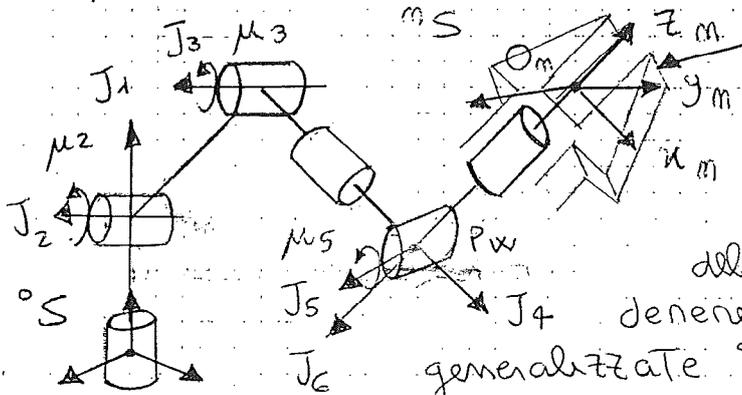


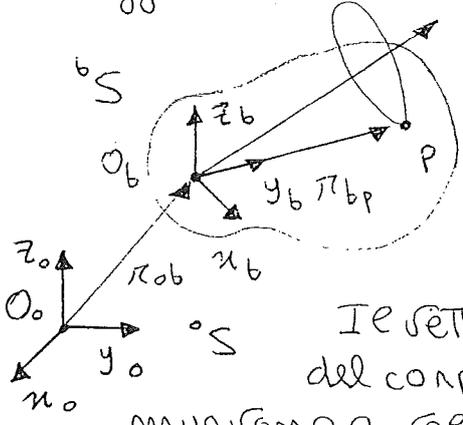
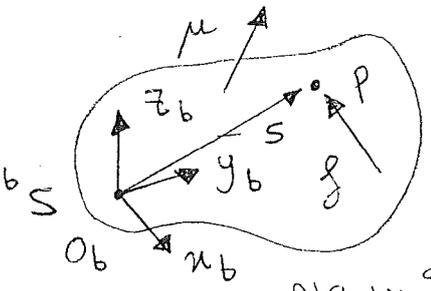
**STATICA** (Studio delle condizioni di equilibrio dei corpi)  
 Lo studio della statica si propone di calcolare il vettore di forze/coppie ai giunti (espresso da attuatori relativi a giunti prismatici / rotoidali) che equilibra una determinata forza/coppia applicata all'estremità del robot.



Forza esterna dovuta all'interazione del robot con l'ambiente (dovuta ad esempio alla gravità oppure alla pressione delle mani su un oggetto). Compileneremo un vettore di forze generalizzate  ${}^o F_e = \begin{pmatrix} f \\ \mu \end{pmatrix}$  che comprende

forze  $f$  e coppie  $\mu$ . (Analogo al vettore velocità generalizzata  ${}^o v_j = \begin{pmatrix} \dot{\pi} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix}$ ).

Siamo interessati a vettori di forze generalizzate applicate all'origine del sistema di riferimento  ${}^m S$ , cioè in  $O_m$ . Se ho infatti un corpo rigido con un riferimento  ${}^b S$  ancorato (la mano con riferimento  ${}^m S$ ) con  $S = \pi_{bp}$ , ed applico una forza  $f$  nel punto  $P$ , tale forza ha effetti differenti a seconda del punto di applicazione ( $\pi_{bp}$  è costante in  ${}^b S$  e varia in  ${}^o S$ ). La coppia  $\mu$  al contrario produce un effetto che non dipende dal punto di applicazione.



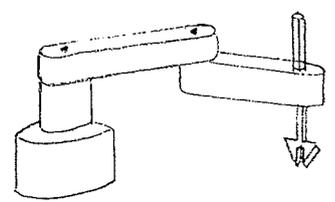
Infatti se il corpo ha una velocità angolare  $w_b$ , ilmente dal punto di applicazione del vettore  $w_b$ , tutti i punti del corpo hanno una velocità:  $\dot{\pi}_{op} = \dot{\pi}_{ob} + w_b \times \pi_{bp}$

Il vettore  $w_b$  individua un asse invariante del corpo. Se  $O_b$  è fermo  $\Rightarrow$  Tutti i punti si muovono a velocità  $\dot{\pi}_{op} = w_b \times \pi_{bp}$ .  
 Il vettore di forze applicato al generico punto  $P$ , può essere pensato come applicato all'origine di  ${}^m S$ , che fisicamente potrebbe anche non essere raggiungibile.  ${}^o F_e = \begin{pmatrix} f_m \\ \mu_m \end{pmatrix}$  132

Tale  ${}^0F_e$  è la risultante delle forze e delle coppie applicate alla mano. Tale vettore di forze viene bilanciato dal vettore  $\tau$  delle forze prodotte dagli  $m$  attuatori relativi agli  $m$  giunti del robot:

ppia  
ta  
no  
ie  
a  
one  
no

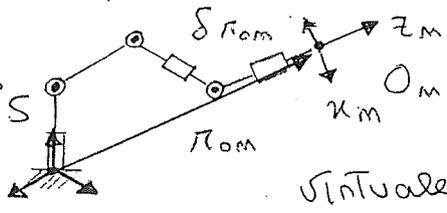
$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$



Per lo studio della statica supponiamo l'assenza della gravità (cioè supponiamo che la gravità non abbia effetto sulla struttura del robot).  $\exists$  cmq alcune geometrie non influenzate dalla gravità perché non risentono delle forze e coppie prodotte grazie alle reazioni vincolari (robot  $\rightarrow$  scara).

Supponiamo di voler bilanciare delle forze esterne (non la gravità)  $\rightarrow$  dobbiamo calcolare  $\tau$  che bilancia  ${}^0F_e$ . Applichiamo a tale scopo il PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI. La differenza spostamento elementare e virtuale è che mentre il primo è relativo ad un moto effettivo del sistema in un intervallo  $(t, t+dt)$  compatibile con i vincoli, il secondo è relativo ad un moto fittizio del sistema con vincoli non invarianti e coincidenti con quelli all'istante  $t$ . Al concetto di spostamento virtuale si può associare quello di lavoro virtuale di un sistema di forze. Il principio dei lavori virtuali afferma che il robot è in equilibrio se i vettori di forze e coppie  $\tau$  ed  ${}^0F_e$  danno dei lavori virtuali nulli. Il lavoro virtuale relativo ad uno spostamento virtuale del punto  $O_m \rightarrow \delta \pi_{om} \cong \delta {}^0\pi_{om}$  cioè  ${}^0F_e \rightarrow \delta \pi_{om}$ . Uno spostamento virtuale angolare può essere espresso nel seguente modo:

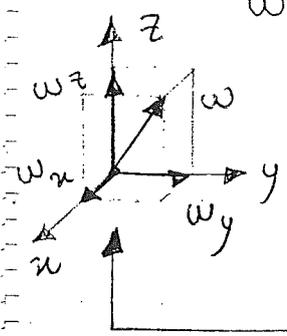
ento  
nto  
x  
he  
odi  
sa  
e



virtuale angolare può essere espresso nel seguente modo:

To

$$\omega dt = \begin{bmatrix} \omega_x dt \\ \omega_y dt \\ \omega_z dt \end{bmatrix} \rightarrow \text{angoli.}$$



Nella rappresentazione mediante gli angoli di Eulers  $(\varphi, \theta, \psi)$  dell'orientamento, una variazione di questi angoli comporta una variazione dell'orientamento:

Te  
si

$$\delta \tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \theta \\ \delta \psi \end{bmatrix}$$

è una variazione ambigua se non si specifica la sequenza con la quale si effettuano le rotazioni

per passare dall'orientamento  ${}^0R_m(t)$  all'orientamento  ${}^0R_m(t+dt)$ . Si dimostra che per piccoli spostamenti angolari le rotazioni sono commutative e quindi la variazione dell'orientamento non è univocamente determinata in questa maniera ambigua

DIM: Si considerino le notazioni seguenti:

$$R_x(\varphi_x) R_y(\varphi_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi_x & -s\varphi_x \\ 0 & s\varphi_x & c\varphi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi_y & 0 & s\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\varphi_y & 0 & c\varphi_y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

In generale risulta che:

$R_x(\varphi_x) R_y(\varphi_y) \neq R_y(\varphi_y) R_x(\varphi_x)$ , ma se consideriamo delle piccole notazioni.

cioè  $\varphi_y^2 \ll \varphi_y$ ,  $\varphi_x^2 \ll \varphi_x$  e  $\varphi_x \varphi_y \ll \varphi_x$ ,  $\varphi_y$  allora posso pensare allo sviluppo in serie arrestato al primo ordine delle funzioni

$$\text{zero e coseno: } \begin{cases} \sin \varphi_x \cong \varphi_x \\ \cos \varphi_x \cong 1 \end{cases}$$

$$\text{Impatto: } \sin \varphi_x = \sin(0) + \frac{d \sin}{d \varphi_x} \Big|_{\varphi_x=0} \varphi_x + \frac{1}{2} \frac{d^2 \sin}{d \varphi_x^2} \Big|_{\varphi_x=0} \varphi_x^2 = \varphi_x$$

$$\Rightarrow R_x(\varphi_x) R_y(\varphi_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varphi_x \\ 0 & \varphi_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x(\varphi_x) R_y(\varphi_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi_y \\ \varphi_x \varphi_y & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{bmatrix}$$

Imprimitezza di ordine superiore

Se ora consideriamo anche la  $R_z(\varphi_z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_x R_y R_z = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{bmatrix} = (I + [\varphi \times]) \quad \square$$

Com  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$  si ottiene una matrice di notazione in questa forma  $\forall$  sia la sequenze delle notazioni elementari.

La matrice di notazione completa è  $\mathbb{I}$  dall'ordine delle notazioni elementari, purché tali notazioni siano piccole.

Una piccola notazione di un angolo  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$  è equivalente ad una notazione con velocità  $\omega$  per un tempo  $dt$ .

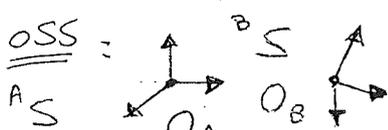
$$\text{Si ricondi } \left\{ \begin{aligned} \dot{\pi}_{mp} &= [\omega_m \times] \pi_{mp} \\ \pi_{mp} &= R_m(t) \pi_{mp} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [{}^{\circ}\omega_m \times] \dot{\pi}_{mp} = \dot{\pi}_{mp} = \dot{R}_m(t)^m \pi_{mp} = \dot{R}_m(t)^m R_o \pi_{mp} =$$

$$= \dot{R}_m(t) {}^{\circ}R_m^T \pi_{mp} \Rightarrow [{}^{\circ}\omega_m \times] \pi_{mp} = \dot{R}_m(t) {}^{\circ}R_m^T \pi_{mp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[{}^{\circ}\omega_m \times] = \dot{R}_m(t) {}^{\circ}R_m^T} \oplus \text{ Consideriamo ora lo sviluppo in serie al primo ordine dell'a:}$$

$${}^{\circ}R_m(t+dt) = {}^{\circ}R_m(t) + \dot{R}_m(t) dt \xrightarrow{\oplus} \text{ Sviluppo 1° ordine di } {}^{\circ}R_m(t+dt)$$



La notazione per pontare AS a sovrapporsi con BS, una volta noti gli orientamenti dei due riferimenti, può essere ricavata da:

$${}^{\circ}R_B = {}^{\circ}R_A {}^A R_B \Rightarrow {}^A R_B = {}^{\circ}R_A^T {}^{\circ}R_B = {}^A R_o {}^{\circ}R_B \rightarrow \text{ attorno asse di Euler}$$

Poniamo ragionare in modo analogo per ricavare la matrice di notazione differenza che porta dall'orientamento  ${}^{\circ}R_m(t)$  ad  ${}^{\circ}R_m(t+dt)$  cioè ea:

$$\boxed{R_{t,dt} = {}^{\circ}R_m^T(t) {}^{\circ}R_m(t+dt)}$$

Equivalente ad una piccola notazione attorno all'asse di Euler.

Sostituendo è approssimazione  $\oplus \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_{t,dt} = {}^{\circ}R_m^T(t) ({}^{\circ}R_m(t) + \dot{R}_m(t) dt) = I + \underline{{}^{\circ}R_m^T(t) \dot{R}_m(t)} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{t,dt} = I + \dot{R}_m^T(t) \dot{R}_m(t) dt = I + \underline{[{}^m\omega_m \times]} dt \odot$$

Infatti quando calcolo m e  $\varphi$  (angoli ed asse di Euler) corrispondenti alla notazione  $R_{t,dt}$ , e ottengo nelle coordinate del sistema di partenza cioè in  ${}^m S$  (AS).

$$\Rightarrow \dot{\pi}_{op} = \dot{\pi}_{mp} = [{}^{\circ}\omega_m \times] \pi_{mp} : \text{ nelle coordinate del corpo} \rightarrow$$

↳ mom c'è traslazione

$$\rightarrow {}^m \dot{\pi}_{mp} = [{}^m\omega_m \times] {}^m \pi_{mp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^m \dot{\pi}_{mp} = {}^{\circ}R_m^T \dot{\pi}_{mp} = {}^{\circ}R_m^T [{}^{\circ}\omega_m \times] \pi_{mp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^m \dot{\pi}_{mp} = {}^{\circ}R_m^T [{}^{\circ}\omega_m \times] {}^{\circ}R_m^m \pi_{mp} \Rightarrow \text{Eguagliando la prima}$$

espressione di  ${}^m \dot{\pi}_{mp}$  con l'ultima risulta che per  $\forall \pi_{mp} \Rightarrow$

$$\boxed{[{}^m\omega_m \times] = {}^{\circ}R_m^T [{}^{\circ}\omega_m \times] {}^{\circ}R_m} \odot \text{ È una trasformazione di similitudine del tipo } \tilde{A} = TAT^{-1}$$

$$\text{oss} : [{}^{\circ}R_m^T {}^{\circ}\omega_m \times] {}^{\circ}R_m = [{}^m\omega_m \times]$$

Poniamo adesso dimostrare che sostituendo ea  $\oplus$  nelle  $\odot$

$$[{}^m \omega_m \times] = {}^o R_m^T [{}^o \omega_m \times] {}^o R_m = {}^o R_m^T \dot{{}^o R}_m(t) \cancel{B}_m \cancel{B}_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [{}^m \omega_m \times] = {}^o R_m^T \dot{{}^o R}_m(t) \text{ come si è indicato nella } \odot$$

Quindi una notazione piccola da  ${}^m S$  al tempo  $t$  ad  ${}^m S$  al tempo  $t+dt$  (notazione a velocità  $\omega_m$  per un tempo infinitesimo  $dt$ ) si può esprimere nelle coordinate locali ( ${}^m S$ ) come:

$$R_{t,dt} = I + [{}^m \omega_m \times] dt$$

La notazione è del tipo  $\omega dt$  cioè scomponibile in 3 rotazioni elementari tra loro commutative. La commutatività delle piccole notazioni  $\Rightarrow$  si può interpretare (rappresentare) la variazione dell'orientamento come la variazione di 3 angoli senza un'aria dell'ordine con cui tali variazioni sono avvenute. Quindi uno spostamento virtuale e invece di  $O_m$  è  $\int \pi_{om}$  nelle coordinate di  ${}^o S$  mentre spostamento virtuale angolare (variazione dell'orientamento) si può scrivere nella forma  ${}^o \omega_m dt$  nelle coordinate di  ${}^o S$ :

$$\Rightarrow {}^o \delta_m dt = \begin{bmatrix} \int \pi_{om} \\ {}^o \omega_m dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\pi}_{om} dt \\ {}^o \omega_m dt \end{bmatrix}$$

Moltiplicando per il vettore delle forze generalizzate esterne otteniamo il lavoro virtuale e compiuto dalle forze esterne sul robot:

$$F_{e,m} = \begin{bmatrix} f_m \\ \mu_m \end{bmatrix}$$

$$W_e = F_{e,m}^T \delta_m dt = \int_m^T \dot{\pi}_{om} dt + \mu_m^T \omega_m dt$$

Il pedice "m" che compare nei vettori indica che le forze e le coppie sono applicate al centro  $O_m$  del riferimento  ${}^m S$  solidale con la mano del robot. La potenza esterna entrante nel robot è la seguente:

$$P_e = \frac{W_e}{dt} = F_{e,m}^T \delta_m = \int_m^T \dot{\pi}_{om} + \mu_m^T \omega_m$$

Se lo spostamento è virtuale si parla quindi di lavoro e potenza virtuale.  $W_e$  e  $P_e$  sono il lavoro virtuale compiuto dall'esterno sul robot e la potenza virtuale erogata dall'esterno al robot. Analogamente se ho un vettore di forze generalizzate sui giunti:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_m \end{pmatrix} \text{ ed un}$$

Settore di spostamenti virtuali dei giunti:  $dq = \begin{pmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_m \end{pmatrix}$

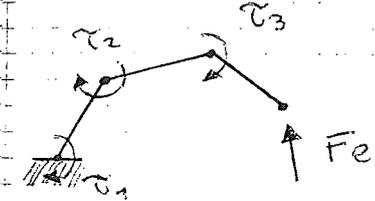
possiamo calcolare l'energia erogata, dagli attuatori relativi ai giunti, verso l'esterno per quel dato spostamento come:

$$W_A = \tau^T dq = \tau_1 dq_1 + \dots + \tau_m dq_m$$

mentre la potenza erogata all'esterno dagli attuatori è:

$$P_A = \tau^T \dot{q} = \tau_1 \dot{q}_1 + \dots + \tau_m \dot{q}_m$$

A seconda che il giunto sia prismatico o rotoidale, il contributo alla potenza  $P_A$  è del tipo forza per velocità o coppia per velocità angolare mentre il contributo al lavoro  $W_A$  è del tipo forza per spostamento o coppia per spostamento angolare. Per il principio dei lavori virtuali, il sistema robot (meccanico) è in equilibrio se la somma algebrica dei lavori virtuali delle forze esterne e delle forze prodotte dagli attuatori è identicamente nulla in corrispondenza di  $\forall$  spostamento virtuale:



$$W_A + W_e = 0 \Rightarrow \tau^T dq + F_{em}^T v_m dt = 0$$

cioè l'energia comunicata dall'esterno al robot + quella che il robot comunica all'esterno

è nulla in corrispondenza di uno spostamento virtuale.

OSS: A rigore, visto che stiamo considerando lavori virtuali, nella formulazione del principio il tempo  $dt$  non deve comparire cioè:

$$v_m dt = \left( \frac{\delta \pi_{om}}{\delta \varphi} \right) \text{ con } \delta \varphi = \omega dt = \begin{pmatrix} \omega_x dt \\ \omega_y dt \\ \omega_z dt \end{pmatrix}$$

OSS: Dalla relazione che specifica la condizione per cui il robot risulta essere in equilibrio (⊙) sostituendo  $dq = \dot{q} dt$

$\Rightarrow \tau^T \dot{q} dt + F_{em}^T v_m dt = 0$ , visto  $\forall dt$  e per spostamenti virtuali ammissibili dato i vincoli  $\exists$  tutti sulle cinematica del robot. Infatti non tutti gli spostamenti virtuali sono ammissibili perché  $\dot{q}$  e  $v_m$  sono legate dalla:  $v_m = J(q) \dot{q}$ . In termini di spostamenti virtuali questo stesso legame è esprimibile con:  $v_m dt = J(q) \delta q$  oppure  $\delta p = J(q) \delta q$  dove  $p$  è la posizione cartesiana dell'organo terminale.

Sostituendo i vincoli nella ⊙ si ottiene:

$$\tau^T \dot{q} + F_{em}^T J(q) \dot{q} = 0 \quad \text{valida } \forall \dot{q} \quad \text{oppure } \text{e} \dot{a}:$$

$$\boxed{\tau^T \delta q + {}^0 F_{em}^T J(q) \delta q = 0} \quad \forall \delta q \Rightarrow \text{STATICA DEL ROBOT}$$

$$\Rightarrow \tau^T + {}^0 F_{em}^T J(q) = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = -J^T(q) {}^0 F_{em}}$$

Questa relazione risolve il

pb della determinazione del vettore di forze  $\tau$  da applicare ai giunti, che equilibra il vettore di forze esterne  $F_{em}$  applicato alla mano del robot  $\rightarrow$  in assenza di gravità.

OSS: Spesso la condizione di statica del robot viene espressa:

$$\boxed{\tau_e = J^T(q) {}^0 F_{em}}$$

In questa forma infatti viene descritto come il vettore di forze esterne  ${}^0 F_{em}$

si trasmette sui giunti del robot  $\Rightarrow \tau = -\tau_e$  cioè gli attuatori producono una forza uguale ed opposta a quella che

la  ${}^0 F_{em}$  trasmette sui giunti (oppure questa forma è usata

quando  ${}^0 F_{em}$  rappresenta il vettore di forze che il robot

esercita verso l'esterno ed in questo caso  $\tau$  torna ad assu-

mere il suo significato originario). La presenza della gra-

vità si tiene in conto considerando che il lavoro della

${}^0 F_{em}$  può contribuire ad aumentare il potenziale del robot.

Ciò si ottiene aggiungendo il termine  ${}^0 F_{em}$  con segno positivo

nelle eq. di dinamica.

OSS: Le formule 
$$\begin{cases} \tau = -J^T(q) {}^0 F_{em} \\ \tau_e = J^T(q) {}^0 F_{em} \end{cases}$$
 sono struttural-

mente analoghe alla formula cinematica  ${}^0 v_m = J(q) \dot{q}$ .

Quest'ultima relazione è del tipo  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^6$  e trasforma

i movimenti dei giunti in movimenti cartesiani mentre le

prime due sono del tipo  $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^m$  e trasforma forze

esterne applicate al robot nelle corrispondenti forze tras-

messe sui giunti del robot. Inoltre queste due prime for-

mule forniscono un'altra interpretazione all'algoritmo

dello Jacobiano trasposto.

OSS: Data una generica matrice  $A \rightarrow R(A)^\perp \equiv \mathcal{N}(A^T)$

cioè il complemento ortogonale del range della matrice

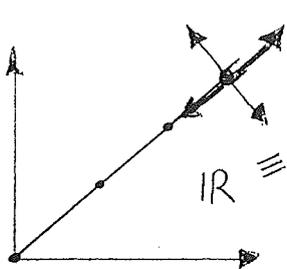
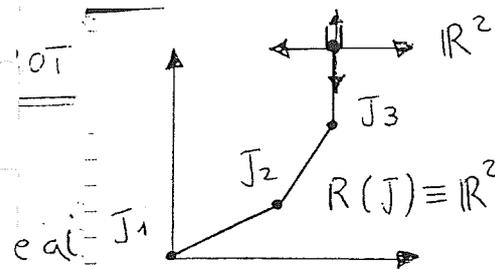
$A$  è coincidente con il nullo della matrice  $A$  trasposta.

In robotica è applicabile:  $(R(J(q)))^\perp \equiv \mathcal{N}(J^T(q))$

l'interpretazione geometrica è di facile intuizione se

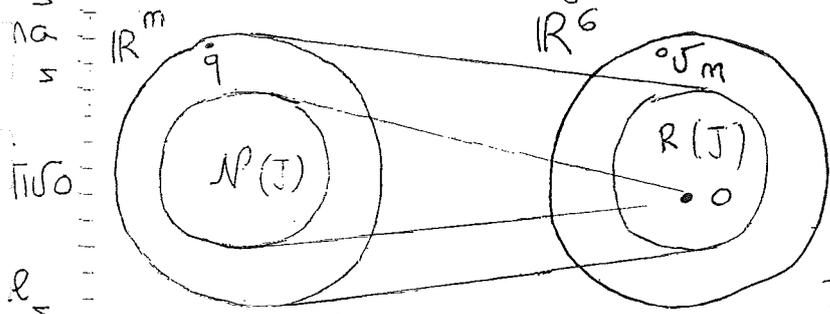
si lavora con un robot planare in  $\mathbb{R}^2$  a 3 giunti rotoidali.

Quando  $R(J)$  non è più  $\mathbb{R}^2$  perché  $\exists$  singolarità  $\Rightarrow$



$(R(J))^{\perp}$  Le velocità non realizzabili appartengono a  $(R(J))^{\perp}$  che coincide con lo spazio  $\mathcal{N}(J^T)$ , cioè è l'insieme di tutte quelle

forze applicate dall'esterno che moltiplicate per  $J^T(q)$  danno forze trasmesse ai giunti pari a zero  $\Rightarrow$  sono cioè quelle forze che non richiediamo ulteriori forze  $\tau_e$  sui giunti per essere equilibrate perché vengono controbilanciate dai vincoli distribuita sulla struttura stessa del robot. L'effetto di una forza esterna sul robot, dipende dalla configurazione che il robot stesso assume in quel momento. Se non siamo in singolarità cinematica  $\Rightarrow \tau_e \neq 0$  sempre cioè  $\forall \tau_e$  la  $F_{em}$  applicata. Se invece siamo in singolarità cinematica  $\Rightarrow \exists$  delle direzioni che controbilanciano le forze esterne con i vincoli strutturali.



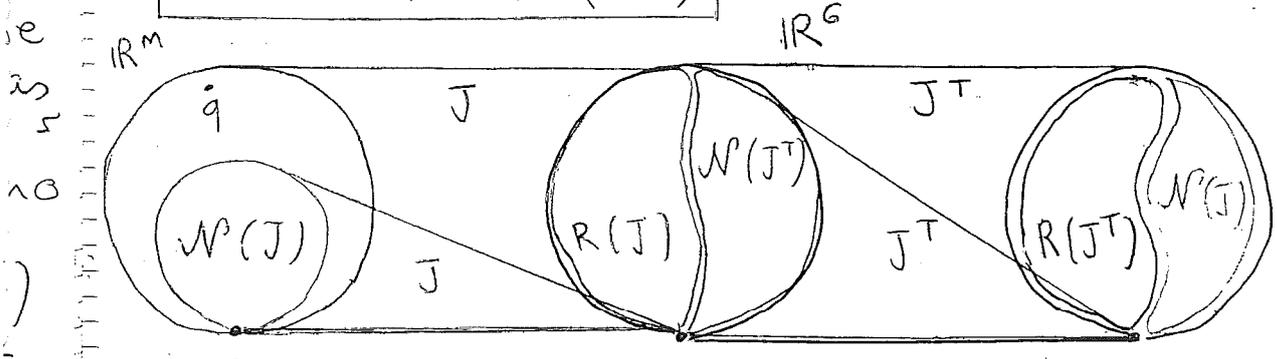
Un teorema di geometria afferma che data una matrice  $A_{m \times m}$  ( $\forall$  operatore)  $\Rightarrow \mathbb{C}^m = R(A) \oplus (R(A))^{\perp}$   
In robotica è applicabile:

VELOCITÀ DI GIUNTO VELOCITÀ CARTESIANE

$$\mathbb{R}^6 = R(J) \oplus (R(J))^{\perp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^6 = R(J) \oplus \mathcal{N}(J^T)$$

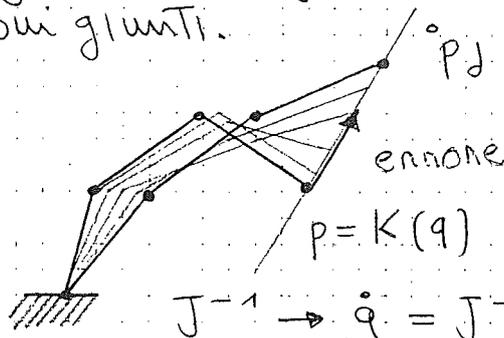
$$(R(J))^{\perp} = \mathcal{N}(J^T)$$



VELOCITÀ DI GIUNTO VELOCITÀ CARTESIANE FORZE SUI GIUNTI

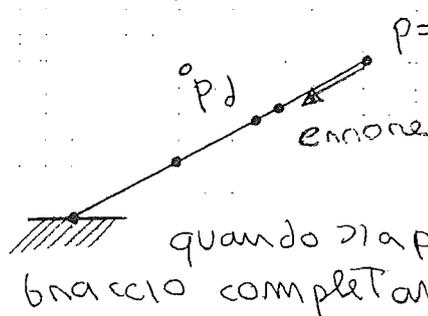
Impatti  $\mathbb{R}^m = R(J^T) \oplus \mathcal{N}(J)$ . Possiamo dare un'altra interpretazione dell'«Jacobiano trasposto in quanto tras

forma la forza esterna  $F_{ext}$  in forze e coppie agenti sui giunti.



Si può ragionare come si è visto per l'algoritmo del Jacobiano inverso quando si deve determinare  $q$  che produce una  $v_d$  con direzione dell'errore di posizione:

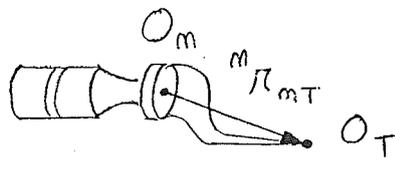
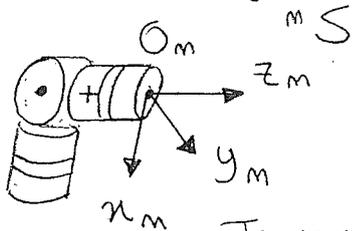
Te si applica una forza con direzione dell'errore di posizione (si giunge che l'errore esercita una forza di attrazione per la mano. Questo algoritmo fallisce quando



si sono in configurazioni singolari e l'errore è quindi la forza agisce nella direzione del null del Jacobiano trasposto. Ad esempio

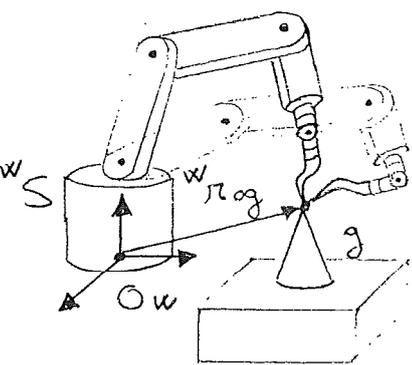
quando si applica una forza parallelamente ad un braccio completamente disteso.

EX. Esercizio di cinematica → Nel KUKA  $\exists$  una routine che serve per assegnare la posizione del riferimento del TOOL agganciato alla flangia



del robot rispetto al riferimento  ${}^mS$  con centro  $O_m$  coincidente con il centro flangia.

Immagini il riferimento  ${}^mS$  viene chiamato TOOL  $\emptyset$ . Quando viene collegata la mano è possibile definire una Terza  ${}^T S$  detta TOOL 1 solidale con  ${}^mS$  ma non traslata rispetto ad esse (per mezzo di una matrice di rotazione costante). Per conoscere la posizione di  $O_T$  rispetto ad  $O_m$  cioè il vettore  ${}^m r_{mT}$   $\exists$  una procedura:



si punta la mano del robot su un oggetto a punta posto sul tavolo (in modo che  $O_T$  coincida con la punta del cono)  $\Rightarrow$  si mette a contatto  $O_T$  con il punto fisso e si memorizza la posizione e si ripete questa operazione per 4 volte cioè con 4 diverse configurazioni del robot (oss: Non si conoscono le coordi)

nti mate del punto giunto rispetto ad  ${}^wS$ , cioè il vettore  $\pi_{og}$  espresso  
 in coordinate  ${}^wS$ ). Mediante questa procedura si ottengono  
 quattro matrici di rototraslazione relative a quattro differenti  
 configurazioni del robot:  ${}^wT_m(q_A)$ ,  ${}^wT_m(q_B)$ ,  ${}^wT_m(q_C)$  e  
 ${}^wT_m(q_D)$ . Le configurazioni  $q_A, q_B, q_C$  e  $q_D$  hanno in co-  
 mune la estrema del Tool (stessa posizione di  $O_T$  ma  
 diverso orientamento del Tool). Pb: A partire dalle quattro  
 matrici di rototraslazione memorizzate (ne basterebbero 3,  
 se ne usano 4 per avere maggiore robustezza), calcolare le  
 coordinate di  $O_T$  (invarianti rispetto al riferimento  ${}^wS$ ) cioè  
 ${}^w\pi_{OT}$  (OSS: da cui si può ricavare anche  ${}^w\pi_{og}$ ).

OSS: Nel caso in esame  ${}^oS \equiv {}^wS$  perché  $z_0 \perp$  al pavimento, ma  
 se il primo giunto ha asse // al pavimento  $\Rightarrow$  è necessario  
 aggiungere  ${}^wS$  per notare il primo asse.

OSS: Nel KUKA  $\exists$  una procedura analoga per determinare le  
 coordinate del punto giunto o del tool rispetto ad  ${}^wS$  (cioè  ${}^w\pi_{og}$ ).

OSS: Per poter risolvere l'esercizio bisogna considerare che  
 ci troveremo di fronte ad un Pb:  $Ax = b$  con  $A$  matrice rettan-  
 golare alta (cioè più equazioni che incognite  $m > n$ ). Fino a  
 ora abbiamo risolto il Pb: con  $A$  matrice rettangolare bassa  
 (più incognite che equazioni  $m < n$ ) nello studio delle cinem-  
 atica inversa dei robot ridondanti:

risolviamo in questo caso il Pb di trovare la soluzione a minima  
 norma pesata secondo la matrice di peso  $W$  nel modo seguente:

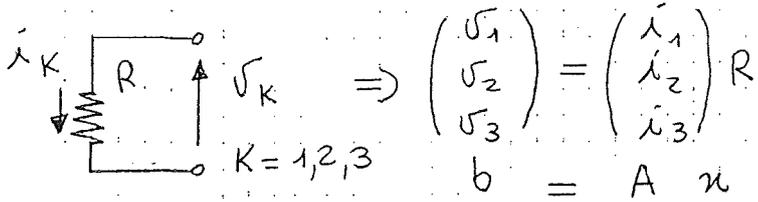
da  ${}^oJ = J\dot{q}$  ( $b = Ax$ )  $\rightarrow x^* = W^{-1}A^T(AW^{-1}A^T)^{-1}b$   
 se e solo se la matrice  $A$  rettangolare bassa ha le righe  
 indipendenti. Più in generale il Pb  $Ax = b$  ammette soluzio-  
 ni solo quando:

$\rho(A) = \rho(A|b)$  cioè  $b \in R(A) \rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

$\Rightarrow$  cioè solo quando  $b$  è generabile a partire dalle colonne  
 di  $A$  con una combinazione lineare a coefficienti pari alle  
 incognite. Spesso però capita che  $b \notin R(A)$ :

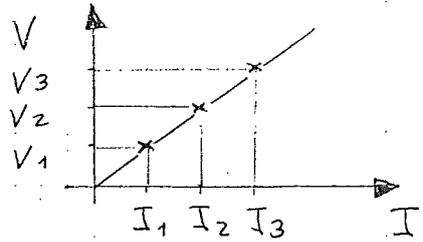
ES  $\rightarrow$  Si consideri ad esempio una resistenza per condan-  
 denti  $x_k$  con  $k = 1, 2, 3$  ai capi delle quali  $P_0$  delle tensioni

$v_k \Rightarrow$  per la legge di Ohm & legame e insieme in  $i_k$  e  $v_k$  tutta dalla misurazioni che si effettuano:



$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} R$$

$$b = A x$$

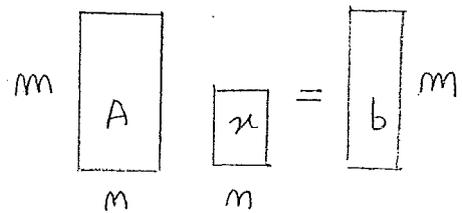


con la matrice  $A$  rettangolare alta (ho 3 equazioni in una sola incognita  $R$  da determinare).  $\exists$  soluzioni  $R$  solo quando il vettore  $V$  delle tensioni è parallelo a quello  $I$  delle correnti (o proporzionale). Questo non accade mai nella realtà (non è mai una retta nel piano  $V-I$ )  $\Rightarrow$  bisogna cercare la soluzione che minimizza lo scarto quadratico cioè la  $qta$ :

$\sum_{k=1}^3 (R i_k - v_k)^2 \alpha_k$  Il peso  $\alpha_k$  serve per dare una rilevanza maggiore o minore alla  $k$ -ma misura in base alla precisione con la quale è stata effettuata. L'obiettivo è quindi di minimizzare:

$$\min \|b - Ax\|_W^2 = \min (b - Ax)^T W (b - Ax) \text{ con } x \in \mathbb{R}^3$$

( $\exists$  vincoli sulla  $x$  che vengono soddisfatti automaticamente come il gatto che  $R \geq 0$ ). Definiamo allora la funzione  $V(x)$  come fatto per la  $A$  rettangolare bassa (in questo caso  $A$  è rettangolare alta, cioè la situazione è quella mostrata a dx):



$$V(x) = (b - Ax)^T W (b - Ax)$$

con la matrice di peso  $W = W^T > 0$  (simmetrica e def. positiva). La minimizzazione si ottiene imponendo la condizione di stazionarietà:

$$\frac{\partial V}{\partial x^*} = 0 \rightarrow x^* = \underbrace{A^+}_W b$$

PSEUDO INVERSA SINISTRA

$$A^+ = (A^T W A)^{-1} A^T W$$

Si verifica facilmente che:

$A^+ A = (A^T W A)^{-1} A^T W A = I_m$  mentre  $A A^+ \neq I_m$  Imo è un operatore di pseudo inversa  $S \times n$  volte il  $p_b$  e insieme  $Ax = b$  se la matrice rettangolare alta  $A$  è

$\sigma_k$  a colonne indipendenti. La soluzione è quella che minimizza l'errore. In particolare se  $b \in R(A) \Rightarrow$  la pseudo inversa costituisce proprio la soluzione esatta (cioè la resistenza ideale  $R$  nel nostro caso), perché  $b \in R(A) \Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}^m$  e tale che  $b = A\beta \rightarrow$  commettendo nulla. Se però  $\nexists \beta$ , cioè  $b \notin R(A) \Rightarrow b = Ax + N \rightarrow$  rumore (Noise)

I si cerca allora un  $x^*$  tale che  $\|N\|_W^2$  (pesata secondo  $W$ ) sia minimo. Le quattro misure vettoriali che si effettuano con il robot possono dare eq. che si possono esprimere nella

forma  $Ax = b$ . Le incognite possono essere sia i bob le coordinate del Tool (3) sia queste più le coordinate del punto

che  $O_T$  in  ${}^W S$  (6 coordinate cioè  ${}^m \pi_{mT} + {}^W \pi_{og}$ ). Comunque

ci si può sempre a che fare con più equazioni che incognite  $\Rightarrow$ 
 si può ricondurre alla pseudo inversa  $Sx$ .

$$\text{OSS} = \begin{cases} b = Ax + N & x^* = A_W^+ b \\ \min \|N\|_W^2 & N^* = b - Ax^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Si può calcolare} \\ \text{in questo modo} \\ \text{quanto vale il nu} \end{cases}$$

mone (o residuo) in corrispondenza di  $x^*$ . Se il residuo  $N^*$  è nullo  $\Rightarrow$  significa che le quattro misure vettoriali sono

state fatte correttamente. Se al contrario il residuo è fuori

tolleranza  $\Rightarrow$  bisogna ripetere la procedura di calibrazione perché le misure sono state fatte male. OSS: La soluzione a minima norma euclidea è:  $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$

$m$

$\sqrt{a}$

$x$

$A$

$2A$

$e:$

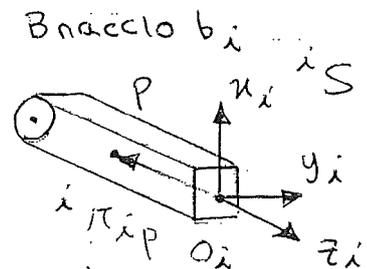
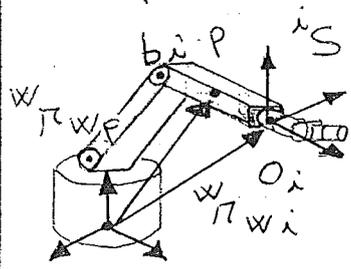
$m$

$\dots$

**DINAMICA**: im nobolica e lo studio delle coppie e forze richieste per l'esecuzione di movimenti lungo traiettorie desiderate. La derivazione dei modelli dinamici del robot può essere effettuata in due modi:

- il primo metodo è basato sulla formulazione di Lagrange, concettualmente semplice e sistematica (elegante), che conduce alla derivazione del modello dinamico in forma chiusa (non semplice da calcolare);
- il secondo metodo è basato sulla formulazione di Newton-Eulero che consente di dedurre un modello di tipo ricorsivo che risulta efficiente da un punto di vista computazionale in quanto sfrutta la matrice seriale a catena aperta tipica del manipolatore  $\rightarrow$  riparte dalle eq. del corpo rigido sulle  $\forall$  braccio.

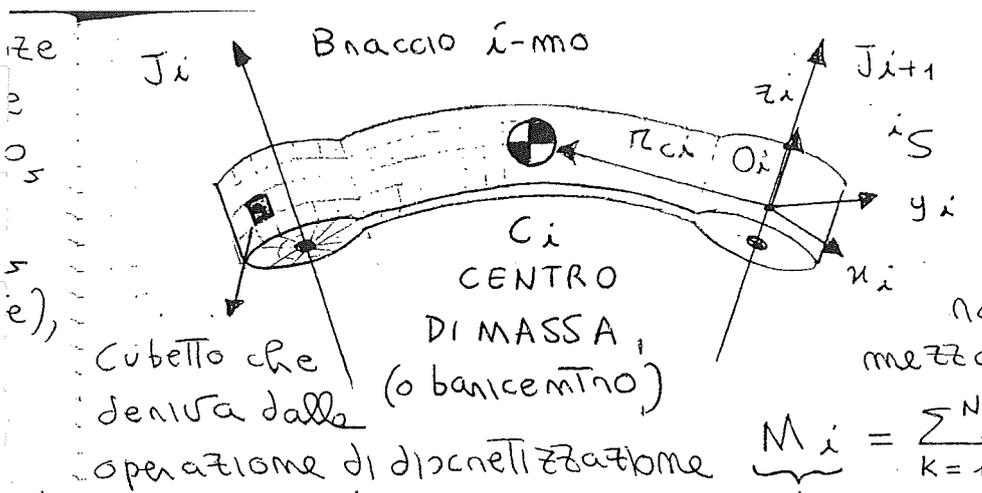
Studiamo il metodo di Lagrange per primo. La funzione Lagrangiana di un sistema meccanico come il robot è una funzione del tipo  $L(q, \dot{q})$  dove  $q$  è un angolo o uno spostamento. Dalle conoscenze dei parametri cinematici



Tra i cioè i parametri di Denavit-Hartenberg può essere configurata la configurazione  $q$  del robot si può risalire alle posizioni

cioè alle coordinate di  $\forall$  punto  $P \in$  Robot. Impet conoscendo  $P$  nelle coordinate  $S^i$  ( ${}^i\pi_{iP}$ ) allora conoscendo  $P$  anche nelle coordinate di  $S^w$  cioè  ${}^w\pi_{wP}$ . Per fare ciò ho bisogno delle matrici di rotazione dal  $w$  ed al riferimento  ${}^iS = {}^wT_i(q)$  per conoscere  ${}^w\pi_{wi}$ , oppure  ${}^o\pi_{oi}$  se considero  $S$  al posto di  ${}^wS$ . L'altra variabile  $\dot{q}$  ci dà delle informazioni sullo stato di moto del robot  $\Rightarrow$  mediante  $q$  e  $\dot{q}$  abbiamo le informazioni necessarie per calcolare l'energia potenziale e l'energia cinetica di un quadratino di massa attorno al punto  $P$ .

Posso pensare a questo punto il braccio  $i$ -mo come una somma finita di tanti quadratini aventi una certa massa  $\Rightarrow$  discretizzazione (somma di masse puntiformi):

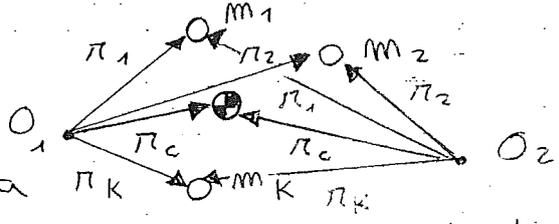


Operiamo quindi una discretizzazione con  $N$  cubetti di masse  $m_1, m_2, \dots, m_N$  diverse che rappresentiamo per mezzo della sommatoria:

$$M_i = \sum_{k=1}^N m_k = \int_{V_i} \rho(\pi) dV(\pi)$$

Massa dell' i-mo braccio  
 Densità del braccio, è funzione del punto  $P$  o anche del vettore di posizione che spazia nel volume  $V_i$  dell' i-mo braccio. Il simbolo  $\oplus$  indica la posizione del centro di massa o baricentro del braccio. È un punto che gode di diverse proprietà. ES: calcolo del baricentro di un sistema di masse puntiformi:

$$\pi_{ci} = \frac{1}{M_i} \sum_{k=1}^N m_k \pi_k$$



Il centro di massa è la media pesata di un sistema di masse puntiformi. Se le masse sono distribuite in modo uniforme nello spazio (con continuità):  $(dV = dx dy dz)$

$$\pi_{ci} = \frac{1}{M_i} \int_{V_i} \pi \rho(\pi) dV(\pi)$$

Imo che il CM gode delle proprietà che la sua posizione è

la stessa indipendentemente dal sistema di coordinate preso in considerazione o scelto per calcolarlo. La posizione fisica del centro di massa è invariante. Se prendo un riferimento come origine nel centro di massa  $\Rightarrow$  le sue coordinate sono nulle in tale riferimento  $\Rightarrow$

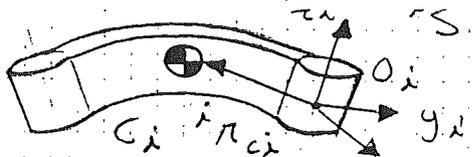
$$0 = \frac{1}{M_i} \sum_{k=1}^N (\pi_k - \pi_{ci}) m_k$$

Coordinate del centro di massa riferite al CM

Quindi noto  $q$  posso calcolare il CM dei bracci che mi serve. A un po' poi per calcolare l'energia cinetica associata.

Il Lagrangiano di un sistema meccanico è:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \rightarrow \text{Il da } \dot{q}, \text{ ma dipende solo dalla posizione } q \text{ dei centri di massa.}$$

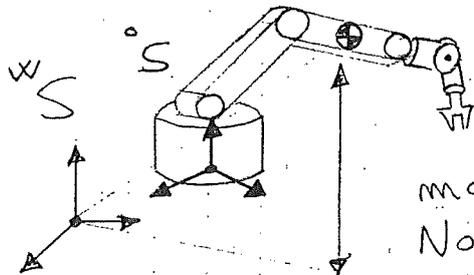


Braccio i

steno  $\rightarrow \pi_{ci} = \text{cost}$ , che è un vettore che

dipende dal tempo (da  $q$ ) se espresso nelle coordinate del mondo o di  $S \Rightarrow {}^w \pi_{w,ci}(q)$  oppure  ${}^o \pi_{o,ci}(q)$ .

Se ho un corpo rigido nello spazio e conosco le coordinate del suo centro di massa  $\Rightarrow$  posso associare al corpo una energia potenziale che dipende dall'altezza alla quale si trova il centro di massa (ed è moltiplicata a meno di una costante additiva). Posso quindi pensare di definire una energia



potenziale calcolando la coordinata  $z$  del centro di massa del braccio  $i$ -mo  $\Rightarrow$  ho bisogno della cinematica diretta del robot (in cinematiche dirette, una  $\forall$  braccio del robot).

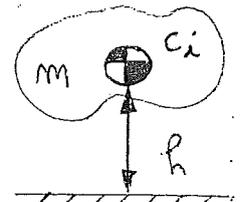
Non ho bisogno solo di  $O_i$  (riferimento solidale al braccio  $b_i$ ) ma di  $C_i$  per poter

calcolare  $U_i(q)$

$$U_i(q) = [{}^w \pi_{w,ci}]_z M_i g$$

ma  $U = mgh \Rightarrow$  in fatti è anche

l'energia potenziale di un corpo rigido il cui centro di massa si trova ad una altezza  $h$  dal riferimento considerato:



Visto che  $U_i$  dipende solo da  $z$ , se ruoto il corpo attorno ad un asse passante per il baricentro

non cambia l'energia potenziale associata al corpo rigido, oppure se traslo il baricentro nel piano  $xy$  cmq la  $U_i(q) = \text{cost.}$

$$\left[ \frac{{}^w \pi_{w,ci}}{1} \right] = T_i(q) \begin{bmatrix} i \\ \pi_{i,ci} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$  costante nel riferimento  $S$ . Entrano in gioco le prime  $i$  coordinate di giunto per dete

minare il vettore  ${}^w \pi_{w,ci}$  (di facile intuizione).

OSS: Nello SCIAVICCO  $\rightarrow U_i(q) = -g^T {}^o \pi_{o,ci} M_i$

con  ${}^o g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} = -g {}^o z_0 \rightarrow$  vettore accelerazione di gravità in coordinate  ${}^o S$ .  $E'$

c) poco connesso utilizzazione le coordinate  $^0S$  perché nel caso in cui  $z_0$  non fosse  $\perp$  al suolo, si commetterebbe un errore. Il modo sta ad indicare che l'energia potenziale  $U_i$  cresce al crescere della coordinata  $z$ . Il vettore delle derivate parziali della  $U_i$  rispetto a  $q$  è il seguente:

$$\frac{\partial U_i}{\partial q} = \left[ \frac{\partial U_i}{\partial q_1} \dots \frac{\partial U_i}{\partial q_m} \right] = \left[ \frac{\partial U_i}{\partial q_1} \dots \frac{\partial U_i}{\partial q_i} 0 \dots 0 \right]$$

Questo perché i movimenti dei giunti a valle del giunto  $i$  non variano la posizione del baricentro del braccio  $i$ -mo  $\Rightarrow$  non danno contributo alla variazione della  $U_i$  associata al  $b_i$ . La variazione della  $U_i$  dipende dai giunti da  $q_1$  a  $q_i$  (meccanismo a catena aperta). L'unica variazione di posizione che interessa è quella diretta lungo l'asse  $z$  del  $^wS$ .

$\frac{\partial {}^w \pi_{w, c_i}}{\partial q_k}$  La  $k$ -ma colonna della matrice Jacobiana fornisce il legame tra il movimento di  $q_k$  e la variazione della posizione del centro di massa  $c_i$  dell' $i$ -mo braccio. Tale elemento della Jacobiana si calcola come visto precedentemente a seconda che il  $k$ -mo giunto sia prismatico o a cerniera. Nel primo caso ( $q_k$  prismatico) la variazione della posizione del CM  $i$ -mo è lungo la direzione dell'asse  $k$ -mo cioè lungo l'asse  $z_{k-1}$ :

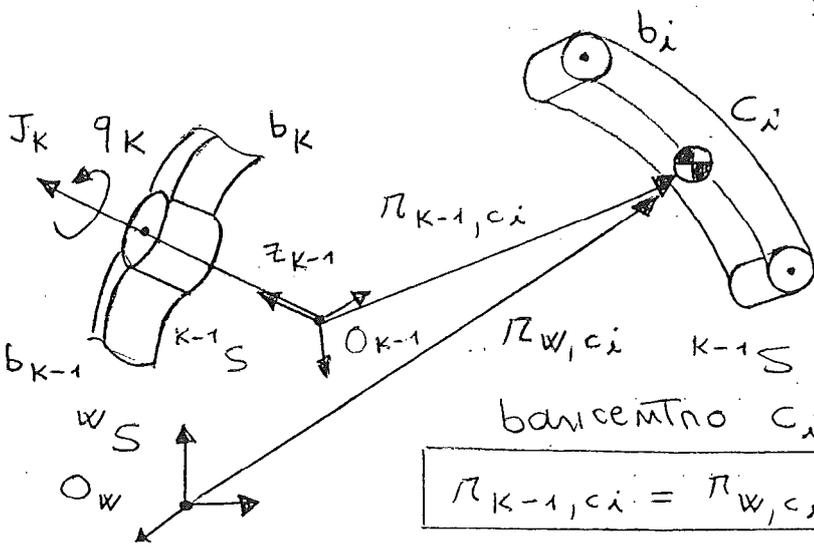
$$\frac{\partial {}^w \pi_{w, c_i}}{\partial q_k} = \begin{cases} {}^w z_{k-1} \rightarrow K \text{ prismatico} \\ {}^w z_{k-1} \times {}^w \pi_{k-1, c_i} = {}^w z_{k-1} \times (z_{k-1} \times \pi_{k-1, c_i}) \end{cases}$$

Più semplice nelle coordinate locali

$\rightarrow K$  a cerniera

OSS: Se  $q_k$  è a cerniera il suo contributo al momento del centro di massa dell' $i$ -mo braccio si calcola considerando che il vettore che unisce l'origine del riferimento ( $^wS$  (giunto  $k$ -mo)) con il baricentro  $c_i$  è il seguente:

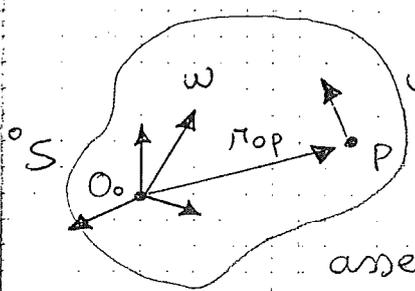
$$\pi_{k-1, c_i} = \pi_{w, c_i} - \pi_{w, k-1} \Rightarrow$$



$\Rightarrow \pi_{w,ci} = \pi_{k-1,ci} - \pi_{w,k-1}$  La relazione tra velocità del giunto  $k$ -mo e velocità del baricentro dell'imo braccio è la seguente:

$$\dot{\pi}_{w,ci} = \frac{\partial \pi_{w,ci}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Noi siamo interessati allo spostamento del centro di massa



Se ho un corpo rigido che ruota con velocità angolare  $w \rightarrow$  la velocità con la quale si sta muovendo il generico punto (velocità di traslazione) è  $w \times \pi_{OP}$ . Nel caso in esame  $w$  ha la direzione dell'asse  $J_k$  (perché tutti gli altri giunti sono bloccati)

ed  $\pi_{OP}$  è proprio  $\pi_{k-1,ci}$ . Con il termine evidenziato in verde stiamo calcolando solo la sensibilità, mentre la variazione effettiva è data da:  
 La sensibilità della variazione della posizione del centro di massa

$$\delta \pi_{w,ci} = \frac{\partial \pi_{w,ci}}{\partial q_k} \delta q_k$$

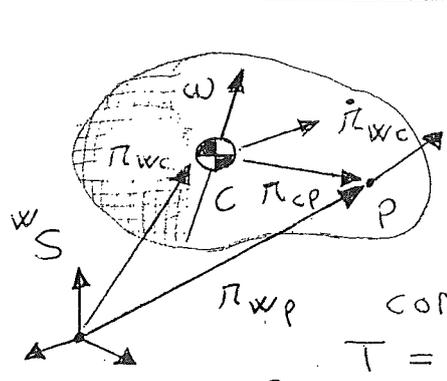
rispetto a variazioni di  $q_k$  può quindi scriverci come:

$$\frac{\partial U_i}{\partial q_k} = \left[ \frac{\partial \pi_{w,ci}}{\partial q_k} \right] M_i g \quad \text{se } k \leq i$$

Abbiamo quindi bisogno di  $m$  matrici di righe

(una  $\forall$  braccio) e degli Jacobiani per conoscere come variano le posizioni dei centri di massa in funzione dei movimenti dei giunti. L'energia potenziale del robot è la  $\Sigma$  delle energie potenziali associate ai singoli bracci:

$$U(q) = \sum_{i=1}^m U_i(q) \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial q} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial U_i}{\partial q}$$



L'energia cinetica di un corpo rigido che si muove con velocità angolare  $w$  e velocità di traslazione del CM  $\dot{\pi}_{wC}$  si può scrivere (a seconda che lo si consideri discretizzato con massette o con massa distribuita uniformemente):

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \|\dot{\pi}_k\|^2 \quad \text{oppure:}$$

$$T = \int_{V \subset \mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \|\dot{\pi}\|^2 \rho(p) dV(p) = \int_V \frac{1}{2} \|\dot{\pi}_{w,p}\|^2 \rho(p) dV(p)$$

Notazione diversa  
148

La velocità di un generico punto P del corpo rigido è:

$$\dot{\pi}_{w,p} = \dot{\pi}_{w,c} + w \times \pi_{cp} \quad \text{con} \quad \pi_{cp} = \pi_{wp} - \pi_{wc}$$

Velocità del baricentro rispetto al riferimento  ${}^w S$  nelle coordinate  ${}^w S$ .

Velocità del punto P rispetto al centro di massa (nelle coordinate del riferimento  ${}^w S$ ).

Nella seconda notazione dell'energia cinetica (quella in cui otteniamo T al variare di P nel volume V dell'intero corpo rigido  $\subset \mathbb{R}^3$ ) compare  $\|\dot{\pi}_{wp}\|^2$  che può essere interpretato come prodotto scalare del vettore per se stesso =

$$\|\dot{\pi}_{wp}\|^2 = \dot{\pi}_{wp} \cdot \dot{\pi}_{wp} = (\dot{\pi}_{wc} + w \times (\pi_{wp} - \pi_{wc})) \cdot (*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \int_V \frac{1}{2} \|\dot{\pi}_{wc}\|^2 \rho(P) dV(P) + \int_V \frac{1}{2} ([{}^w w \times] ({}^w \pi_{wp} - {}^w \pi_{wc}))^T \cdot$$

$\cdot ([{}^w w \times] ({}^w \pi_{wp} - {}^w \pi_{wc})) \rho(P) dV(P)$  Dimostriamo ora che il doppio prodotto misto

è nullo: DIM

$$\int_V \dot{\pi}_{wc} \cdot (w \times (\pi_{wp} - \pi_{wc})) \rho dV = \int_V {}^w \dot{\pi}_{wc}^T [{}^w w \times] ({}^w \pi_{wp} - {}^w \pi_{wc}) \rho(P) dV(P) = 0$$

Per la definizione data di baricentro, le coordinate del cm nel riferimento del centro di massa sono nulle:

$$\text{In fatto risulta dalla def: } \pi_{wc} = \int_V \pi_{wp} \rho(P) dV(P) \quad \square$$

oppure  $\sum_{k=1}^N m_k (\pi_k - \pi_c) = 0 \rightarrow$  Nell' spazio vettoriale il contributo del prodotto misto all'energia cinetica è nullo.

L'energia cinetica è dovuta a due soli contributi: uno relativo alla velocità di traslazione del baricentro, e altro relativo alla velocità di rotazione attorno al baricentro.

Il termine  $\|\dot{\pi}_{wc}\|^2$  è costante  $\Rightarrow$  può uscire dall'integrale  $\Rightarrow$

$$T_T = \int_V \frac{1}{2} \|\dot{\pi}_{wc}\|^2 \rho(P) dV(P) = \frac{1}{2} M \|\dot{\pi}_{wc}\|^2$$

Per quanto riguarda il contributo di rotazione si consideri:

OSS:  $\omega \times (\pi_{\omega p} - \pi_{\omega c}) = \omega \times \pi_{cp} = -\pi_{cp} \times \omega \Rightarrow$  Traspos.

Esprimendo l'eq. in coordinate di  ${}^W S$

$$\Rightarrow {}^W [\omega \times (\pi_{\omega p} - \pi_{\omega c})] = -[\pi_{cp} \times \omega] = -[{}^W \pi_{cp} \times] {}^W \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -([{}^W \pi_{cp} \times] {}^W \omega)^T = {}^W \omega^T [{}^W \pi_{cp} \times]$$

Perché la matrice che opera il prodotto vettore  $[{}^W \pi_{cp} \times]$  è antisimmetrica per cui  $A^T = -A$ .

Sostituendo ora nella espressione del contributo di rotazione:

$$T_R = \int_V \frac{1}{2} ([{}^W \omega \times] ({}^W \pi_{\omega p} - {}^W \pi_{\omega c}))^T ([{}^W \omega \times] ({}^W \pi_{\omega p} - {}^W \pi_{\omega c})) \rho dV$$

$$= \int_V \frac{1}{2} {}^W \omega^T [{}^W \pi_{cp} \times] [{}^W \pi_{cp} \times]^T {}^W \omega \rho(P) dV(P)$$

Una matrice moltiplicata per la sua trasposta è sempre una matrice simmetrica e semidefinita positiva

→ Sostituendo  $([{}^W \omega \times] ({}^W \pi_{\omega p} - {}^W \pi_{\omega c}))^T = {}^W \omega^T [{}^W \pi_{cp} \times]$   
L'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{1}{2} M \|\dot{r}_{\omega c}\|^2 + \frac{1}{2} {}^W \omega^T \left( \int_V [{}^W \pi_{cp} \times] [{}^W \pi_{cp} \times]^T \rho(P) dV \right) {}^W \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} M \|\dot{r}_{\omega c}\|^2 + \frac{1}{2} {}^W \omega^T {}^W I {}^W \omega}$$

A semidefinito e la matrice di inerzia del corpo rigido nel seguente modo (matrice di inerzia rispetto al baricentro) con  $V$  volume del corpo:

$${}^W I = \int_V [{}^W \pi_{cp} \times] [{}^W \pi_{cp} \times]^T \rho(P) dV = \sum_{k=1}^N m_k [{}^W \pi_k \times] [{}^W \pi_k \times]^T$$

Sia  $\pi_{cp} = \begin{bmatrix} \pi_x \\ \pi_y \\ \pi_z \end{bmatrix} \Rightarrow [{}^W \pi_{cp} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\pi_z & \pi_y \\ \pi_z & 0 & -\pi_x \\ -\pi_y & \pi_x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow {}^W I = \int_V \begin{bmatrix} \pi_z^2 + \pi_y^2 & -\pi_x \pi_y & -\pi_x \pi_z \\ -\pi_x \pi_y & \pi_z^2 + \pi_x^2 & -\pi_y \pi_z \\ -\pi_x \pi_z & -\pi_y \pi_z & \pi_z^2 + \pi_x^2 \end{bmatrix} \rho(P) dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^W I = \int_V (\|\pi\|^2 I - \pi \pi^T) \rho(P) dV$$

Questa forma serve per verificare che è definita positiva

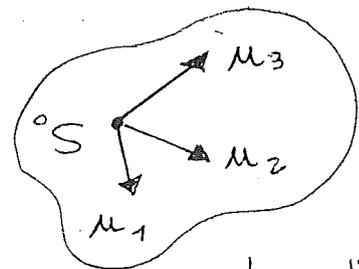
perché se la matrice è semidefinita positiva, è integrale esteso al volume  $V$  sarà in generale definito positivo.

Sulla diagonale principale della  ${}^w I$  ho i momenti di inerzia attorno agli assi coordinati rispettivamente  $x, y$  e  $z$ . Fuori diagonale ho i prodotti di inerzia. La matrice di inerzia  ${}^w I$  è vista da  ${}^w S \Rightarrow$  mom è costante ma dipende da come è orientato il corpo rigido rispetto ad  ${}^w S$  fissa. Una

generica matrice  $S = S^T > 0$  (simmetrica e def. positiva come la  ${}^w I$ ) ha autovalori tutti positivi ed è sempre diagonalizzabile  $\Rightarrow$  è sempre possibile prendere una base di autovettori che sia ortonormale: cioè si può sempre

avere:  $S = R \Lambda R^T$  con  $R$  ortonormale:  $RR^T = I$  e con  $\Lambda$  diagonale  $\rightarrow$  tali autovalori individuano gli assi principali di inerzia del corpo rigido:

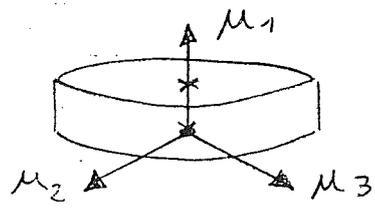
$${}^w I = R \Lambda R^T = [\mu_1 \mu_2 \mu_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \mu_3^T \end{bmatrix}$$



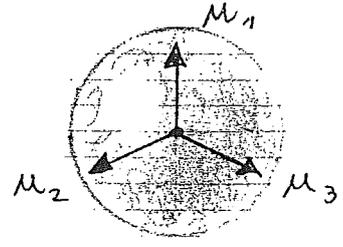
Il vettore momento angolare  $L$  o momento di rotazione in generale non è parallelo al vettore della velocità angolare:

$$L = {}^w I \omega \neq {}^w \omega$$

Risulta essere parallelo ad  ${}^w \omega$  nel particolare caso in cui la velocità angolare è parallela ad un autovettore cioè  ${}^w \omega \parallel \mu_1$  ad esempio. Si riesce a far ruotare bene i corpi attorno agli assi principali di inerzia. ES: Se consideriamo corpi con massa uniforme,



gli assi di simmetria geometrici sono anche assi di inerzia principali. Ad esempio in un disco  $\exists$  un autovettore  $\mu_1$  diretto secondo l'asse geometrico di simmetria mentre  $\mu_2$  ed  $\mu_3$  mom sono stabiliti univocamente (tutti i vettori nel piano  $\mu_2 - \mu_3$  sono autovettori).



Una sfera invece ha simmetria sferica  $\Rightarrow \forall$  terma ortonormale di vettori si può identificare con i tre autovettori. Quindi

in conclusione si può dire che  $\exists$  sempre la possibilità di prendere una terma solidale al corpo rigido i cui vettori siano diretti secondo gli assi di inerzia principali. Questa possibilità

Ta perde di interesse nei robot perché molto più interessanti di adattare in un braccio la direzione degli assi di inerzia principali. Quindi un generico corpo rigido ha una energia cinetica data dalla somma di un contributo dovuto ad una traslazione pura del CM più un contributo dovuto alla rotazione del corpo attorno al CM. Nei robot è impossibile calcolare il braccio e la  $I$  calcolata rispetto al CM.

OSS: Uno stato di moto è quindi interpretabile come somma dei due contributi citati sopra. Un'altra interpretazione dello stato di moto di un corpo rigido, secondo il Teorema di Eulero è come somma di una rotazione attorno ad un asse (che non passa per il baricentro del corpo rigido) più una traslazione lungo lo stesso asse.

OSS: In seguito vedremo che l'energia cinetica  $T$  del robot potrà essere espressa come una forma quadratica della velocità angolare.

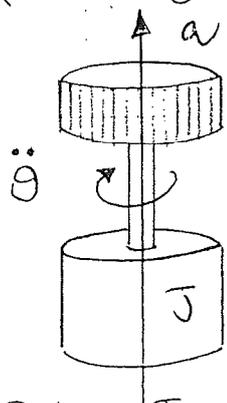
Pb: Ricavare l'energia cinetica di un robot

$$\underline{RIC}: T = \frac{1}{2} M \|\dot{r}_{w_c}\|^2 + \frac{1}{2} w^T \left( \int_V [{}^w r_{cp} \times] [{}^w r_{cp} \times]^T \rho(p) dV \right) w$$

$$= \frac{1}{2} M \|\dot{r}_{w_c}\|^2 + \frac{1}{2} w^T w I w$$

Bisogna calcolare la matrice di inerzia  $w I$

Se il corpo è esteso ed ha una forma non regolare (come nel caso del braccio del robot)  $\Rightarrow$  bisogna ricorrere a delle procedure numeriche oppure bisogna ricavare la matrice di inerzia del corpo a partire dalle misure effettuate (identificazione dei parametri dinamici).



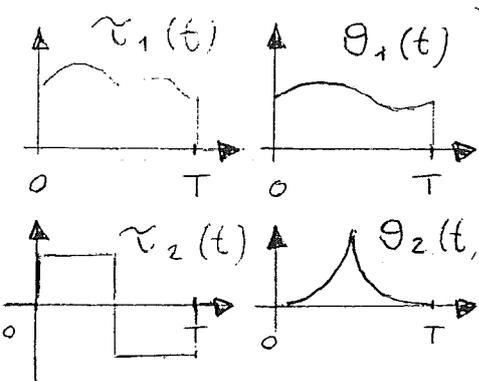
Se considero una struttura che ruota attorno ad un asse  $a$  con accelerazione angolare  $\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F = ma & \rightarrow 2^a \text{ eq. delle di dinamica} \\ \tau = J \ddot{\theta} & \rightarrow \text{formule analoghe} \end{cases}$$

coppia  $\swarrow$  inerzia  $\downarrow$  accelerazione angolare

La procedura di identificazione dei parametri dinamici (per calcolare  $J$  sperimentalmente) è basata sull'applicazione di coppie di Test al corpo rigido in esame e sulla misura degli effetti di tali coppie

di prova, cioè sulla misura delle accelerazioni angolari impresse al conpognido (e' applicazione delle coppie di Test e' limitata ad un intervallo temporale  $(0, T)$ )

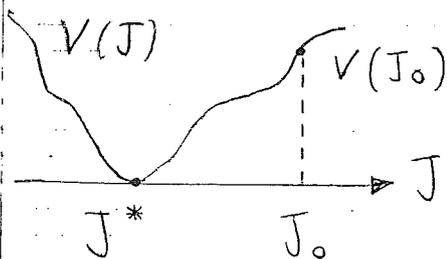


Si può così identificare  $J$ , minimizzando la seguente funzione dell'inerzia  $V(J)$ :

$$\text{min } V(J) \text{ con } V(J) = \int_0^T (\theta_m(t) - \theta_T(t, J))^2 dt$$

Valore misurato  $\leftarrow$   $\theta_m(t)$        $\theta_T(t, J)$   $\leftarrow$  Valore Teorico

$\theta_T(t, J)$  = soluzione all'eq.  $J \ddot{\theta}(t) = \tau(t) \rightarrow$  e' una eq. differenziale la cui soluzione e' una funzione del tempo e dell'inerzia  $J$ . In questo modo la funzione  $V(J)$  così definita e' minima quando  $\theta_m = \theta_T$  (a causa dell'errore di misura, in genere avviene  $\theta_m \cong \theta_T$ ).



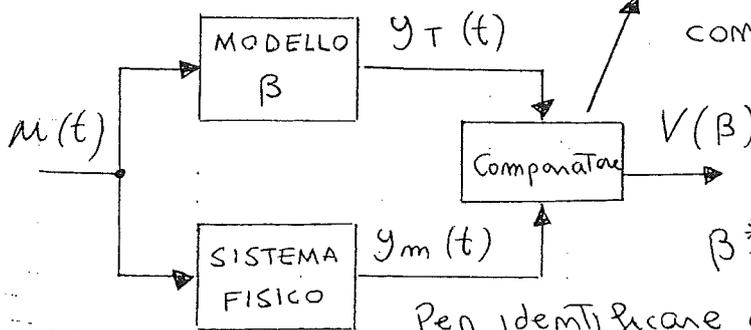
Il pb e' che non si conosce una funzione analitica  $V(J)$ , ma ho solo un algoritmo che dato  $J_0$  mi fornisce  $V(J_0)$ . Se non ho informazioni sul gradiente  $\Rightarrow$  e' algoritmo da avanti a tentativi scegliendo il minore tra  $V(J_0 + \epsilon)$  e  $V(J_0 - \epsilon)$ . Il minimo della funzione ci fornisce la stima dinamica dei parametri  $\rightarrow$  quando cioè ho che le misure e le stime teoriche matchano.

Se non ho errori di misura ho che:

$$J^* : V(J^*) = 0$$

le misure e le stime teoriche matchano.

OSS: Più in generale un algoritmo di stima o di calibrazione dei parametri dinamici mediante misure può essere così rappresentato (sia  $\beta$  un vettore di parametri che caratterizza un modello):



Si opera e' integrale dell'errore compreso tra 0 e T.

$\text{min } V(\beta)$  cioè calcolo

$$\beta^* : V(\beta^*) < V(\beta), \forall \beta$$

$\beta^*$  = stima ottima parametri.

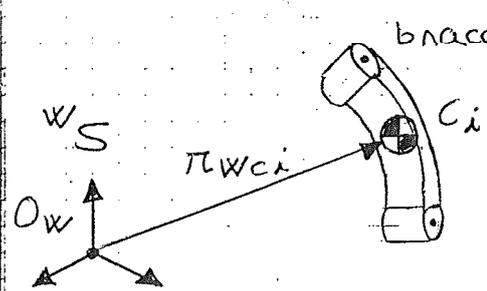
Per identificare quindi e' matrici d'inerzia

dei bracci del robot, si fa prima un cucuto approssimato che darà dei risultati che costituiscono il β iniziale o minimale. L'algoritmo poi a partire dal valore minimale, calcolerà l'ottimo secondo un indice di qualità. L'energia cinetica di un braccio i-mo è:  $T_i(q, \dot{q})$  con  $i = 1, \dots, m$  mentre quella

Totale dell'intero robot è:  $T(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^m T_i(q, \dot{q})$

così come per l'energia potenziale:

Per conoscere la velocità contemporanea  $U(q) = \sum_{i=1}^m U_i(q)$  del centro di massa dell'imo braccio:



braccio i-mo calcoliamo la derivata del vettore di posizione che unisce l'origine  $O_w$  del world frame con il centro di massa del braccio i-mo:

$$\dot{r}_{w, c_i} = J_p^{c_i}(q) \dot{q} = J_{c_i}(q) \dot{q}$$

Jacobiano di posizione che fornisce la posizione del centro di massa, alla cui determinazione concorrono solo le velocità di giunto  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i$ . OSS: Questo Jacobiano compare anche nella matrice che fornisce la sensibilità di variazione dell'energia potenziale in funzione delle configurazioni dei giunti =

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = M_i g [J_p^{c_i}(q)]_{3,k}$$

Senza riga, k-ma colonna ←

Quindi possiamo scrivere il contributo traslatorio:

$$T_{Ti}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_i \| \dot{r}_{w, c_i} \|^2 = \frac{1}{2} M_i \dot{r}_{w, c_i}^T \dot{r}_{w, c_i} \Rightarrow$$

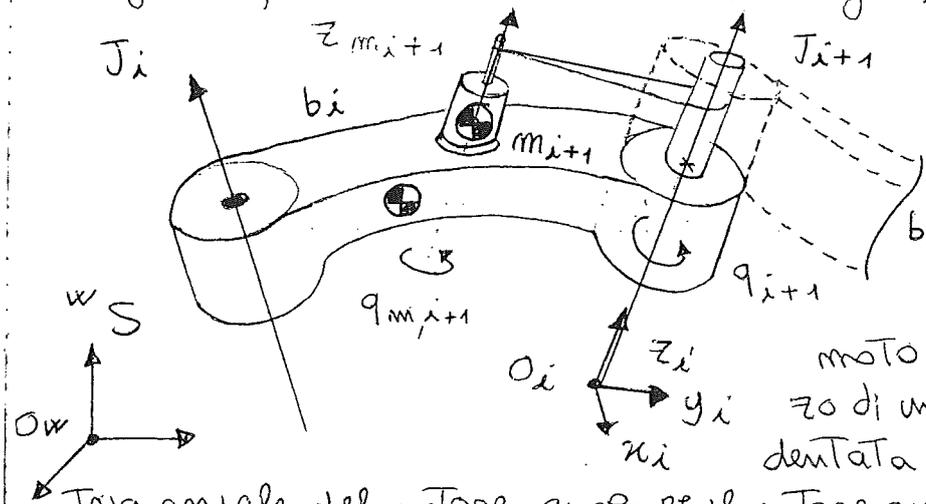
$$\Rightarrow T_{Ti}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_i \dot{q}^T \underbrace{(J_p^{c_i}(q))^T (J_p^{c_i}(q))}_{\text{forma quadratica}} \dot{q}$$

L'energia cinetica di tipo traslatorio va con

forma quadratica

il quadrato delle velocità di giunto. Per quanto riguarda il calcolo del contributo rotatorio, trascuriamo la presenza dei motori. In realtà i motori non hanno l'asse coincidente con l'asse del giunto, ma vengono spostati in modo da poter realizzare delle riduzioni di velocità, attraverso un sistema di trasmissione il moto è poi trasmesso all'asse

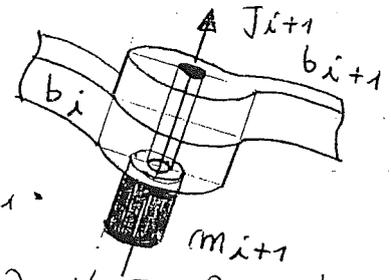
del giunto, cioè la situazione è la seguente:



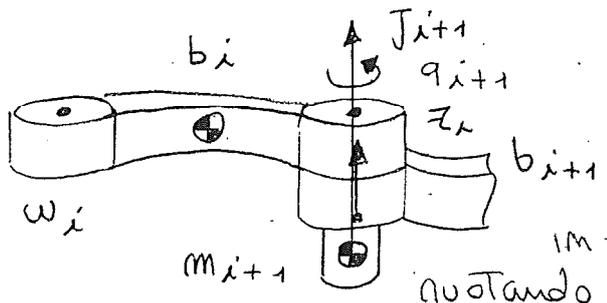
Il motore  $m_{i+1}$  ruota e coordina il braccio  $b_{i+1}$  ed è ancorato al braccio  $b_i$ . Il moto è trasmesso per mezzo di una cinghia (o ruota dentata...). Data la simme-

tria assiale del motore, anche se il motore gira, l'inerzia del braccio  $i$ -mo non cambia. Noi faremo una analisi senza considerare la presenza del motore sul braccio. O meglio, in questo caso  $\exists$  una riduzione:  $q_{m,i} = K_{\pi,i} q_i$  dove  $K_{\pi,i}$  è un fattore di riduzione (reduction)  $\Rightarrow \dot{q}_{m,i} = K_{\pi,i} \dot{q}_i$

Noi studieremo invece il caso di robot avanzati detto DIRECT DRIVE realizzati con motori ad elevata coppia (senza riduzioni e montati direttamente sull'asse del giunto), come mostrato a DX: il motore è ancorato (e statore) al braccio  $b_i$  mentre il rotore altrettanto è anch'esso ancorato al braccio  $b_{i+1}$ .



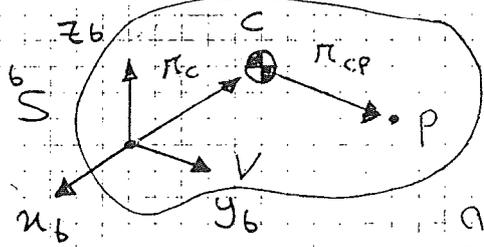
Consideriamo allora un robot direct drive (asse di motore coincidente con l'asse di giunto). Visto che il baricentro del motore e sull'asse di rotazione (asse del giunto) posso pensare il motore come se fosse un corpo unico con il braccio



im tal modo se il braccio  $i$ -mo sta ruotando a velocità  $w_i \Rightarrow$  non varia la sua energia potenziale, mentre varia l'energia cinetica (a causa dell'effetto giroscopio). Si consideri allora una:

$w_{w,i}$   $\rightarrow$  notazione del braccio  $i$ -mo rispetto ad  $w_S$ .

oss: La matrice d'inerzia di un corpo è costante se è calcolata nelle coordinate di un sistema di riferimento solidale al corpo considerato; si consideri ad esempio la seguente:



$${}^b I = \int_{P \in V} [{}^b \pi_{CP} \times] [{}^b \pi_{CP} \times]^T \rho(P) dV$$

$\Rightarrow {}^b I = \text{cost.}$  Quindi data una data  
 zione  ${}^b \omega_{w,b}$ , il contributo  
 notatorio alle energia cinetica è:

$$T_R = \frac{1}{2} {}^b \omega_{w,b}^T {}^b I {}^b \omega_{w,b}$$

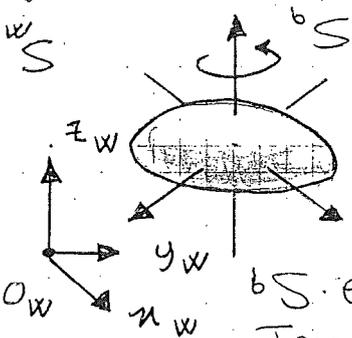
Visto però che  $\omega$  può essere  
 rappresentata anche:

$${}^b \omega_{w,b} = {}^w R_b^T {}^w \omega_{w,b} = {}^b R_w {}^w \omega_{w,b} \Rightarrow \text{Sostituendo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} {}^w \omega_{w,b}^T \boxed{{}^w R_b {}^b I {}^b R_w^T} {}^w \omega_{w,b}$$

Nuova matrice  
 di inerzia che  
 dipende dal t

Imfatto  ${}^w R_b = {}^w R_b(t)$  perché il corpo e quindi il riferi-  
 mento ad esso solidale  ${}^b S$  sta ruotando rispetto al  ${}^w S$   
 (è solo  ${}^b I$  ad essere costante). Ad esempio in questa



configurazione, l'inerzia della pagmotta  
 è maggiore attorno all'asse  $z_w$  rispetto  
 a quella che si ha attorno ad  $y_w$ . Segua  
 rimo di  $90^\circ$  la pagmotta a  $z_w$   
 esattamente è opposto. Al contrario in  
 ${}^b S$  è inerzia rispetto ad ogni asse è sempre la  
 stessa anche ruoto la pagmotta. La matrice Tem

po variante rispetto ad  ${}^w S$  è quindi:  $\boxed{{}^w I = {}^w R_b {}^b I {}^b R_w^T}$

Analogia alle Trasformazione  
 di coordinate che si operano nei sistemi eimeari (infatto la  
 ${}^w R_b$  è ortomonormale per cui la sua trasposta coincide con  
 la sua inversa). Poniamo quindi concludere che: la  
 matrice d'inerzia del braccio i-esimo del robot, nelle coordina-  
 te del sistema  ${}^i S$  è costante, simmetrica e definita  
 positiva, cioè:  ${}^i I_i = \text{cost.}$  ed  ${}^i I_i = ({}^i I_i)^T > 0$

La stessa matrice nelle coordinate del  ${}^w$  world frame è:

$$\boxed{{}^w I_i(q) = {}^w R_i(q) {}^i I_i {}^w R_i^T(q)}$$

Visto che la matrice di nota-  
 zione dipendomo dalle com-

figurazione  $q$  del robot  $\Rightarrow$  anche la matrice di inerzia  
 dei bracci calcolate nelle coordinate  ${}^w S$  dipendomo dal  
 la configurazione  $q$  del robot. Inoltre abbiamo:

${}^w w_{wi} = J_{0,i}(q) \dot{q}$   $\Rightarrow$  La componente di notazione della energia cinetica relativa all' $i$ -mo braccio può essere scritta:

$$T_{Ri} = \frac{1}{2} {}^w w_{wi}^T I_i {}^w w_{wi} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{J_{0,i}^T(q) R_i(q) I_i R_i(q) J_{0,i}(q)}_{\text{Forma quadratica di } q \text{ e } \dot{q}}$$

Sostituendo la  ${}^w w_{wi}$   $\leftarrow$  La matrice della forma quadratica dipende dalla configurazione del robot  $q$  e la forma quadratica è in  $\dot{q}$ . L'energia cinetica complessiva, associata all' $i$ -mo braccio è:

$$T_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T (M_i J_{ci}^T(q) J_{ci}(q) + J_{0,i}^T(q) {}^w R_i(q) I_i {}^w R_i^T J_{0,i}(q)) \dot{q}$$

La energia cinetica relativa all' $i$ -esimo giunto è una forma quadratica nelle velocità di giunto che dipende dai parametri dinamici (come  $M_i$  ed  $I_i$ ) e dai parametri geometrici cioè la configurazione  $q$  del robot (nota se si conoscono i parametri di Denavit-Hartenberg). Nei robot sono noti con migliore approssimazione i parametri geometrici che quelli dinamici (soprattutto  $I_i$  è difficile da calcolare o misurare).

$V_i(q) = M_i g [{}^w r_{wci}(q)]_z$  Note le energie sul singolo braccio, quelle complessive su tutto il robot sono le seguenti:

$$\begin{cases} T(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n T_i(q, \dot{q}) \\ V(q) = \sum_{i=1}^n V_i(q) \end{cases} \quad \underbrace{B(q)}_{\text{MATRICE D'INERZIA } J_{0i}}$$

$$\underline{\text{OSS}} = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( \sum_{i=1}^n (M_i J_{ci}^T(q) J_{ci}(q) + J_{0,i}^T(q) {}^w R_i(q) I_i {}^w R_i^T J_{0,i}(q)) \right) \dot{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}}$$
 Matrice d'inerzia del robot: è

somma di matrici simmetriche e definite positive  $\Rightarrow$  anche  $B(q)$  è simmetrica e def. positiva, cioè  $B(q) = B^T(q) > 0$ .

OSS: Spesso la  $B(q)$  viene indicata anche come  $M(q)$ .

La  $B(q) > 0$  sempre perché fisicamente una  $\dot{q} \neq 0 \Rightarrow$  deve necessariamente dar luogo ad una energia cinetica non nulla.

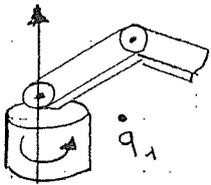
OSS: Se modellarsi anche la presenza dei motori, altre solode termini in più nelle sommatore relativi alle notazioni degli assi dei motori  $\rightarrow$  sempre in forma quadratica.

Quindi  $\exists B^{-1}(q) = B^{-1}(q) > 0$  e  $B(q)$  ha tutti gli autovalori positivi.  $B(q)$  varia in funzione della configurazione  $q$  del robot. In particolare  $B(q)$  aumenta nelle posizioni distese mentre diminuisce in quelle raccolte.

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \begin{pmatrix} b_{11}(q) & \dots & b_{1m}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(q) & \dots & b_{mm}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{pmatrix}$$

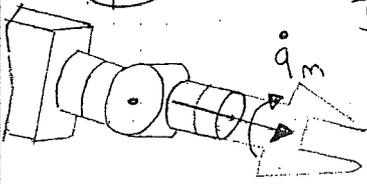
Se  $\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 b_{11}(q) \rightarrow \left\| \begin{array}{l} b_{11}(q) \text{ è l'inerzia} \\ \text{vista da primo giunto} \\ \text{con gli altri bloccati} \Rightarrow \end{array} \right.$

$\Rightarrow$  è un numero. Nel robot antropomorfo  $b_{11}(q)$  è massimo quando il braccio è completamente esteso. Inoltre  $b_{11}(q)$  dipende da  $q_2, \dots, q_m$  e non dipende da  $q_1$ .



Questa legge vale sempre, può quindi essere generalizzata dicendo che l'elemento

$b_{k,k}(q)$  dipende da  $q_p$  con  $p > k$ .



In particolare è l'inerzia dell'ultimo giunto cioè  $b_{m,m}(q)$  non dipende da alcun giunto cioè non dipende dalla configurazione  $q$ .

$b_{m,m}(q) = b_{m,m} = \text{cost}$ . L'ultimo motore ha una inerzia costante sul motore.

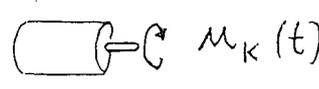
Il Lagrangiano del robot è allora il seguente:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} - U(q) \quad \text{mentre}$$

$$\text{è l'energia totale del robot è: } E(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + U(q)$$

è costante se  $\nexists$  delle forze esterne che modificano il bilancio energetico del sistema robot. In genere le forze esterne sono non conservative (in contrapposizione alle forze conservative, come la forza di gravità, che dipendono dalla posizione). Le coppie sugli attuatori e gli attriti (forze dissipative) sono esempi di forze esterne. In particolare le coppie/forze prodotte dagli attuatori costituiscono gli ingressi di controllo del sistema robot. Quindi  $\forall q_k \rightarrow \tau_k$ : coppia o forza generalizzata: con  $\tau_k = u_k - d_k$  coppia prodotta dall'attuatore  $\leftarrow$  coppia di attrito  $\rightarrow$  158

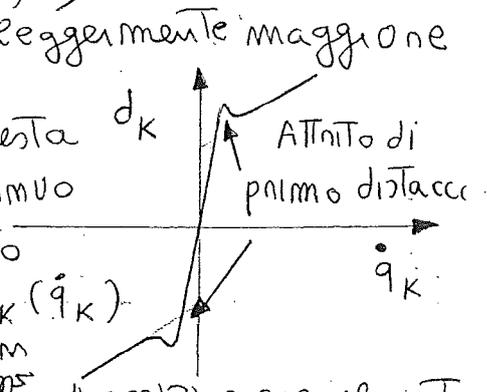
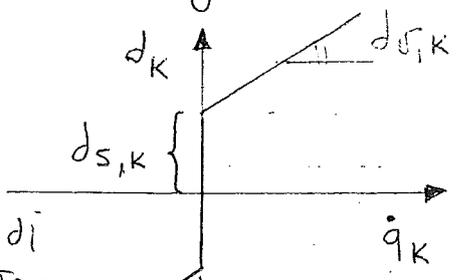
mi del re  
a mb  
i =>  
10  
(9)  
ato  
9  
a  
ve  
),  
ser  
5  
e  
0  
B  
a



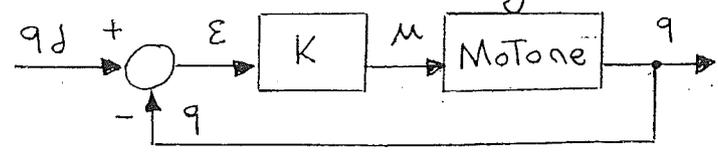
L'attuatore può essere elettrico o idraulico ma cmq.  $\mu_k(t)$  può essere sempre imposta cioè costituisce un ingresso di controllo. Per quanto riguarda l'attrito possiamo dire che è una funzione della velocità del giunto cioè  $d_k = d_k(\dot{q}_k)$ . Il modello dell'attrito può essere completo. Sono essenzialmente due i tipi di attrito che ci incontriamo:

- ATTRITO SECCO
- ATTRITO STATICO (detto anche Coulombiano): dipende dal segno della coppia motrice ed è tale da sottrarsi ad essa.
- ATTRITO DINAMICO (detto anche viscoso): dipende linearmente o quadraticamente da  $\dot{q}_k$ . Quindi dato il giunto k-mo, il modello completo (lineare) dell'attrito è il seguente:

$$d_k(\dot{q}_k) = d_{s,k} \operatorname{sgn}(\dot{q}_k) + d_{v,k} \dot{q}_k$$



È un modello non lineare, non "liscio" per cui non derivabile  $\Rightarrow$  il modello di attrito secco non permette di ricorrere al metodo di Lyapunov per studiare la stabilità. È inoltre un'ulteriore attrito detto di primo distacco, cioè la coppia motrice iniziale deve essere leggermente maggiore di  $d_{s,k}$  (cioè dell'attrito iniziale) per poter mettersi in moto. Si tende a modellare questa ulteriore particolarità con un modello continuo che approssima il modello d'attrito presentato. Noi lo indicheremo genericamente con  $d_k(\dot{q}_k)$ . L'attrito può dare dei Pb nei sistemi di controllo automatico quando l'obiettivo è quello di posizionare il motore in modo da avere una configurazione desiderata, perché il feedback di controllo è il seguente:



- $q_d \rightarrow$  configurazione desiderata
- $q \rightarrow$  configurazione attuale
- $\mu \rightarrow$  coppia di ingresso
- $\epsilon \rightarrow \epsilon = q_d - q$ : errore

Aggiungendo il giunto possa muoversi l'ingresso deve superare l'attrito statico cioè: se  $\mu = |K\epsilon| < d_s \Rightarrow$  il giunto non si muove. Se ho questa situazione nel controllo proporzionale, il controllo non funziona  $\Rightarrow$  devo aumentare il valore del guadagno K.

Subito dopo che si crea il movimento, e anche diminuisce leggermente  $\Rightarrow$  il movimento è più ampio del necessario questo comporta l'immersione di oscillazioni di  $q$  attorno

alla configurazione desiderata  $q_d \Rightarrow$  effetto di Chattering (anche con controllo di tipo proporzionale-integrale  $K/s$ ).

OSS: L'attito secco deve essere ridotto perché dà problemi di oscillazioni (Chattering) nel controllo automatico, mentre l'attito viscoso ha un effetto derivativo, stabilizzante sul controllo  $\Rightarrow$  è positivo. Per ora consideriamo:

$$q_k \rightarrow \tau_k = \mu_k - d_k(\dot{q}_k) \quad \text{Vettore generalizzato di forze ai giunti non consentite.}$$

Il modello dinamico di un sistema meccanico, soddisfa o concorda con il modello dinamico di Lagrange:

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tau = F(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad \text{Imoetne qualunque sia la forza di attito sia:}$$

$$\dot{q}_k d_k(\dot{q}_k) \geq 0 \quad \text{cioè la potenza dissipata sul giunto k-mo (sottrazione di calore per effetto Joule) è}$$

positiva o nulla perché dissipa potenza per effetto dell'attito.

Infatti:  $\dot{q}_k d_k(\dot{q}_k) = |\dot{q}_k| d_{s,k} + d_{v,k} \dot{q}_k^2 \geq 0 \quad \square$

$$\hookrightarrow \dot{q}_k \operatorname{sgn}(\dot{q}_k) = |\dot{q}_k|$$

Imoetne  $\tau^T \dot{q}$  ci dà la potenza complessiva fornita al robot (algebraica in quanto è positiva se fornita, negativa se presa):

$$\tau^T \dot{q} = \sum_{k=1}^m \mu_k \dot{q}_k - \sum_{k=1}^m \dot{q}_k d_k \quad \text{Bilancio di potenza in trante, cioè quella}$$

fornita meno quella dissipata sui giunti. Un risultato della meccanica classica è:

$$\frac{d}{dt} E(q, \dot{q}) = \tau^T \dot{q} \quad \text{Bilancio di potenze che restituisce la LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA}$$

ENERGIA quando  $\tau^T \dot{q} = 0$  cioè quando il sistema meccanico robot è isolato dall'esterno ed il vettore di forze esterne generalizzate è nullo. In tal caso si ottiene

infatti che:  $\frac{d}{dt} E(q, \dot{q}) = 0 \Rightarrow E(q, \dot{q}) = \text{cost.} \Rightarrow$

L'energia di un sistema isolato si conserva.

Se il robot è a contatto con l'ambiente ed interagisce con coppie forze esterne (indicando con  $D(\dot{q})$  il vettore delle forze di attrito contemporaneamente e componenti  $d_k(\dot{q}_k) \Rightarrow$

$$\tau = M - D(\dot{q}) + J^T(q) {}^w F_E \quad \text{con } {}^w F_E = \begin{bmatrix} {}^w f_E \\ {}^w m_E \end{bmatrix}$$

Il vettore di forze generalizzate  ${}^w F_E$ , modella lo scambio di forze tra robot ed ambiente esterno, o più precisamente come le forze esterne si risolvono sui giunti. Per equilibrio statico è oggetto delle forze esterne il controllo è:

$$\bar{u} = -J^T(q) {}^w F_E \quad \text{calcoliamo ora l'espressione del modello dinamico di Lagrange}$$

già cioè:  $\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tau$  Modello dinamico di Lagrange per un sistema meccanico

Cominciando dal termine:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} ; \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial q} = g(q) \rightarrow \text{Come le forze di gravità si risolvono sui giunti} \\ \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \right) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q} = \left[ \frac{\partial T}{\partial q_1} \dots \frac{\partial T}{\partial q_m} \right] = \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial q_1} \dot{q} \dots \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial q_m} \dot{q} \right]$$

Passiamo adesso all'altro termine non derivato:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{1}{2} (\dot{q}^T B(q) \dot{q}) \right)^T = B(q) \dot{q}$$

Perché  $U = U(q) \parallel$  da  $\dot{q}$  ed  $L = T - U$

$$\left( \frac{d}{dx} x^T A x \right)^T = (2x^T A)^T = 2A x \quad \text{con } A = A^T$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = B(q) \dot{q}$$

OSS:  $\exists$  una analogia:  $\begin{cases} {}^w I {}^w \omega : \text{momento angolare corpo rigido} \\ B(q) \dot{q} : \text{momento angolare del robot} \end{cases}$

Adesso dobbiamo completare il calcolo effettuando la

derivata:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = \frac{d}{dt} (B(q) \dot{q}) = B(q) \ddot{q} + \underbrace{\dot{B}(q, \dot{q})}_{\dot{B}(q, \dot{q})} \dot{q}$

$B(q) = B(q(t))$  Calcoleremo poi quindi la derivata indicata

OSS:  $\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)^T$  è il gradiente dell'energia cinetica, traspos

To e può essere interpretato nel seguente modo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_m} \dot{q} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Vettore di forme quadratiche}$$

$$= S(q, \dot{q}) = \tilde{S}(q, \dot{q}) \dot{q}$$

Matrice non univocamente determinabile.

Una scelta possibile potrebbe essere la seguente:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_m} \end{bmatrix} \dot{q} \rightarrow \text{analogia alla } \dot{B}(q, \dot{q})$$

Adegnò ricomponendo tutti i risultati ottenuti, nell'eq. del modello dinamico di Lagrange:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)^T = B(q) \ddot{q} + \underbrace{\dot{B}(q, \dot{q}) \dot{q} - \tilde{S}(q, \dot{q}) \dot{q}}_{\text{definiamo: } C(q, \dot{q}) \dot{q}} + \underbrace{\frac{\partial U(q)}{\partial q}}_{g(q)} = \tau$$

$$\Rightarrow \boxed{B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \mu - D(\dot{q}) + J^T(q)^w F_E}$$

Modello dinamico del robot. Dobbiamo però ancora calcolare la matrice  $C(q, \dot{q})$ . Questo modello è importante per la realizzazione di certe leggi di controllo. Inoltre  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  è un vettore le cui componenti sono delle forme quadratiche:

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T \tilde{C}_1 \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \tilde{C}_m \dot{q} \end{bmatrix}$$

La scelta della matrice  $C(q, \dot{q})$  non è unica. Questo prodotto è importante perché

la matrice  $C(q, \dot{q})$  modella le forze di interazione tra i giunti che dipendono essenzialmente dalle velocità di giunto (forze centrifughe e forze di Coriolis). Inoltre  $g(q)$  è il termine di gravità,  $\mu$  sono le coppie-forze sviluppate dagli attuatori,  $D(\dot{q})$  sono gli attriti sui giunti ed  ${}^w F_E$  sono le forze esterne o meglio come le forze esterne agiscono a livello dei giunti. Il robot è in equilibrio quando  $\dot{q} = \ddot{q} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{g(q) = \mu + J^T(q)^w F_E}$$

Le eq. della statica che

riche

sono state ricavate nel secondo quaderno, vengono ora complete dal contributo gravitazionale. Se  $g(q) = 0$ , allora otteniamo le stesse eq. trovate in STATICA:

$$\mu = -J^T(q) {}^w F_E$$

Mentre se sono le forze esterne ad essere nulle risulta  ${}^w F_E = 0 \Rightarrow$

men

$$\mu = g(q) = \frac{\partial U}{\partial q}$$

questa è la legge di controllo per mantenere fermo il robot (si equilibra il peso del robot soltanto) sotto l'azione della forza di gravità

sul

RIC:  $B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \mu - D(\dot{q}) + J^T(q) F$  ambiente  
avendo indicato con  $F = {}^w F_E$  (E: staper emulsionment)

Spesso si accumulano i termini nel seguente modo:

$$B(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \mu + J^T(q) F \rightarrow \parallel \text{NO CONTACT (non ci sono contatti esterni)}$$

τ

avendo posto:  $N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + D(\dot{q})$   
cioè il vettore  $N$ , raccoglie il contributo di forze centrafughe e di Coriolis, delle forze d'attrito e di quelle gravitazionali. Otteniamo queste eq. a partire dalle eq. di Lagrange:

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tau$$

Rappresenta un sistema di  $m$  eq. di  $g$  generali del II ordine.

ne  
27

OSS: Il trasporto è necessario perché per convenzione il vettore delle derivate parziali di una funzione è un vettore riga mentre noi ragioniamo sempre in termini di vettori colonna.

Se scriviamo la  $K$ -matrice di queste  $m$ -equazioni:

To  
è  
a

$$K: b_{k1}(q)\ddot{q}_1 + \dots + b_{kk}(q)\ddot{q}_k + \dots + b_{km}(q)\ddot{q}_m \pm \dot{q}^T C_k(q)\dot{q} + g_k(q) = \mu_k - d_k(\dot{q}) \rightarrow \text{Siamo nel caso NO CONTACT}$$

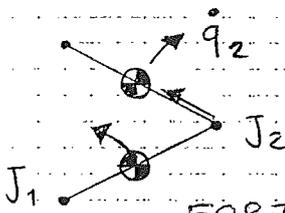
ne  
mti  
e  
la

Quindi se applico una coppia/forza al giunto  $k$ -mo  $\Rightarrow$  ho una accelerazione anche sugli altri giunti. In fatto  $\exists$  degli accoppiamenti dovuti al fatto che la matrice d'inerzia  $B(q)$  è in generale piena (non diagonale).  $\exists$  alcuni tipi di robot con le  $m$ -equazioni disaccoppiate tra loro come ad esempio il robot cartesiano; infatti se applico una  $\mu_k \Rightarrow$  tale coppia/forza non dà contributo nelle direzioni  $y$  e  $z$ . In tal caso la matrice d'inerzia risulta essere diagonale.

Il controllo è reso difficile dalla presenza degli accoppiamenti. Se infatti tutte le eq. sono disaccoppiate, posso realizzare un controllo decentralizzato impiegando m controlli, cioè uno v motore. La riga k-ma presenta termini quadratici nelle velocità di giunto che possono così essere interpretati:

$\dot{q}^T \tilde{C}_k(q) \dot{q} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i^2 \Rightarrow \text{I termini sulla diagonale principale rappresentano forze centrifughe} \\ \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \text{I termini fuori diagonale sono le forze di Coriolis, determinate dall'interazione di 2 diverse velocità} \end{cases}$

FORZA CENTRIFUGA



Il momento del giunto 2 a velocità  $\dot{q}_2$  (in senso) ha come effetto secondario quello di tirare nel braccio 1 verso SX (in senso).

FORZA DI CORIOLIS  $\rightarrow$  È dovuta alle interazioni tra velocità diverse. RIC:  $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} - U(q)$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = B(q) \dot{q} \quad e \quad \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial q_m} \dot{q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial q_m} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tilde{S}(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q)$$

Dobbiamo ora calcolare da  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = \frac{d}{dt} (B(q) \dot{q}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (B(q) \dot{q}) = B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q, \dot{q}) \dot{q} \quad \parallel \text{È un pb calcolare questa derivata}$$

ricomponendo tutto insieme ciò che si ottiene è il modello dinamico del robot:

$$B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q, \dot{q}) \dot{q} - \tilde{S}(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau$$

SS:  $\frac{dB(q)}{dt} = \frac{\partial B}{\partial q} \dot{q}$  Infatti, per convenzione, se ho una f. scalare  $\varphi \in \mathbb{R}$ , le sue derivate parziali rispetto al vettore  $q$ :

$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \right]$  mentre se  $\varphi \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  cioè è un vettore di funzioni, le sue derivate parziali rispetto al vettore  $q \in \mathbb{R}^m$  restituiscono una matrice  $m \times m$  chiamata Jacobiano di  $\varphi$ : 164

Se  
M  
dell  
Ma  
Ta o  
Tne  
B(  
oss  
equ  
dB  
d  
L'a  
cost  
d  
dt  
K-m  
per  
=>  
ES  
qu

$P =$  Se  $\varphi(q) \in \mathbb{R}^{m \times 1} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_m} \end{bmatrix}$

Matrice Jacobiana  
 delle funzioni  $\varphi(q)$

Ma se  $B(q)$  è una matrice non è più possibile definire questa operazione perché dovremmo ricondurre ad una matrice con 5  
 The indici (cioè un cubo):

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(q) & \dots & b_{1m}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(q) & \dots & b_{mm}(q) \end{bmatrix}$$

nell'analisi non usiamo però una matrice a tre o più indici, quindi esprimemmo  $\frac{\partial B}{\partial q}$  per mezzo di  $\Sigma$ .

OSS: L'analisi proposta dallo SCIavicco è fatta sulla  $K$ -ma equazione. Noi considereremo invece:

$$\frac{dB(q)}{dt} = \frac{d}{dt} [b_1(q) \dots b_m(q)] \rightarrow \text{Impatti le singole colonne delle matrici possono essere derivate}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial q} \dot{q} & \dots & \frac{\partial b_m}{\partial q} \dot{q} \end{bmatrix} \text{ cioè } \frac{\partial b_i}{\partial q} \text{ è una matrice che moltiplicata per } \dot{q} \text{ forma un vettore.}$$

$\rightarrow \dot{B}(q, \dot{q})$  è lineare nelle velocità di giunto.

L'analisi dello SCIavicco è sulle  $K$ -ma riga (eq.) del sistema di eq. rappresentato dalla:

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tau \rightarrow K: \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tau_k}$$

$K$ -ma eq. con  $k=1, \dots, m$  e si preoccupa di trovare una forma per dimostrare è antisimmetria. Dalla  $\otimes \Rightarrow K$ -ma

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m b_{ki}(q) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^m b_{ki}(q) \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_{ki}}{\partial q} \dot{q} \dot{q}_i$$

ES: Funzioni vettoriali con componenti paria delle forme quadratiche di  $x \in \mathbb{R}^2$ : ( $x = \dot{q}$ )

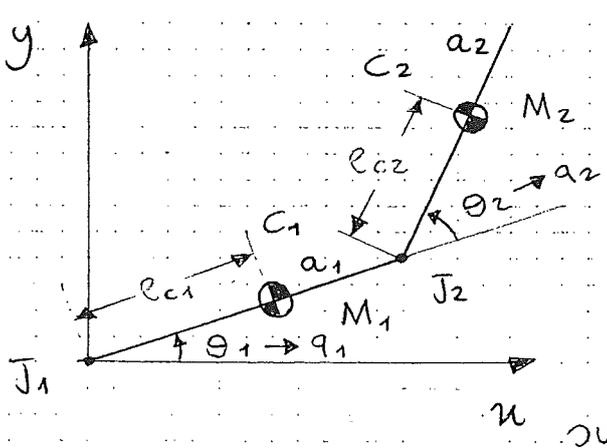
$$\begin{bmatrix} x^T A_1 x \\ x^T A_2 x \end{bmatrix} = C(x) x \text{ La matrice } C(x) \text{ è lineare in } x, \text{ non è univocamente determinabile.}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + 6x_1 x_2 + 2x_2^2 \\ 4x_1^2 + 12x_1 x_2 + 6x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 6x_2 & 2x_2 \\ 4x_1 + 12x_2 & 6x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \kappa_1 & 6\kappa_1 + \kappa_2 \\ 4\kappa_1 & 12\kappa_1 + 6\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 + 3\kappa_2 & 3\kappa_1 + \kappa_2 \\ 4\kappa_1 + 10\kappa_2 & 2\kappa_1 + 6\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}$$

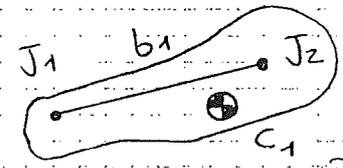
Cioè i tenitori minimi possono essere messi sia sulle singole componenti sia su entrambe le componenti. Quindi la detenzione minima di  $C(q, \dot{q})$  non è univoca.

ES: EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE (O DI LAGRANGE) PER ROBOT PLANARE A DUE BRACCI



$\theta_1 = q_1$  e  $\theta_2 = q_2$  sono le variabili di giunto. Sono importanti le posizioni dei centri di massa  $C_1$  e  $C_2$  cioè le distanze  $e_{c1}$  ed  $e_{c2}$ . I bracci sono lunghi  $a_1$  ed  $a_2$  e pesano  $M_1$  ed  $M_2$ . Per semplicità considereremo i centri di massa sulle normali tra i due assi di

giunto anche se in generale si può avere che il baricentro di un braccio sia spostato fuori da tale normale cioè:



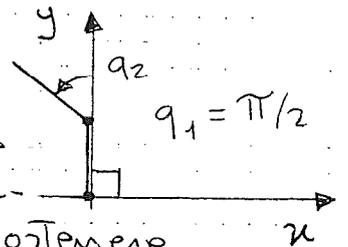
Siano  $I_1$  ed  $I_2$  i momenti di inerzia dei due bracci riferiti ai rispettivi baricentri. La struttura è vincolata a muoversi sul piano  $x-y$ . OSS:  $e_{c1}$  ed  $e_{c2}$  sono parametri ibridi cioè sia geometrici sia dinamici. Calcoliamo l'energia potenziale e considerando che la forza di gravità agisce lungo  $-y$  cioè  $g \parallel y$ :

$$\begin{cases} U_1(q) = M_1 g e_{c1} \sin q_1 \\ U_2(q) = M_2 g (a_1 \sin q_1 + e_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \end{cases} \Rightarrow$$

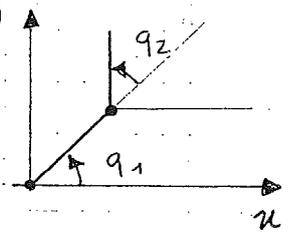
$$\Rightarrow g(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 g e_{c1} \cos q_1 + M_2 g (a_1 \cos q_1 + e_{c2} \cos(q_1 + q_2)) \\ M_2 g e_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

OSS:  $\frac{\partial U}{\partial q_1}$  è l'azione sul giunto 1 della forza di gravità che agisce sull'intera struttura del robot. È la coppia che dovrà applicare al motore del giunto 1 per mantenerlo

erlo in equilibrio. Quando  $q_1 = \pi/2 \Rightarrow$  tutto il peso del braccio è sostenuto da una reazione simolare  $\Rightarrow$  la coppia da applicare al giunto 1 per mantenere l'equilibrio è nulla.  $q_1$  di poco inferiore  $\pi/2 \Rightarrow$  un piccolo sforzo per sostenere il braccio mentre  $q_1 \rightarrow 0 \Rightarrow$  la coppia è massima. In modo analogo per il secondo braccio risulta che la coppia sull'attuatore è nulla per mantenere l'equilibrio quando il secondo braccio è in posizione verticale.



Qui giocano un ruolo importante le masse e la posizione dei baricentri. Per scrivere l'energia cinetica del robot ci servono le eq. delle velocità dei baricentri e le velocità di rotazione dei bracci.



$$K_{c1}(q) = \begin{bmatrix} e_{c1} \cos q_1 \\ e_{c2} \cos q_2 \end{bmatrix} \quad K_{c2}(q) = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + e_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin q_1 + e_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} J_{c1}(q) \\ J_{o1}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_{c1} \sin q_1 & 0 \\ e_{c2} \cos q_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} q_1 \\ q_1 + q_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_{c2}(q) \\ J_{o2}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin q_1 - e_{c2} \sin(q_1 + q_2) & -e_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos q_1 + e_{c2} \cos(q_1 + q_2) & e_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1(q_1, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_1 \|\dot{r}_{c1}\|^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \quad \left\| \begin{matrix} \rightarrow \text{Sostituendo la} \\ \Rightarrow \|\dot{r}_{c1}\|^2 \text{ in } T_1 \end{matrix} \right.$$

$$\|\dot{r}_{c1}\|^2 = e_{c1}^2 \dot{q}_1^2 = \dot{q}^T J_{c1}^T J_{c1} \dot{q}$$

$$\Rightarrow T_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_1 e_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} (I_1 + M_1 e_{c1}^2) \dot{q}_1^2$$

Otteniamo che  $T_1(q, \dot{q})$  è una forma quadratica delle velocità di giunto a monte del braccio 1 (cioè solo  $\dot{q}_1$ ) ed inoltre il momento di inerzia non è quello attorno al baricentro  $C_1$ , ma per il Teorema di Steiner è quello attorno all'asse  $J_1$  distante  $e_{c1}$  dal centro di massa  $\rightarrow$  (Teorema di Steiner afferma che l'inerzia equivalente vista da un punto distante  $e_{c1}$  dal centro di massa è pari all'inerzia vista dal centro di massa stesso più un contributo che dipende dalla massa del corpo e da  $e_{c1}$  cioè:  $I_1 + M_1 e_{c1}^2$ )

Quindi l'energia cinetica associata al braccio 1 del robot:

$$T_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (I_1 + M_1 e_{c1}^2) \dot{q}_1^2$$

Per quanto riguarda il braccio 2 bisogna considerare separatamente i contributi traslatori e rotazionali.

$$T_{T2}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_2 \dot{q}^T J_{c2}^T(q) J_{c2}(q) \dot{q} \quad \text{con:}$$

$$J_{c2}^T(q) J_{c2}(q) = \begin{bmatrix} a_1^2 + e_{c2}^2 + 2a_1 e_{c2} \cos q_2 & e_{c2}^2 + a_1 e_{c2} \cos q_2 \\ e_{c2}^2 + a_1 e_{c2} \cos q_2 & e_{c2}^2 \end{bmatrix}$$

OSS: Il termine 11 della matrice sopra è:

$$a_1^2 + e_{c2}^2 + 2a_1 e_{c2} (\cos q_1 \cos(q_1 + q_2) + \sin q_1 \sin(q_1 + q_2)) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \begin{cases} \alpha = q_1 + q_2 \\ \beta = q_1 \end{cases}$$

$$= a_1^2 + e_{c2}^2 + 2a_1 e_{c2} \cos q_2$$

Il contributo alla velocità di traslazione del baricentro prodotto dal giunto 1 è pari a:

$$\frac{1}{2} M_2 (\sqrt{a_1^2 + e_{c2}^2 + 2a_1 e_{c2} \cos q_2})^2 \dot{q}_1^2 \rightarrow$$

Il termine tra parentesi to m d e

rappresenta la distanza del baricentro 1 (dipende da  $q_2$ : se  $q_2 = 0 \Rightarrow a_1 + e_{c2} \Rightarrow$  braccio disteso mentre se  $q_2 = \pi \Rightarrow a_1 - e_{c2} \Rightarrow$  braccio ripiegato).

L'elemento di posto 22 della matrice è la distanza del baricentro 2 (costante) dal giunto  $J_2 \Rightarrow$  è semplicemente  $e_{c2}$  (cioè è costante). I termini misti di posizione  $ij$  sono:

$$e_{c2} a_1 \cos q_1 \cos(q_1 + q_2) + e_{c2} (\cos(q_1 + q_2))^2 + a_1 e_{c2} \cos q_1 \cos(q_1 + q_2) + e_{c2}^2 (\cos(q_1 + q_2))^2 = e_{c2}^2 + a_1 e_{c2} \cos q_2$$

La forma quadratica esplicita è allora la seguente:

$$T_{T2} = \frac{1}{2} M_2 \dot{q}^T J_{c2}^T(q) J_{c2}(q) \dot{q} = \frac{1}{2} M_2 ([a_1^2 + e_{c2}^2 + 2a_1 e_{c2} \cos q_2] \dot{q}_1^2 + e_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2(e_{c2}^2 + a_1 e_{c2} \cos q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2)$$

A questo va aggiunto il contributo rotazionale:

$$T_{R2} = \frac{1}{2} \dot{q}^T J_{o2}^T I_2 J_{o2} \dot{q} = \frac{1}{2} [\dot{q}_1 \dot{q}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

bot:  $\Rightarrow T_{R2} = \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 = \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2)$

Tot: Sommando i due contributi, l'energia cinetica complessiva del secondo braccio del robot dipende da tutto e se e solo a monte del giunto  $J_2$  (cioè  $\dot{q}_1$  e  $\dot{q}_2$ ) ed inoltre dipende dalla configurazione del gomito del robot, cioè da  $q_2$ :

q2 
$$T_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [M_2 (a_1^2 + e_{c2}^2 + 2a_1 e_{c2} \cos q_2 + I_2) \dot{q}_1^2 + (M_2 e_{c2}^2 + I_2) \dot{q}_2^2 + 2(I_2 + M_2 (e_{c2}^2 + a_1 e_{c2} \cos(q_2))) \dot{q}_1 \dot{q}_2]$$

OSS: Il primo termine rappresenta l'inerzia del braccio  $b_2$  riferita al giunto  $J_1$ , mentre il secondo termine è l'inerzia del braccio  $b_2$  riferita al giunto  $J_2$ . Sommando  $T_1$  e  $T_2$  troviamo l'energia cinetica complessiva del robot da cui possiamo ricavare la matrice di inerzia dello stesso:

$T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2) B(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + M_1 e_{c1}^2 + M_2 e_{c2}^2 + M_2 a_1 e_{c2} \cos q_2 & 0 \\ I_2 + M_2 e_{c2}^2 + M_2 a_1 e_{c2} \cos q_2 & I_2 + M_2 e_{c2}^2 \end{bmatrix}$

L'algoritmo di identificazione dei parametri vede  $\beta$  nel suo complesso e non riesce a distinguere i singoli termini che compongono la somma.

OSS: Se scegliessi di mettere l'elemento di posizione 21 come  $2 \times$  mentre l'elemento di posizione 12 lo pongo pari a zero avrei una matrice non simmetrica. In genere si preferisce  $B(q)$  simmetrica perché la forma quadratica dipende dalla sola parte simmetrica della matrice. Si può inoltre notare:

$B(q) = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \gamma \cos q_2 & \bar{I}_2 + \gamma \cos q_2 \\ \bar{I}_2 + \gamma \cos q_2 & \bar{I}_2 \end{bmatrix}$  cioè la matrice di inerzia è univocamente

determinata a partire da 3 parametri:  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  e  $\gamma$ . All'inizio avevamo molto più parametri ( $M_1, M_2, I_1, I_2, a_1, a_2, e_{c1}, e_{c2}$ ) tuttavia quelli li sono 3. La posizione  $q_1$  è essenziale per il calcolo di  $U$  mentre è inessenziale per il calcolo di  $T$ .

RIC: Il modello dinamico del robot è quindi la seguente

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = \mu + J^T(q) F_E$$

$N(q, \dot{q})$   $\uparrow$  Immagini di  $\uparrow$  Contributo delle  
 continuo (ganzte e fonte esterne  
 coppie sugli attuatori) eventualmente  
 presenti.

Lo STATO di un robot è costituito

dalla coppia  $(q, \dot{q})$  configurazione + velocità.

Nel caso di robot planare a due bracci, si è calcolata la seguente matrice di inerzia:

$$B(q) = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \gamma \cos q_2 & \bar{I}_2 + \gamma \cos q_2 \\ \bar{I}_2 + \gamma \cos q_2 & \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

L'equazione dinamica di Lagrange è la seguente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau^T \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \quad \rightarrow \quad L = T - U$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} B(q) \dot{q} - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \right)^T + g(q) = \mu - d(\dot{q}) + J^T(q) F_E$$

$$\Rightarrow B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \mu - d(\dot{q}) + J^T(q) F_E$$

Nel robot planare a due bracci risulta =

$$\dot{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial q_m} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q} (-\gamma \sin q_2) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\left( \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right) \gamma \sin q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{essendo} \quad \frac{\partial B}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -\gamma \sin q_2 & -\gamma \sin q_2 \\ -\gamma \sin q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

OSS: La matrice  $\dot{B}(q, \dot{q})$  può essere espressa (in generale) come sommatoria dei seguenti termini:

$$\dot{B}(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} (B(q)) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial B}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Nel caso particolare del robot a due bracci planare, la sommatoria degenera in un unico termine, per cui la derivata nel tempo della  $B(q)$  si può esprimere =

$$\frac{d}{dt} (B(q)) = \begin{bmatrix} -\gamma \dot{q}_2 \sin q_2 & -\gamma \dot{q}_2 \sin q_2 \\ -\gamma \dot{q}_2 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} = \dot{B}(q, \dot{q})$$

OSS: Tutti i robot che hanno il primo giunto di tipo a cerniera hanno  $\partial B / \partial q_1 = 0$  in quanto l'inerzia al primo giunto è indipendente da come il robot è girato. Se il primo giunto è prismatico, l'inerzia vista da tale giunto degenera nella massa equivalente applicata nel centro di massa. Calcolata la  $\dot{B}(q, \dot{q})$  poniamo ora calcolane la  $\otimes$  nel caso del robot a due bracci planare:

$$\dot{B}(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{B}(q, \dot{q}) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (-\gamma \dot{q}_2 \sin q_2) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

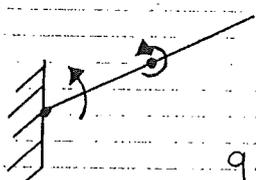
$$\Rightarrow \dot{B}(q, \dot{q}) \dot{q} = \begin{bmatrix} -\gamma \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \\ -\gamma \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Se ora calcoliamo  $\otimes - \otimes$  come indicato nella equazione:

$$\begin{bmatrix} -\gamma \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 - 0 \\ -\gamma \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \gamma \sin(q_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\gamma \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \gamma \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ -\frac{1}{2} \gamma \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \gamma \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} = \otimes \dots \text{ (continua nella pagina accanto)}$$

OSS: I termini che dipendono dai prodotti delle velocità di giunto  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$  sono relativi alle forze di Coriolis mentre quelli che dipendono dai quadrati delle velocità di giunto sono relativi alla forza centrifuga. Se  $q_2 = 0 \Rightarrow$  il braccio è esteso. In questa configurazione si realizza

le)  mo gli attuatori con  $\dot{q}_1 \neq 0$  e  $\dot{q}_2 = 0$  (si vuole muovere la spalla tenendo disteso il braccio cioè  $q_2 = 0$ ) si realizzerà solo il contributo della forza centrifuga prodotta da  $\dot{q}_1$  sul giunto 2  $\Rightarrow$  affinché in questa configurazione si realizzi a braccio disteso si deve applicare una coppia  $\frac{1}{2} \gamma \sin(q_2) \dot{q}_1^2$  al giunto 2. Al contrario

si vuole che  $q_1$  sia invariato in corrispondenza di un  $\dot{q}_2$  (cioè di un movimento del secondo braccio ( $\dot{q}_1 = 0$  e  $\dot{q}_2 \neq 0$ )  $\Rightarrow$  sul giunto 1 si deve esercitare una coppia  $-\gamma \sin(q_2) \dot{q}_2^2$

OSS: Nei due disegni precedenti, in rosso sono riportati i momenti desiderati mentre in verde le coppie agenti sui giunti che annullano o equilibrano le forze centrifughe prodotte dai bracci in movimento. Se  $\dot{q}_1$  e  $\dot{q}_2$  sono entrambe non nulle, intervengono entrambe i termini su entrambi i giunti per compensare le forze di Coriolis. Il vettore che abbiamo ottenuto come differenza tra  $\otimes$  e  $\oplus$  è il seguente prodotto:

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \gamma \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 \\ -\frac{1}{2}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \frac{1}{2}\dot{q}_1 & -\frac{1}{2}\dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

La scelta di  $C(q, \dot{q})$  non è unica,  $\exists$  cmq una scelta privilegiata.

Poniamo adesso esprimere esplicitamente il modello del robot a 2 bracci planare sostituendo quanto trovato:

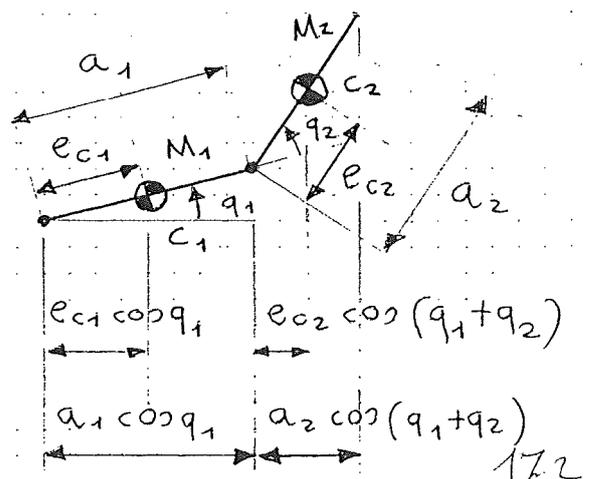
$$\begin{aligned} & (\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \gamma \cos q_2) \ddot{q}_1 + (\bar{I}_2 + \gamma \cos q_2) \ddot{q}_2 - \gamma \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ & - \gamma \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + d_1 \dot{q}_1 + M_1 g e_{c1} \cos q_1 + M_2 g a_1 \dot{q}_1 + \\ & + M_2 g e_{c2} \cos(q_1 + q_2) = M_1 \rightarrow \text{per il primo giunto} \\ & (\bar{I}_2 + \gamma \cos q_2) \ddot{q}_1 + \bar{I}_2 \ddot{q}_2 - \frac{1}{2} \gamma \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \gamma \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + \\ & + d_2 \dot{q}_2 + g M_2 e_{c2} \cos(q_1 + q_2) = M_2 \rightarrow \text{per il 2° giunto} \end{aligned}$$

OSS: Si è considerato il modello dell'attinto semplificato con il solo attinto viscoso:

Questo è il modello del robot planare a 2 bracci caratterizzato dalle seguenti variabili cinematiche e dinamiche  $\rightarrow$

Scrivere il modello di questo robot in forma esplicita è stato possibile perché ha solo 2 bracci; ma se il robot ha  $n$  bracci, può risultare

$$d(\dot{q}) = \begin{pmatrix} d_1 \dot{q}_1 \\ d_2 \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$



di  
B  
OS  
pre  
che  
se  
PA  
Le  
sen  
pre  
Ne  
 $\theta$   
Ce  
no  
se  
[  
=  
S  
de  
V:  
zi  
S  
le  
q  
c

difficilissimo e molto complesso il calcolo dell'a:

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = u$$

OSS: Un modello non lineare di questo tipo (\*) si può sempre scrivere come una funzione lineare nei parametri, cioè come il prodotto di una matrice di coefficienti per un vettore di parametri, nel seguente modo:

### PARAMETRIZZAZIONE LINEARE DEL ROBOT

Il modello del robot è altamente non lineare, ma può essere messo in forma lineare nei parametri con una espressione del tipo:

$$\Pi(q, \dot{q}, \ddot{q}) \Theta = u$$

Nel caso del robot planare a due bracci, il vettore di parametri è:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \gamma \\ M_1 g l_{c1} + M_2 a_1 g \\ M_2 l_{c2} g \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix}$$

com  $\gamma = M_2 l_{c2} a_1$   
OSS: Il contributo di  $M_1 g l_{c1}$  e di  $M_2 a_1 g$  non viene distinto in quanto i due coefficienti moltiplicano entrambi solo  $\cos(q_1)$

Considerando questo vettore di parametri il modello del robot può essere messo nella forma  $\Pi(q, \dot{q}, \ddot{q}) \Theta = u$  nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 - \dot{q}_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 & \cos q_1 & \cos(q_1 + q_2) & \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \ddot{q}_1 \cos q_2 - \frac{1}{2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \sin q_2 & 0 & \cos(q_1 + q_2) & 0 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

com  $\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7]^T$

Scrittura in forma lineare del modello del robot in funzione dei parametri  $\Theta$ . Si utilizza per l'identificazione parametrica. Il sistema meccanico, in genere, ammette una rappresentazione in questa forma. L'analisi che viene presentata sullo SCIAVICCO è in vece la seguente: si hanno a disposizione le misure di posizione e velocità in un certo numero di istanti:

$$q_k = q(t_k); \quad \dot{q}_k = \dot{q}(t_k) \rightarrow \text{da cui si calcolano le corrispondenti accelerazioni } \ddot{q}_k = \ddot{q}(t_k) \Rightarrow \text{tutto che } \Theta$$

$\ddot{q}$  non si misura ma si deriva dalla  $\dot{q}$ , e' andamento che si calcola della  $\dot{q}$  non e' ottimale se ad esempio alla  $\dot{q}$  e' sovrapposto del rumore. Se disponessi di buone misure dell'accelerazione, potrei scrivere:

$$\begin{cases} \Pi(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1)\theta = \mu_1 \\ \Pi(q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2)\theta = \mu_2 \\ \vdots \\ \Pi(q_m, \dot{q}_m, \ddot{q}_m)\theta = \mu_m \end{cases}$$

OSS: Come visto prima  $\mu_1 = \mu(t_1)$  e' il valore dell'ingresso di controllo all'istante  $t_1$  (mom la prima componente di  $\mu$ )  
 $\Rightarrow$  accorpando le misure

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Pi(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1) \\ \vdots \\ \Pi(q_m, \dot{q}_m, \ddot{q}_m) \end{bmatrix} \theta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \iff \boxed{A} x = b$$

A: ha più righe che colonne

Se ho tante misure (in tanti istanti differenti  $t_1 \dots t_m$ ) posso risolvere il pb di trovare il vettore di parametri con il pb di trovare e' incognita  $x$  nella  $Ax = b$  con  $A$  matrice rettangolare alta. Visto che le misure non sono in generale connette (e che  $\ddot{q}$  si ottiene derivando  $\dot{q}$  con tutti i problemi che ne scaturiscono)  $\Rightarrow b \notin R(A) \Rightarrow$  si cerca la soluzione  $x$  che dà la minima norma (pesata secondo la matrice di peso  $W$ ) dell'errore:

$$\boxed{\hat{x} = A_w^+ b}$$

dove  $A_w^+$  e' la pseudo inversa sinistra di  $A$ .

Quindi il pb:  $\overline{\Pi} \theta = \overline{U}$  ha soluzione  $\hat{\theta} = \overline{\Pi}^+ \overline{U}$

In particolare se  $W = I \Rightarrow \boxed{\overline{\Pi}^+ = (\overline{\Pi}^T \overline{\Pi})^{-1} \overline{\Pi}^T}$

Questa e' quindi la procedura di stima dei parametri riportata dallo SCIavicco. Il difetto di questa procedura sta nel fatto che bisogna calcolare la derivata numerica della velocità per ottenere l'accelerazione che non può essere misurata direttamente. Inoltre la pseudo inversa  $Sx$  ha dimensioni elevate (se ho tanti parametri e tante misure).

OSS: Dal punto di vista pratico e' problematico scrivere la parametrizzazione del modello di un robot ad m bracci. Le procedure simboliche di calcolo usate per il calcolo delle matrici di inerzia, possono essere implementate su matlab



Anche il modello del robot può essere ricondotto alla eq. differenziale del primo ordine (modello di sistema monomecano in forma canonica) definendo lo stato:

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = q & \text{con questa} \\ x_2 = \dot{q} & \text{definizione si ha:} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{q}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{q}(t) = B^{-1}(x_1) [u - N(x_1, x_2)] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -B^{-1}(x_1)N(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1}(x_1) \end{bmatrix} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = f(x) + g(x)u \quad \text{con } f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -B^{-1}(x_1)N(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

e  $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1}(x_1) \end{bmatrix}$ . Otteniamo così il sistema nella sua forma canonica (eq. diff. I° grado)

Si può linearizzare il sistema con la tecnica della linearizzazione esatta (che ha una interpretazione più diretta con il modello monomecano in forma canonica) considerando come uscite le variabili di giunto:  $y(t) = x_1(t)$

OSS: Si devono distinguere le uscite in base al fatto che siano variabili misurate o variabili che si vogliono controllare. In questo caso l'uscita misurata potrebbe essere:

$$y_m(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{anche se in genere le velocità si derivano dalle posizioni.}$$

mentre le uscite controllate potrebbero essere:

$$\begin{cases} y_c(t) = x_1(t) \rightarrow \text{Se si vogliono controllare le variabili di giunto} \\ y_c(t) = K(x_1(t)) \rightarrow \text{Se si vogliono controllare le velocità cartesiane.} \end{cases}$$

Una volta posto il modello in forma canonica, si può simulare il funzionamento del robot con un programma di simulazione come MATLAB (OSS: ODE45, ODE23  $\rightarrow$  sono delle routine di integrazione delle eq. differenziali che sfruttano il metodo di Runge-Kutta. Queste routine, dato lo stato e l'ingresso ad un certo istante, restituiscono le derivate prime cioè lo stato all'istante successivo. L'algoritmo numerico generale risolve quindi il pb diretto.

È a  
dove  
util  
del  
Tro  
legg  
LE  
legg  
zate  
Le  
ma  
di m  
AZIO  
OSS  
IE  
I  
mer  
lità  
il c  
g  
 $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$   
126