilde{r}_{1p}}$$

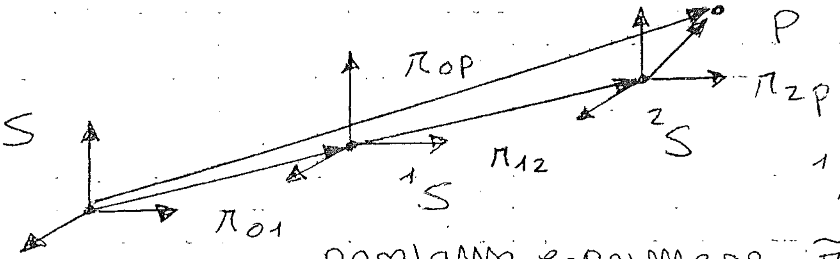
La matrice di rototraslazione ${}^{i-1}T_i$ contiene informazioni su posizione e orientamento del corpo sul quale è agganciato il sistema ${}^1S$ rispetto al sistema ${}^0S$. L'obbiettivo è quello di ancorare $\forall$ braccio i del robot un riferimento ${}^iS$,



in modo tale che sia semplice calcolare la ${}^{i-1}T_i$ $\forall$ braccio i del robot:

$$\boxed{{}^{i-1}T_i = \left[\begin{array}{c|c} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}r_{i-1,i} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]}$$

in questo modo la matrice che dà l'orientamento dell'ultimo braccio (n^{mo} anche se i bracci in totale sono $n+1$) rispetto al riferimento ${}^0S$ può essere scritta componendo con il prodotto tutte le matrici di rototraslazione: ${}^0T_n = {}^0T_1\,{}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n$ infatti:



Essendo: ${}^1\tilde{r}_{1p} = {}^1T_2\,{}^2\tilde{r}_{2p}$

possiamo esprimere $\tilde{r}_{op}$ nel seguente modo:

$$\tilde{r}_{op} = \left[\begin{array}{c} {}^0r_{op} \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_1 & {}^0r_{01} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} {}^1r_{1p} \\ \hline 1 \end{array}\right] = {}^0T_1\,{}^1\tilde{r}_{1p} = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2\tilde{r}_{2p}$$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{r}_{op} = {}^0T_2\,{}^2\tilde{r}_{2p}}$ Quindi generalizzando il discorso dalla matrice di rototraslazione:

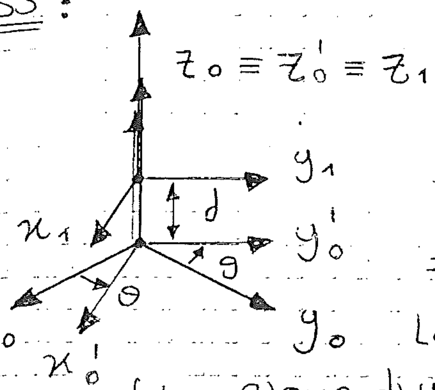
$${}^0T_n = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{{}^0R_n} & \boxed{{}^0r_{0n}} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$$

$\to$ posizione dell'origine di ${}^1S$ rispetto a ${}^0S$

$\to$ orientamento di ${}^1S$ rispetto a ${}^0S$.

e quindi ho risolto il pb della cinematica diretta. OSS: Le matrici di rototraslazione ha prodotto non commutativo e l'ordine con cui vanno scritte è: a DX rotazioni eseguite a valle per ultime mentre a SX rototraslazioni eseguite a monte per prime $\Rightarrow$ rotazioni specificate attorno ad assi correnti (solidali al corpo ruotato). La matrice di rototrasla-zione si può interpretare come operatore di traslazione e di rotazione dei vettori (oltre che come matrice di cambio delle coordinate).

OSS:



Ruotiamo attorno a z_0 di un angolo θ e trasliamo di una quantità d rispetto a $z'_0 \equiv z_0 \Rightarrow$ questa operazione è commutativa perchè la rotaz. e la traslazione avvengono sullo stesso asse z_0. La rototraslazione complessiva è la combinazione di una rotazione pura e di una traslazione pura:

$$T_z(\theta, d) = {}^0T_{0'}\,{}^{0'}T_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

L'ultima a DX per quanto detto sopra

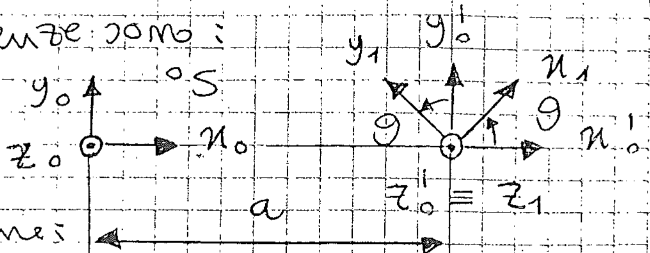
$$\Rightarrow T_z(\theta, d) = {}^0T_{0'}\,{}^{0'}T_1 = {}^0T_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Analogamente risulta che:

$$T_x(\alpha, a) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

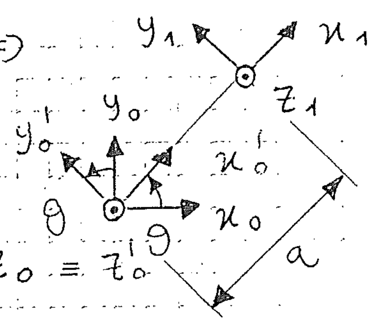
Non è invece commutativa la rototraslazione rispetto ad assi diversi: Si consideri infatti una terna ${}^0S$ ed una rotazione pura attorno all'asse z di un angolo θ ($R_z : \theta$) ed una traslazione pura lungo l'asse x di una distanza a ($T_x : a$). Consideriamo prima rotazioni rispetto ad assi correnti: in questo caso le due possibili sequenze sono:

① $T_x : a$, $R_z : \theta \Rightarrow$



Se ora consideriamo la sequenza inversa si ottiene:

② $R_z : \vartheta$, $T_x : a \Rightarrow$



Come si può vedere non si ottiene lo stesso risultato precedente. Le due sequenze di rototraslazioni possono essere scritte in termini di rotazioni e traslazioni elementari rispetto ad assi correnti:

①: $T_x(0,a)\,T_z(\vartheta,0)$ (prima T_x poi T_z)

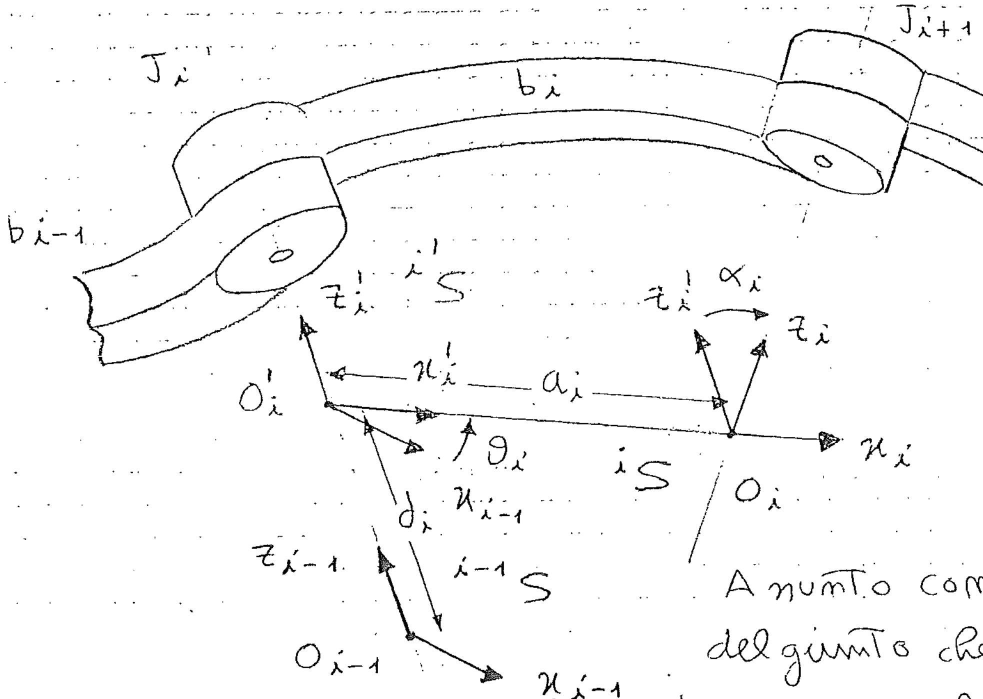
②: $T_z(\vartheta,0)\,T_x(0,a)$ (prima T_z poi T_x)

OSS: Il risultato della rototraslazione ① fatta rispetto ad assi correnti è lo stesso risultato che otterrei se considerassi una rototraslazione di tipo ② fatta però rispetto ad assi fissi. È vero anche il viceversa. Le due sequenze di roto traslazioni possono essere scritte in termini di rototraslazioni elementari rispetto ad assi fissi:

①: $T_z(\vartheta,0)\,T_x(0,a)$ (prima T_x poi T_z)

②: $T_x(0,a)\,T_z(\vartheta,0)$ (prima T_z poi T_x)

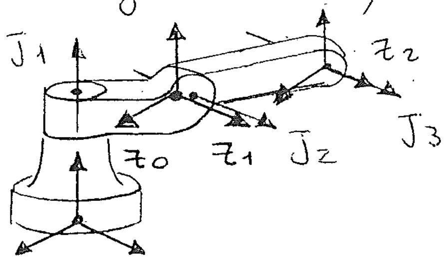
PARAMETRI E CONVENZIONE DI DENAVIT-HARTENBERG



Assunto come asse i, l'asse del giunto che connette il braccio $i-1$ al braccio i, per la definizione della terna i (solidale al braccio i)

si opera secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg:

① si sceglie l'asse z_i giacente lungo l'asse del giunto $i+1$; cioè l'asse z_i è solidale all'asse del giunto $i+1$ (z_0 è solidale a J_1, z_1 è solidale a J_2 ---).



OSS: Nel KUKA →

② si individua O_i all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i (segmento di minima distanza tra due rette sghembe, appartiene alla retta ⊥ ad entrambe gli assi ed ed è detto distanza tra assi adiacenti), e con O_i' si indica l'intersezione della normale comune, con l'asse z_{i-1}.

③ si sceglie l'asse x_i diretto lungo la normale comune a z_{i-1} e z_i con verso positivo dal giunto i al giunto $i+1$.

④ si sceglie l'asse y_i in modo che la terna sia destrorsa. OSS: La convenzione fornisce una definizione non univoca della terna nei seguenti casi:

- con riferimento alla terna $\emptyset$, per la quale solo la direzione dell'asse z_0 risulta specificata: si possono quindi scegliere arbitrariamente O_0, x_0 e il verso di z_0.
- con riferimento alla terna n, poiché ∄ il giunto $n+1$, z_n non è univocamente definito mentre l'asse x_n deve essere normale all'asse z_{n-1}: tipicamente, il giunto n è rotoidale, per cui z_n va allineato con z_{n-1};
- quando due assi consecutivi sono paralleli, in quanto la normale comune tra di loro non è univocamente definita; (sono ∞ normali di minima distanza tra gli assi)
- quando due assi consecutivi si intersecano, in quanto il verso di x_i è arbitrario perché $a_i = 0$ (ciò che accade nei polsi)
- quando il giunto i è prismatico, nel qual caso solo la dire-

zione dell'asse z_{i-1} è determinata. Una volta definite le terne solidali ai bracci, la posizione e l'orientamento della terna i (riferimento ${}^{i}S$) rispetto alla terna $i-1$ (riferimento ${}^{i-1}S$) risultano completamente specificati dai parametri seguenti:

- a_i : distanza di O_i da O_i' (distanza tra assi adiacenti)
- d_i : coordinata su z_{i-1} di O_i'
- α_i : angolo intorno all'asse x_i tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i valutato positivo in senso antiorario (detto anche angolo di twist)
- θ_i : angolo intorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i valutato positivo in senso antiorario.

Dei quattro parametri, due (a_i, α_i) sono sempre costanti e dipendono solo dalla geometria di connessione dei giunti consecutivi dettata dalla presenza del braccio i (individuano infatti rispettivamente la lunghezza e l'angolo di twist del braccio i). OSS: $a_i \geq 0$ perché è una distanza (nulla al massimo nei polsi sferici) mentre d_i che è una coordinata di O_i' lungo z_{i-1}, può essere sia positivo sia negativo. Degli altri due uno soltanto è variabile in dipendenza del tipo di giunto utilizzato per connettere il braccio $i-1$ al braccio i:

- se il giunto i è rotoidale $\Rightarrow$ la variabile è θ_i;
- se il giunto i è prismatico $\Rightarrow$ la variabile è d_i.

Possiamo adesso esprimere la trasformazione di coordinate che permette di passare da ${}^{i-1}S$ ad ${}^{i}S$:

ⓐ si parte da un riferimento ${}^{i-1}S$ coincidente con la terna $i-1$;

ⓑ si trasla la terna scelta di d_i lungo l'asse z_{i-1} ruotandola di θ_i intorno all'asse z_{i-1}; questa operazione porta la terna a sovrapporsi alla terna i' ed è descritta da una matrice di rototraslazione $T_z(\vartheta_i, d_i)$;

(c) trasla la terna ora sovrapposta alla terna i' di a_i lungo l'asse x_i' ruotandola di α_i intorno all'asse x_i'; questa operazione porta la terna a sovrapporsi alla terna i ed è descritta dalla matrice di rototraslazione $T_x(\alpha_i, a_i)$.

(d) avendo operato due trasformazioni di coordinate definite rispetto a terna corrente, la trasformazione di coordinate complessiva si ottiene moltiplicando le singole trasformazioni componenti dalla prima all'ultima da SX verso DX:

$$\boxed{{}^{i-1}T_i = T_z(\vartheta_i, d_i)\, T_x(\alpha_i, a_i)}$$

La variabile di giunto che è ϑ_i oppure d_i a seconda del tipo di giunto, viene generalmente indicata con q_i. Quindi, una volta fissata la geometria del robot, (cioè i parametri α_i, a_i e d_i/ϑ_i) siamo in grado di scrivere la matrice di rototraslazione ${}^{i-1}T_i$ che individua posizione ed orientamento di ${}^{i}S$ rispetto ad ${}^{i-1}S \longrightarrow {}^{i-1}T_i(q_i)$. Mediante composizione delle matrici di rototraslazione (ottenute iterando il procedimento presentato per tutti i bracci di cui il robot si compone) è possibile ottenere la matrice di rototraslazione del braccio terminale rispetto al riferimento ${}^{0}S$:

$$\boxed{{}^{0}T_n = {}^{0}T_1(q_1)\,{}^{1}T_2(q_2) \cdots {}^{n-1}T_n(q_n) = {}^{0}T_n(q)} \quad \text{con } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

cioè $q \in \mathbb{R}^n$. OSS: Le due matrici di rototraslazione omogenee che servono per ottenere ${}^{i-1}T_i = T_z(\vartheta_i, d_i)\, T_x(\alpha_i, a_i)$ sono:

$$T_z(\vartheta_i, d_i) = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & 0 \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = {}^{i-1}T_{i'}$$

mentre la $T_x(\alpha_i, a_i) = {}^{i'}T_i$ è la seguente:

$$T_x(\alpha_i, a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{i'}T_i$$

$$\Rightarrow T_z(\theta_i, d_i)\, T_x(\alpha_i, a_i) = {}^{i-1}T_{i'}\, {}^{i'}T_i = {}^{i-1}T_i$$

<u>OSS</u>: In questo modo risolviamo il problema della cinematica diretta, ma la rappresentazione dell'orientamento non è minima. Per rappresentare rotazioni in $\mathbb{R}^2$ si ricorre ai numeri complessi ($\mathbb{R}e + j\,\mathbb{I}m$) $\Rightarrow$ per rappresentare rotazioni in $\mathbb{R}^3$ si ricorre all'algebra dei quaternioni (generalizzazione dei numeri complessi: hanno una parte $\mathbb{R}e$ e tre componenti immaginarie con il vincolo che la somma dei quadrati è unitaria → sono 4 componenti). Dalla matrice di rototraslazione complessiva otteniamo:

$$\boxed{{}^0T_m(q) = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_m(q) & {}^0r_{om}(q) \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right]}$$

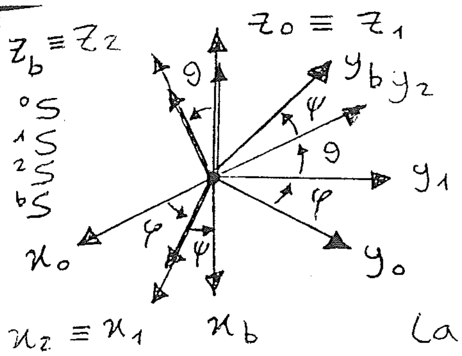
si ottengono due funzioni cinematiche: una posizionale e altra rappresentativa dell'orientamento:

$$\begin{cases} {}^0r_{om} = K_p(q) \rightarrow \text{Funzione cinematica posizionale del riferimento } {}^mS \text{ rispetto ad } {}^0S \\ {}^0R_m(q) = K_o(q) \rightarrow \text{Funzione cinematica dell'orientamento di } {}^mS \text{ rispetto ad } {}^0S. \end{cases}$$

Queste due funzioni non danno luogo ad una rapp. minima. Per avere una rappresentazione minima, bisogna sostituire la funzione cinematica dell'orientamento con una:

$$\boxed{\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = K_o(q)}$$

cioè una terna angolare di angoli di Eulero mediante la quale si ottiene una rappresentazione minima dell'orientamento. Questa nuova $K_o(q)$ insieme a $K_p(q) = {}^0r_{om}(q)$ forniscono una rappresentazione minima di posizione ed orientamento di ${}^mS$ rispetto ad ${}^0S$. Gli angoli di Eulero sono:



considerando rotazioni attorno ad assi correnti, portiamo sovrapporre S ad ^mS mediante la composizione delle rotaz

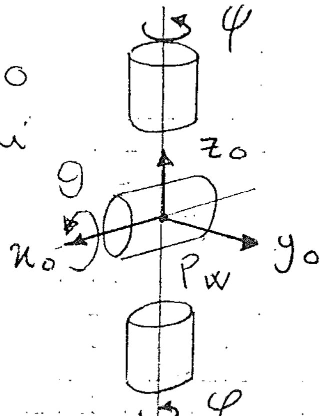
$$^0R_1 = R_z(\varphi);\ ^1R_2 = R_x(\vartheta);\ ^2R_b = R_z(\psi)$$

La matrice di rotazione (rispetto ad assi correnti) complessiva si scrive allora nel seguente modo:

$$^0R_b = {}^0R_b(\varphi, \vartheta, \psi) = {}^0R_1\,{}^1R_2\,{}^2R_b = R_z(\varphi)\,R_x(\vartheta)\,R_z(\psi)$$

Il problema di cinematica inversa è: nota la matrice ^0R_b, posso risalire ai valori di φ, ϑ, ψ che realizzano la rotazione operata da tale matrice?

ES: Mediante gli angoli di Eulero descriviamo la cinematica diretta di un polso i cui angoli di giunto corrispondono proprio a φ, ϑ e ψ, infatti la formula generica che descrive ^0R_m è:



$$^0R_m = {}^0R_1(q_1)\,{}^1R_2(q_2) \cdots {}^{m-1}R_m(q_m).$$

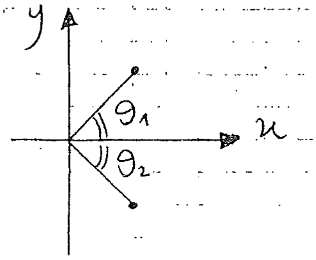
Pb: Se voglio che il polso orienti in un certo modo la mano, quali sono φ, ϑ e ψ che realizzano tale orientamento? Cioè data una orientazione $^0R_b = [\,^0x_b\ ^0y_b\ ^0z_b\,]$ desiderata, devo ricavare φ, ϑ e ψ che la realizzano:

$$^0R_b = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta & -s\vartheta \\ 0 & s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^0R_b = \begin{bmatrix} c\varphi c\psi - s\varphi s\psi \cos\vartheta & -c\varphi s\psi - s\varphi c\psi c\vartheta & s\varphi s\vartheta \\ c\varphi s\psi c\vartheta + s\varphi c\psi & c\varphi c\psi c\vartheta - s\varphi s\psi & -c\varphi s\vartheta \\ s\psi s\vartheta & c\psi s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix}$$

Ciò che è noto è la matrice ^0R_b desiderata data nella forma: $^0R_b = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Eguagliando gli elementi ottengo 9 eq. che non sono tutte indipendenti però: esistono dei vincoli che devono esser soddisfatto dagli elementi della matrice (come determinante unitario, colonne ⊥ tra loro e via dicendo) ⇒ otteniamo un sistema di 3 eq. indipendenti in 3 incognite. Di queste eq. consideriamo quelle più semplici da risolvere:



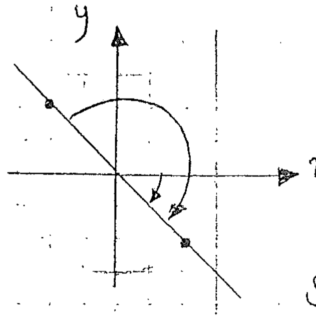
$r_{33} = \cos\vartheta \Rightarrow$ ho due soluzioni cioè:

ϑ_1 e $\vartheta_2 = -\vartheta_1$; $\vartheta_{1,2} = \arccos(r_{33})$

con $\vartheta_1 : \sin\vartheta_1 > 0$ e $\vartheta_2 : \sin\vartheta_2 < 0$

ma $\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2 = r_{33}$.

<u>OSS</u>: Con la funzione $\operatorname{atan}(y/x)$ tradizionale si perde una informazione di segno e viene restituito un angolo su due quadranti (non c'è distinzione tra i due casi mostrati a SX). Introduciamo la funzione $\operatorname{atan2}(y, x)$ che restituisce invece angoli su 4 quadranti perché conserva il segno di entrambe gli argomenti. In questo modo le soluzioni vanno da $[0, 2\pi]$ oppure $[-\pi, \pi]$.



Consideriamo la prima soluzione ϑ_1: $\begin{cases} \sin\vartheta_1 > 0 \rightarrow \text{Sotto questa } \underline{Hp}: \Rightarrow \\ \cos\vartheta_1 = r_{33} \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = \operatorname{atan2}(\underbrace{\sin\varphi \sin\vartheta_1}, \underbrace{\cos\varphi \sin\vartheta_1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1 = \operatorname{atan2}(r_{31}, r_{32})$ Nel caso in cui si sceglie

$\vartheta = \vartheta_2 \Rightarrow \begin{cases} \sin\vartheta_2 < 0 \\ \cos\vartheta_2 = r_{33} \end{cases} \Rightarrow$ Perché $\sin\vartheta_2 < 0 \Rightarrow$ le

$\Rightarrow \varphi_2 = \operatorname{atan2}(\underbrace{-r_{31}, -r_{32}})$ due componenti sono negative

Allo stesso modo per φ:

$\varphi_1 = \operatorname{atan2}(r_{13}, -r_{23})$ relativa alla scelta di ϑ_1

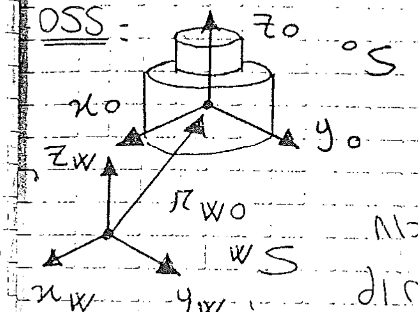
$\varphi_2 = \operatorname{atan2}(-r_{13}, r_{23})$ relativa alla scelta di ϑ_2.

Quindi abbiamo una doppia interpretazione relativamente all'utilizzo matrice di rotazione ${}^{0}R_b$: può servire per una rappresentazione minima dell'orientamento della mano oppure per risolvere il pb di cinematica inversa del polso. OSS: Visto che $^0R_m = {}^0R_m(q) \Rightarrow$ anche i singoli elementi della matrice $r_{ij}(q)$ sono delle funzioni delle variabili di giunto $\Rightarrow$ anche le soluzioni, cioè gli angoli di Eulero dipendono da q:

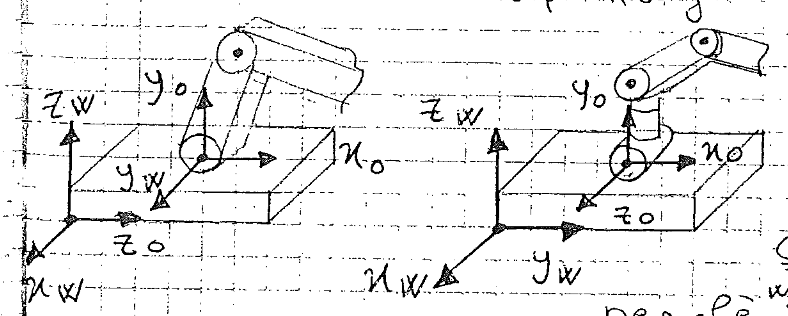
$$\begin{pmatrix} \varphi(q) \\ \vartheta(q) \\ \psi(q) \end{pmatrix} = K_o(q)$$

tale funzione dell'orientamento fa coppia con la funzione cinematica della posizione $^0r_{om}(q) = K_p(q)$ per risolvere il prob. di cinematica diretta con rappresentazione in forma minima.

OSS:

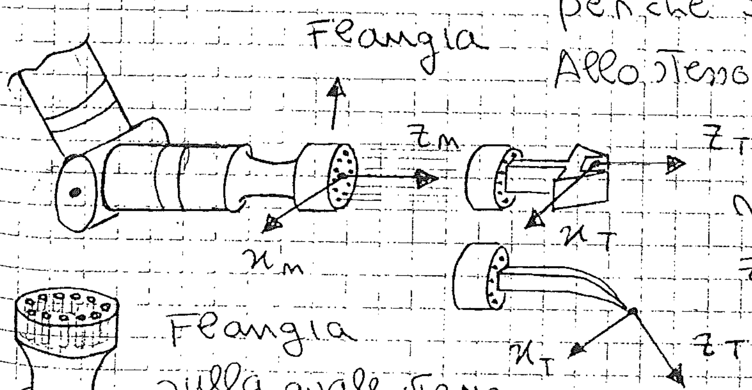


Il sistema solidale con il mondo (world) può essere anche un sistema di riferimento ^WS solidale ad ^0S ma posizionato altrove e ruotato rispetto ad ^0S. Ciò implica che $\exists$ una matrice di rototraslazione $^WT_0$ che tiene conto della posizione e dell'orientamento di ^0S rispetto al WORLD (^WS). Ciò è utile nei casi in cui il primo giunto è parallelo al terreno:

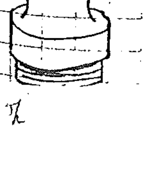


in questi casi è bene fissare un nuovo riferimento ^WS rototraslato rispetto ad ^0S.

OSS: La matrice $^WT_0 = \text{cost.}$ perché ^WS è solidale ad ^0S.



Allo stesso modo sul polso, abbiamo in genere che è ultimo riferimento ^mS ha l'asse z_m // all'asse della flangia del robot. In genere è comodo avere un riferimento ^TS sul tool.

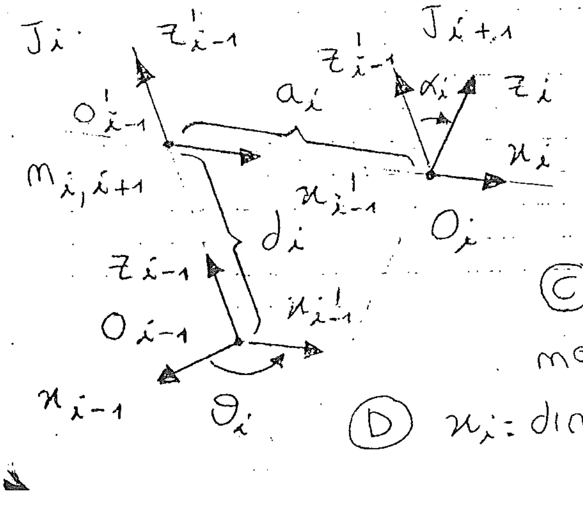


Flangia sulla quale viene ancorato il tool o mano.

orientato a seconda delle particolarità del Tool stesso. Se il Tool è montato sulla flangia $\Rightarrow$ $\exists$ una rototraslazione fissa che permette di passare da ${}^{m}S$ ad ${}^{T}S$ che chiameremo ${}^{m}T_T$. Quindi la trasformazione da ${}^{m}S$ a ${}^{0}S$ va completata estendendola con le matrici ${}^{W}T_0$ e ${}^{m}T_T$ che permettono di arrivare dal world fino al Tool: ${}^{0}T_m(q) = {}^{0}T_1(q_1) \cdots {}^{m-1}T_m(q_m)$ da questa espressione dipendente dalle variabili di giunto $\Rightarrow$

$$\boxed{{}^{W}T_T(q) = {}^{W}T_0 \, {}^{0}T_m(q) \, {}^{m}T_T = {}^{W}T_0 \, {}^{0}T_1(q_1) \cdots {}^{m-1}T_m(q_m) \, {}^{m}T_T}$$

RIC: Arbitrarietà nell'assegnazione dei parametri di Denavit-Hartenberg. La prima arbitrarietà ⓪ è quella derivante dal primo passo della procedura: assegnando z_i // all'asse del giunto J_{i+1} possiamo stabilire un verso qualunque per z_i. L'arbitrarietà ① è quella dei gradi di libertà nella scelta dell'origine O_0 di ${}^{0}S$, della direzione e verso di x_0 e del verso di z_0. La procedura dice che noti $O_{i-1} - z_{i-1} - x_{i-1}$ bisogna calcolare $O_i - z_i - x_i$ cioè i parametri di una matrice di rototraslazione ${}^{i-1}T_i(\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i)$. La procedura è univoca quando gli assi successivi sono sghembi cioè non sono paralleli e non si incontrano mai (cioè J_i e J_{i+1} entro cui è compreso il braccio b_i $\Rightarrow$ sono rette sghembe). Cioè la situazione è questa:



Ⓐ Tracciare la normale tra J_i e J_{i+1} (segmento di minima distanza);

Ⓑ O'_{i-1} = intersezione tra J_i e la normale $m_{i,i+1}$;

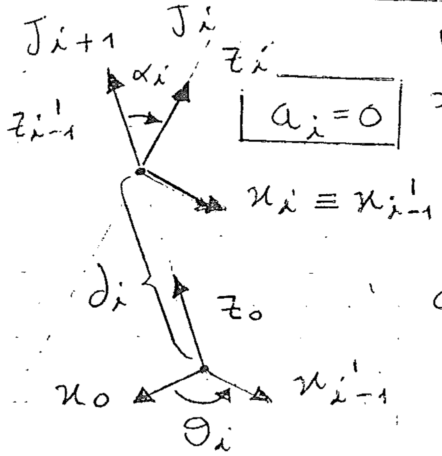
Ⓒ O_i: intersezione tra J_{i+1} e la normale $m_{i,i+1}$;

Ⓓ x_i: direzione di $m_{i,i+1}$ da J_i a J_{i+1};

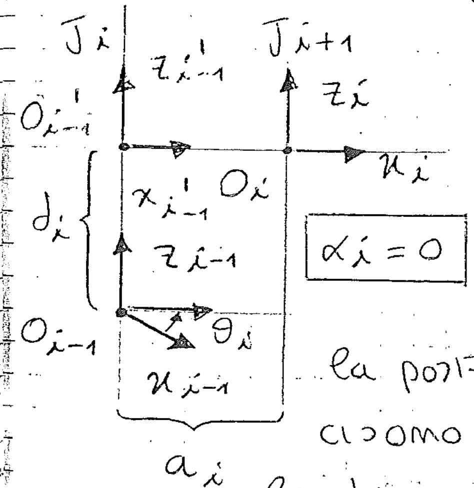
Ⓔ z_i: si sceglie lungo la direzione di J_{i+1} a partire da O_i

Ⓕ mentre y_i si sceglie in modo che la terna sia destrorsa.

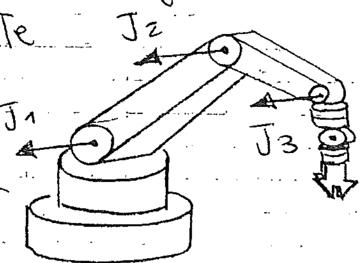
OSS: $a_i \geq 0$ sempre perché l'asse x_i ha sempre valore positivo nel verso da J_i a J_{i+1}: cioè $a_i = \| O'_{i-1} O_i \|$ mentre d_i è una coordinata lungo z_{i-1} e può quindi essere anche negativo. Consideriamo il caso in cui J_i e J_{i+1} non sono paralleli ma si incontrano in un punto: (in P_w ad esempio)



in questo caso c'è un'arbitrarietà nella scelta del verso della x_i perché $a_i = 0$ (avviene nei polsi) $\Rightarrow$ è un'arbitrarietà di tipo binario perché i versi lungo una direzione sono solo due. Infine nel caso in cui gli assi dei giunti J_i e J_{i+1} sono paralleli ho una arbitrarietà perché ho infinite rette normali ad entrambe gli assi J_i e J_{i+1} e non c'è twist tra gli assi cioè $\alpha_i = 0$. Questa situazione capita spesso nei robot antropomorfi:



Scelgo arbitrariamente la posizione di O'_{i-1} e non ci sono problemi nel determinare la direzione ed il verso di x_i.

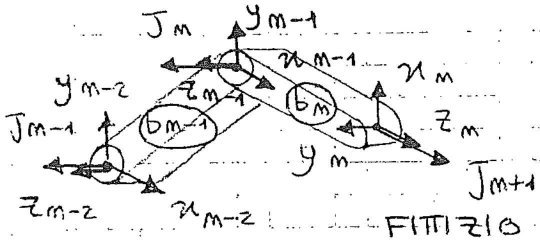


Una scelta tipica quando il giunto è prismatico è $d_i = 0 \Rightarrow O_{i-1} \equiv O'_{i-1}$. OSS: Non è una scelta vincolante perché posso sempre porre:

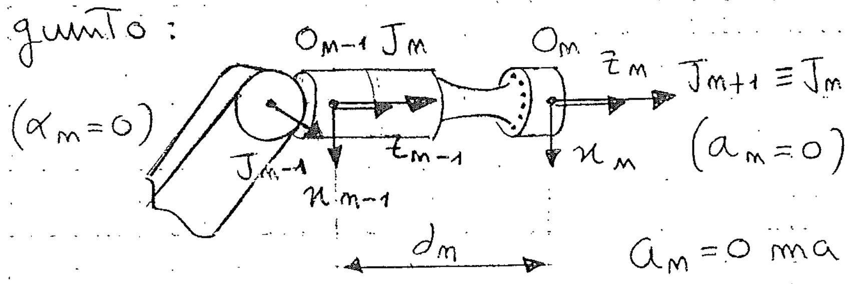
$$\begin{cases} d_i = \bar{d}_i + \delta_i \\ \text{oppure } \theta_i = \bar{\theta}_i + \delta_i \end{cases}$$

e ricondurmi alla posizione di zero.

L'algoritmo va avanti tenendo sempre conto di queste arbitrarietà e si prosegue fino all'ultimo giunto. Tuttavia la procedura può continuare fin quando ho assegnato il riferimento al penultimo braccio $\Rightarrow$ poi non si può andare avanti. Per poter completare la procedura ed avere un riferimento ${}^mS - x_m - y_m - z_m$ voluto sull'ultimo braccio b_m si aggiunge un giunto J_{m+1} fittizio che $\nexists$ realmente e serve per calcolare ${}^mS$, non è un giunto reale.

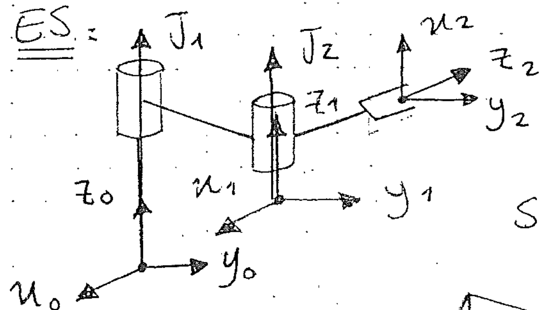


OSS: Generalmente l'ultimo braccio di un robot è montato su un giunto di tipo rotoidale $\Rightarrow$ per avere z_m parallelo o coincidente con l'asse passante per il centro flangia si sceglie $J_{m+1} \equiv J_m$, cioè l'asse fittizio parallelo all'asse dell'ultimo giunto:

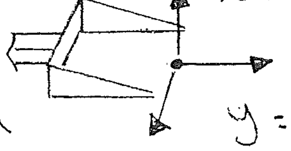


In questo particolare caso la lunghezza del braccio m non è $a_m = 0$ ma è pari a d_m. Inoltre risulta che anche $\alpha_m = 0$.

ES.:



Lo SCIAVICCO indica le coordinate del riferimento con origine nel centro del Tool con le lettere n, s ed a nel seguente modo:



x : n $\rightarrow$ normal

z : a $\rightarrow$ approach

y : s $\rightarrow$ side

A seconda del movimento della pinza, vengono assegnati dei nomi alle tre coordinate.

In questo modo risulta: ${}^mR_T = [{}^ms \ \ {}^mn \ \ {}^ma]$.

CONCLUDENDO: Noti tutti i parametri di Denavit - Hartenberg: conosciamo ${}^{i-1}T_i(q_i) = {}^{i-1}T_i(\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i)$ per i che va da $1 \rightarrow m$, cioè per tutti i bracci del robot $\Rightarrow$ la cinematica diretta è risolta.

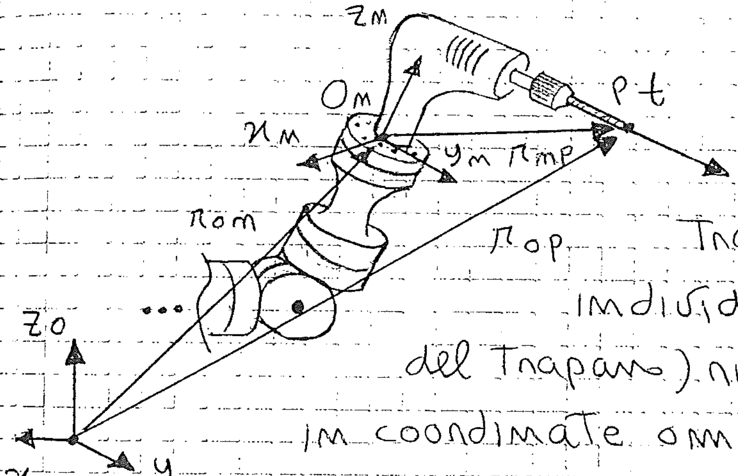
OSS: Per quanto riguarda la variabile di giunto ho:

PRISMATIC JOINT: $d_i = \bar{d}_i + q_i$ dove $\bar{\theta}_i$ e $\bar{d}_i$ stabiliscono
ROTATING JOINT: $\theta_i = \bar{\theta}_i + q_i$ i valori nulli

delle variabili di giunto. Pb: La cinematica inversa risolve due problemi distinti: esprimere in funzione delle coordinate di giunto una matrice di rototraslazione oppure trovare la rapp. minima di un certo orientamento. Il pb della cinematica diretta è stato risolto nel seguente modo:

$$ {}^0T_m(q) = {}^0T_1(q_1)\cdots{}^{m-1}T_m(q_m) = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_m(q) & {}^0r_{om}(q) \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] $$

$({}^W T_T)$



Se voglio conoscere la posizione e la direzione della punta del trapano devo trasformare il vettore r_{op} che individua il punto P (sulla punta del trapano) rispetto ad ${}^0S$, ed esprimerlo in coordinate omogenee:

$$ {}^0\tilde{r}_{op} = {}^0T_m(q)\,{}^m\tilde{r}_{op}\ ; \longrightarrow {}^m\tilde{r}_{op} = \begin{bmatrix} {}^m r_{op} \\ \hline 1 \end{bmatrix} $$

${}^0t = {}^0R_m(q)\,{}^mt = {}^0T_m(q)\,{}^m\tilde{t}$; avendo indicato ${}^m\tilde{t} = \begin{bmatrix} {}^mt \\ \hline 0 \end{bmatrix}$

Cioè se vogliamo trasformare un vettore non applicato t^m dalle coordinate ${}^mS$ alle coordinate ${}^0S$, possiamo sfruttare la matrice di rototraslazione ${}^0T_m$ moltiplicata per ${}^m\tilde{t}$, cioè il vettore in coordinate omogenee con uno 0 al posto dell'1. Un vettore non applicato è un vettore del quale interessa solo l'orientamento e non il punto di applicazione. Quando voglio lavorare con vettori applicati:

$$ {}^0\tilde{r}_{op} = {}^0T_m(q)\,{}^m\tilde{r}_{op} = \begin{bmatrix} {}^0R_m(q)\,{}^mr_{op} + {}^0r_{om}(q) \\ \hline 1 \end{bmatrix} \rightarrow $$

→ Questo è un vettore applicato perchè è in coordinate omogenee e presenta un 1. OSS: I vettori applicati si usano in geometria per individuare punti all'∞, che possono essere individuati solo da direzioni.

CINEMATICA INVERSA

Pb: Specificata la matrice di rototraslazione, $\exists$ la possibilità di avere tale configurazione, cioè quale o quali sono le configurazioni q_i (delle variabili di giunto) che danno luogo ad una stessa posa o postura del robot? È un Pb di risoluzione di sistemi di eq. non lineari. La cinematica inversa risolve anche il pb della rapp. minima di un certo orientamento espresso da una matrice di rotazione ${}^0R_n$, mediante rappresentazione con angoli di Eulero φ, θ, ψ e mediante rotazioni z, x, z attorno ad assi elementari $\rightarrow$ si ottiene così la rapp. minima nella forma:

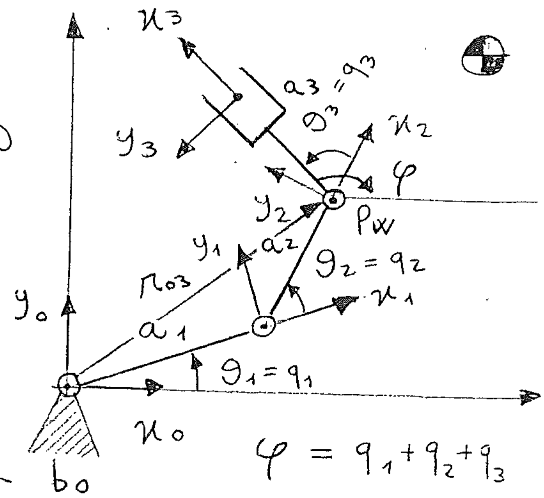
$$K(q) = \begin{bmatrix} {}^0P_{on} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p(q) \\ K_o(q) \end{bmatrix}$$

Se q è noto il Pb di cinematica diretta è facilmente risolvibile grazie alle eq. cinematiche $K_p(q)$ e $K_o(q)$. Nel pb cinematico inverso, dati φ, θ, ψ si vuole risalire al valore di q. Abbiamo un sistema di sei equazioni (3 per la rapp. della posizione + 3 aggiuntive per la rapp. dell'orientamento) non lineari in n incognite (variabili di giunto $q_1, q_2, \dots, q_n$) $\Longrightarrow$ si useranno dei metodi numerici per la risoluzione. Tuttavia $\exists$ casi particolari in cui è possibile calcolare la soluzione in forma chiusa (ad esempio nel robot antropomorfo con polso sferico).

ROBOT PLANARE ANTROPOMORFO A TRE BRACCI (in $\mathbb{R}^2$)

È una struttura a 3 bracci connessi da tre giunti sferici, per la quale è possibile trovare una soluzione in forma chiusa al

Pb cinematico inverso: facciamo delle semplificazioni. Poniamo che $\alpha_i = d_i = 0 \ \forall i$ (assi dei giunti tutti paralleli e riferimenti giacenti sullo stesso piano x_0-y_0), mentre è orientamento del riferimento ${}^3S$ è specificato dall'angolo φ tra il braccio a_3 ed l'asse x_0 del riferim. ${}^0S$: in tal modo la formulazione della cinematica diretta in forma minima (cioè con è orientamento in forma minima) è:

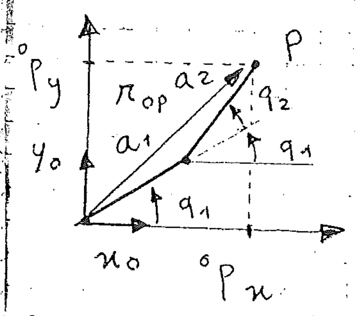


$$\begin{bmatrix} {}^0r_{03} \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c q_1 + a_2 c q_{12} + a_3 c q_{123} \\ a_1 s q_1 + a_2 s q_{12} + a_3 s q_{123} \\ q_1 + q_2 + q_3 \end{bmatrix}$$

Mentre la rappresentazione in forma non minima è la seguente:

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^0R_3 & {}^0r_{03} \\ \hline 000 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} c q_{123} & -s q_{123} & \\ s q_{123} & c q_{123} & {}^0r_{03}(q) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Il calcolo di φ date le variabili di giunto è banale. Il Pb cinematico inverso consiste nel determinare q_1, q_2 e q_3 una volta assegnate una posizione ed un certo orientamento del braccio a_3.
Per poterlo risolvere, si consideri prima la seguente situazione:



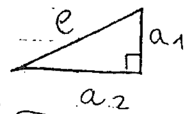
cioè un robot a due bracci planare con due giunti.

$${}^0P = \begin{bmatrix} {}^0P_x \\ {}^0P_y \end{bmatrix}$$

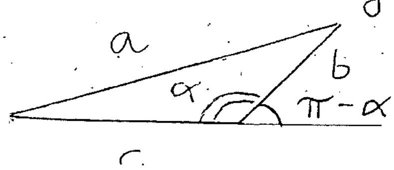
$\exists$ due soluzioni che individuano il punto P assegnato: una soluz. a gomito giù ed una a gomito su. Se esprimiamo le coordinate $\Rightarrow$ sistema di 2 eq. in 2 incognite

con $\begin{cases} {}^0P_x = a_1 c q_1 + a_2 c q_{12} \\ {}^0P_y = a_1 s q_1 + a_2 s q_{12} \end{cases}$

OSS: Teorema di pitagora $\ell = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



Il Teorema di Pitagora generalizzato afferma che dato un



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - \alpha)$$

infatti, operando la somma dei quadrati otteniamo:

$${}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 = a_1^2 + 2a_1a_2\,(cq_1\,cq_{12} + sq_1\,sq_{12}) + a_2^2 \Rightarrow$$

OSS: $\boxed{\cos q_2 = c\big((q_1+q_2)-q_1\big) = cq_1\,cq_{12} + sq_1\,sq_{12}}$

$$\Rightarrow {}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\,cq_2 \Rightarrow$$

OSS: $\begin{cases} \text{Se } q_2 = 0 \Rightarrow {}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 = (a_1+a_2)^2 \rightarrow \text{braccio esteso} \\ \text{Se } q_2 = \pi \Rightarrow {}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 = (a_1-a_2)^2 \rightarrow \text{braccio ripiegato} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Possiamo calcolare la soluzione così: $\boxed{cq_2 = \dfrac{{}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 - (a_1^2+a_2^2)}{2a_1a_2} = \bar{c}}$

OSS: La soluzione può anche essere scritta nella forma:

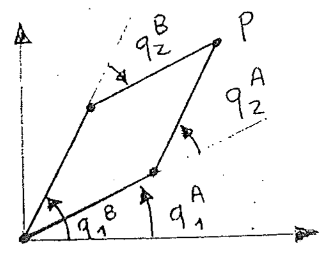
$$cq_2 = \frac{{}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 - (a_1^2+a_2^2+2a_1a_2) + 2a_1a_2}{2a_1a_2} =$$

$$= \frac{{}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 - (a_1+a_2)^2 + 2a_1a_2}{2a_1a_2} = 1 + \frac{({}^0p_x^2 + {}^0p_y^2) - (a_1+a_2)^2}{2a_1a_2}$$

In questo modo è messo in evidenza il fatto che se il punto P è tale ${}^0p_x^2 + {}^0p_y^2 > (a_1+a_2)^2 \Rightarrow$ il punto P è fuori dello spazio di lavoro del braccio e non può essere raggiunto (neanche con il braccio completamente esteso). $\exists$ 2 soluzioni ammissibili per q_2 e sono:

(A): $\cos q_2^A = \bar{c}$ con $q_2^A > 0$, $q_2^A \in (0,\pi)$ e $\sin q_2^A = \sqrt{1-\bar{c}^2}$

(B): $\cos q_2^B = \bar{c}$ con $q_2^B < 0$, $q_2^B \in (-\pi,0)$ e $\sin q_2^B = -\sqrt{1-\bar{c}^2}$



Le due soluzioni prendono il nome:

(A) $\rightarrow$ soluzione gomito giù

(B) $\rightarrow$ soluzione gomito su

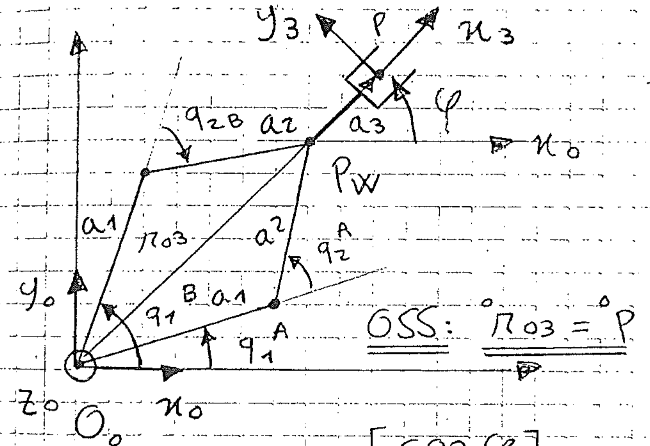
Applicando le formule di addizione e sottrazione al sistema di partenza, si ottiene:

$$\Rightarrow \begin{cases} {}^0p_x = a_1\,cq_1 + a_2(cq_1\,cq_2 - sq_1\,sq_2) \\ {}^0p_y = a_1\,sq_1 + a_2(sq_1\,cq_2 + cq_1\,sq_2) \end{cases}$$

Sistema lineare nelle incognite sq_1 e $\cos q_1$ che

sia risolto due volte: (A) noti sq_2^A e $cq_2^A \rightarrow$ si calcolano sq_1^A e cq_1^A e poi (B) noti sq_2^B e $cq_2^B \rightarrow$ si calcolano sq_1^B e cq_1^B.
Questo procedimento è preliminare alla risoluzione del pb di cinematica inversa del robot planare a tre bracci in cui si specifica l'orientamento $\rightarrow$ robot non ridondante. Per tale robot continuano ad esistere ancora due soluzioni. (OSS: Nel caso in cui non venga richiesto un determinato orientamento $\Rightarrow$ il robot è ridondante $\Rightarrow$ ho ∞ soluzioni).

OSS: Risolto il sistema ottengo sq_1 e cq_1 $\Rightarrow$ per ottenere q_1 uso la funzione: $q_1 = \text{atan2}(sq_1, cq_1)$



OSS: ${}^0r_{03} = {}^0P$

Se sono specificate le coordinate del centro della mano (${}^0P = {}^0r_{03}$) ed il suo orientamento, posso risalire alle coordinate del centro del polso nel seguente modo: $\boxed{{}^0P_W = {}^0P - x_3 a_3}$

essendo ${}^0x_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$ con φ assegnato da specifica.

$${}^0P_W = \begin{bmatrix} {}^0P_{W,x} \\ {}^0P_{W,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0P_x - a_3\cos\varphi \\ {}^0P_y - a_3\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Avendo già calcolato le variabili di giunto: infatti assegnata una certa posizione del polso precedentemente abbiamo visto come calcolare le due configurazioni (A) e (B) delle q_1 e q_2 che la realizzano. Note q_1, q_2 e l'orientamento φ, calcolare q_3 diventa banale.

Note $q_1^A, q_2^A \rightarrow q_3^A = \varphi - q_1^A - q_2^A$

Note $q_1^B, q_2^B \rightarrow q_3^B = \varphi - q_1^B - q_2^B$

Abbiamo così risolto il Pb della cinematica inversa per il robot planare con compito in $\mathbb{R}^2$. Possiamo risolvere lo stesso problema per un robot con compito in $\mathbb{R}^3$ a sei gradi di libertà, usando formule analoghe: