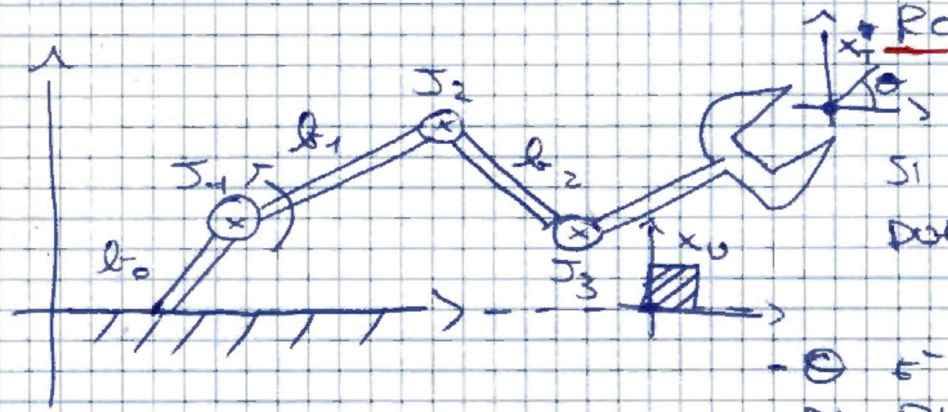
CINEMATICA

Studente:
Mario Di Ferdinando

LEZIONE 2 29/09/2011

UN ROBOT È FORMATO DA BRACCI E GIUNTI

- IL BRACCIO A TERRA VIENE CHIAMATO BRACCIO ZERO



ROBOT PLANARE

⇓

SI MUOVE SOLO SU DUE DIMENSIONI

- θ È UN ANGOLO DI RIFERIMENTO TRA LA TERRA E LA PINZA

X_U RIFERIMENTO UTENTE

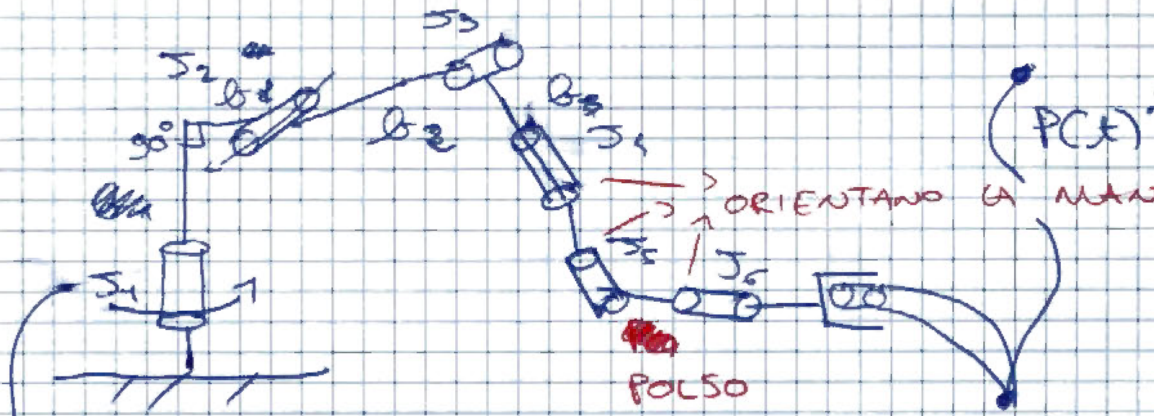
X_T RIFERIMENTO TOOL

CINEMATICA DIRETTA

DAI GIUNTI CONOSCERE LA POSIZIONE DELLA MANO

CINEMATICA INVERSA

DALLA MANO CONOSCERE LA POSIZIONE DEI GIUNTI



→ TRAIETTORIA DI TCP

TCP

TOOL CENTER POINT

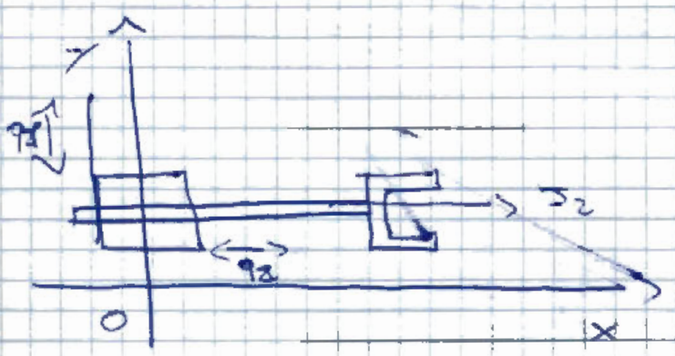
GIUNTI A CERNIERA

⇓

SI MUOVONO CIRCOLARI

PROBLEMA ROBOT PLANARE

- ROBOT CARTESIANO



$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 + x_0 \\ q_1 + y_0 \end{bmatrix}$$

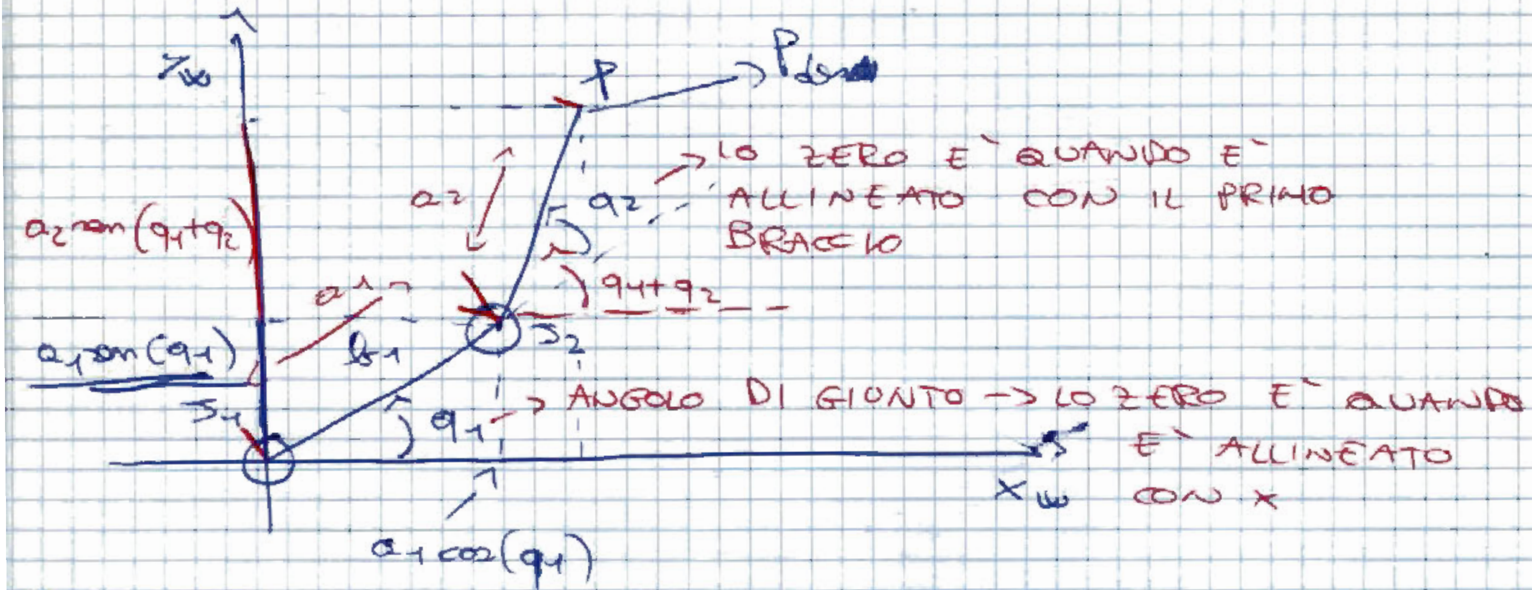
q_1, q_2 SONO GLI SPOSTAMENTI CHE FANNO I GIUNTI TRAMITE I MOTORI

SI SOMMA NEL CASO IN CUI LO ZERO DELLA TERRA E' DIVERSO DALLO ZERO DELL'UTENTE

⇓

LO ZERO E' LA POSIZIONE STANDARD

- ROBOT PLANARE 2R



DOBBIAMO CALCOLARE P

LE COORDINATE SUL GIUNTO 1 SARA'

$a_1 \cos(q_1)$ $\quad$ $a_1 \sin(q_1)$

LE COORDINATE MANCANTI

$a_2 \sin(q_1+q_2)$ $\quad$ $a_1 \cos(q_1+q_2)$

QUINDI P SARÀ

$$\begin{cases} P_x = a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1+q_2) \\ P_y = a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1+q_2) \end{cases}$$ CINEMATICA DIRETTA

CINEMATICA DIFFERENZIALE (CI DÀ LA VELOCITÀ)

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \qquad q(t) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

POSIZIONE — VELOCITÀ

$$\dot q(t) = \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{P = k(q)} \to \boxed{\dot p(t) = \frac{d}{dt}\left(k(q(t))\right)}$$

VELOCITÀ TCP

$$\dot p(t) = \frac{\partial k}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial k}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial k}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}$$

→ DIPENDE DAL NUMERO DI GIUNTI

⇓ SCRIVENDO IN FORMA PIÙ COMPATTA

$$\boxed{\begin{aligned} \dot p(t) &= \frac{\partial k}{\partial q_1}\dot q_1 + \frac{\partial k}{\partial q_2}\dot q_2 + \dots + \frac{\partial k}{\partial q_n}\dot q_n = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial k}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \vdots \\ \dot q_n \end{bmatrix} = \frac{dk}{dq} \cdot \dot q = J(q)\dot q \end{aligned}}$$

VELOCITÀ CARTESIANA DEL TCP

DETTO QUESTO TORNANDO AL ROBOT CARTESIANO

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q_1} & \frac{\partial k}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial q_1} & \frac{\partial P_x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial P_y}{\partial q_1} & \frac{\partial P_y}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

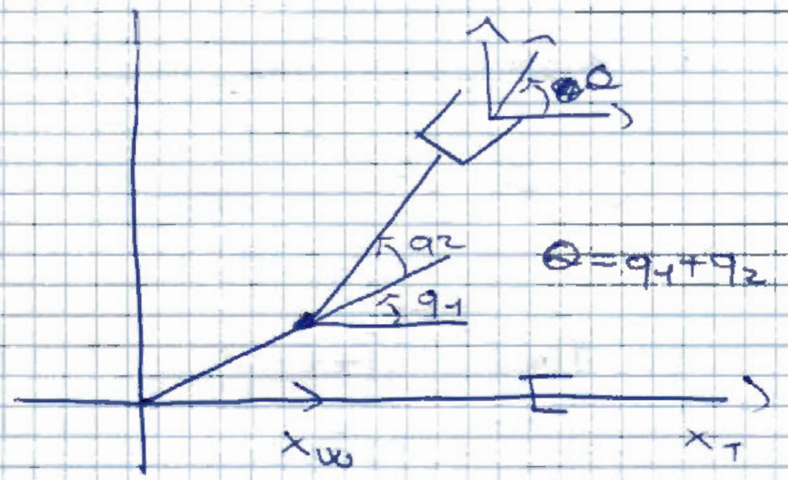
⇓

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s(q_1) - a_2 s(q_1+q_2) & -a_2 s(q_1+q_2) \\ a_1 c(q_1) + a_2 c(q_1+q_2) & +a_2 c(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

ANALIZZIAMO IL PROBLEMA INVERSO

$$\dot{q}_{des} = J^{-1}(q)\,\dot{P}_{des}$$

PER QUANTO RIGUARDA L'ORIENTAMENTO



$\Theta = q_1 + q_2$

VA AGGIUNTO ALLE EQUAZIONI DELLA CINEMATICA DIRETTA

⇓

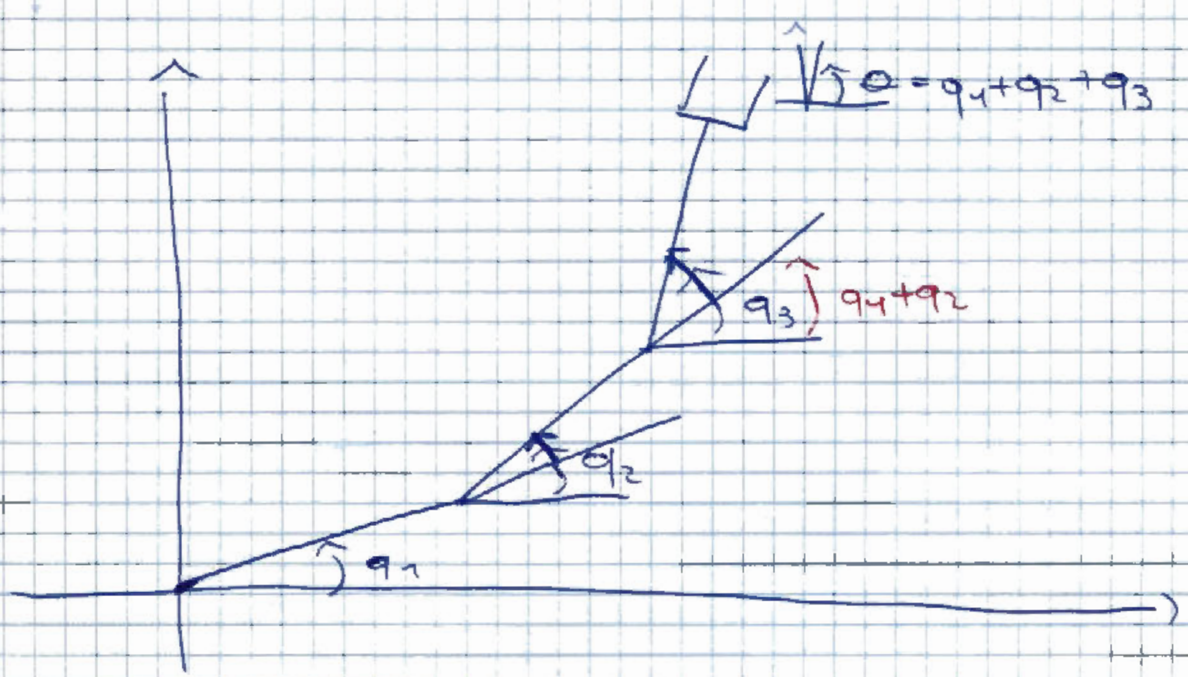
LO JACOBIANO AVRÀ L'AGGIUNTA DI UNA RIGA $[1 \;,\; 1]$

⇓ LA VELOCITÀ

$$\dot{\Theta} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

COSÌ NON POTREI ORIENTARE IL BRACCIO POICHÉ HO NELLA CINEMATICA DIRETTA TRE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE

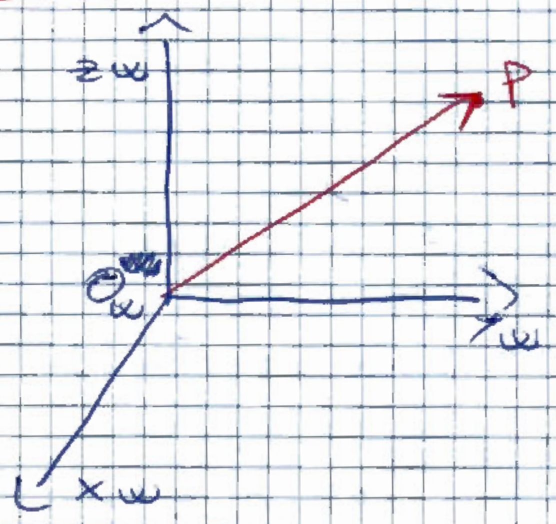
DEVO AGGIUNGERE UN TERZO GRADO DI LIBERTÀ



$$\begin{cases} P_x = a_1 c(q_1) + a_2 c(q_1+q_2) + a_3 c(q_1+q_2+q_3) \\ P_y = a_1 s(q_1) + a_2 s(q_1+q_2) + a_3 s(q_1+q_2+q_3) \\ \Theta = q_1+q_2+q_3 \end{cases}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO

• ORTOGONALE



VETTORE DI SPOSTAMENTO IN P

$r_{wp} \in E^3$

$r_{wp} = \alpha_x x_w + \alpha_y y_w + \alpha_z z_w$

RAPPRESENTAZIONE DEL VETTORE

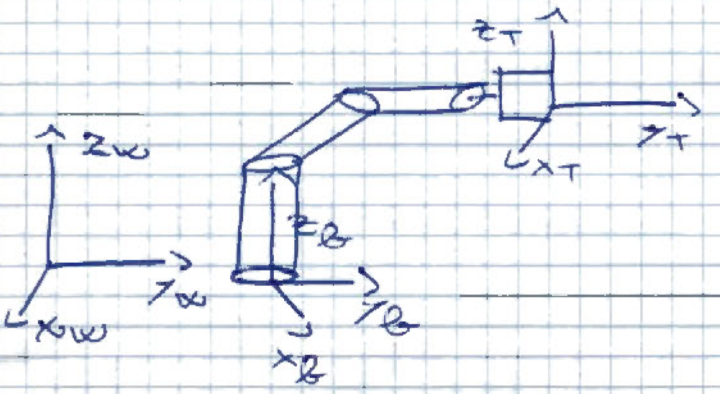
$${}^{w}r_{wp} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{w}r_{wp,x} \\ {}^{w}r_{wp,y} \\ {}^{w}r_{wp,z} \end{bmatrix}$$

RIPRENDIAMO IL PROBLEMA

LEZIONE 3

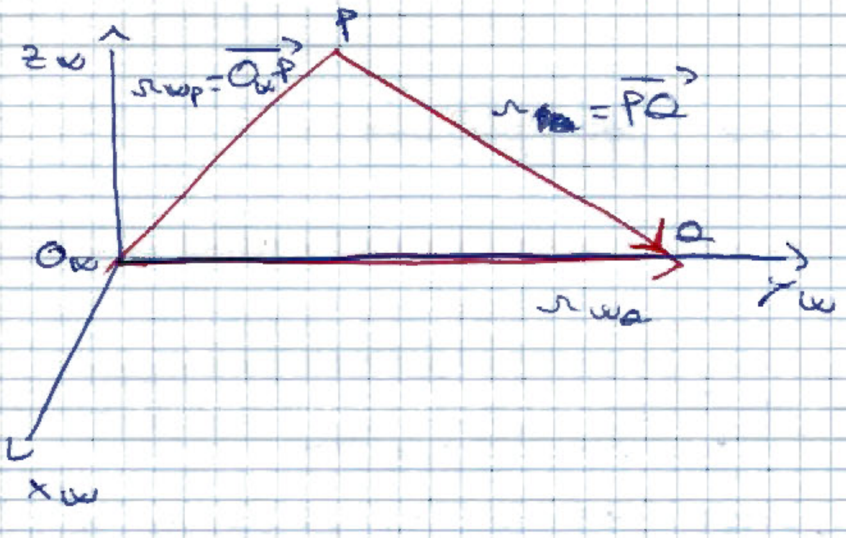
04/10/2011

- PROBLEMA INVERSO

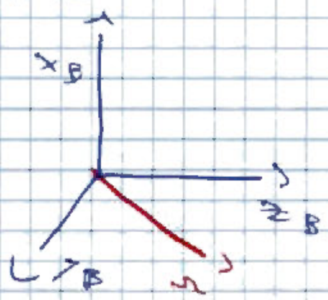


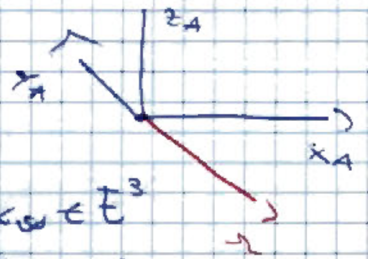
ANDIAMO A VEDERE COME SPOSTARCI DA UN SISTEMA DI RIF. AD UN'ALTRO

CONSIDERIAMO IN GENERALE



POSSO CAMBIARE SISTEMA DI RIFERIMENTO





IL NOSTRO CAMBIO DI COORDINATE SARÀ

$$\boxed{r = {}^w r_x \, x_w + {}^w r_y \, y_w + {}^w r_z \, z_w}$$

CON $x_w \in E^3$, ${}^w r_x \in \mathbb{R}$

$${}^w r = \begin{bmatrix} {}^w r_x \\ {}^w r_y \\ {}^w r_z \end{bmatrix}$$

COORDINATE SUL WORLD

$$\boxed{r = {}^B r_x \, x_B + {}^B r_y \, y_B + {}^B r_z \, z_B}$$

COORDINATE SU B

PER CAMBIARE COORDINATE DOBBIAMO VEDERE LA RELAZIONE TRA LE DUE

SI USANO SEMPRE TERNE DESTRE (REGOLA MANO DESTRA)

ANCHE SE POTREMMO USARE QUALSIASI TERNA x, y, z. PERO' CI SEMPLIFICA I CALCOLI

- SCEGLIAMO PER GLI ASSI COORDINATE DEI VERSORI (VETTORI DI MODULO 1)

$$\boxed{\|x_w\| = \|y_w\| = \|z_w\| = 1} \quad \text{VERSORI}$$

- ORTOGONALI

$$\left.\boxed{\begin{aligned} x_w \cdot y_w &= 0 \\ y_w \cdot z_w &= 0 \\ x_w \cdot z_w &= 0 \end{aligned}}\right\} \text{ORTOGONALITA'}$$

- LEVOGIRA

$$x_w \cdot y_w = z_w \quad \text{DESTRORSA}$$

SCRIVENDO LO SPOSTAMENTO DELL'ASSE x_B DI MODULO 1 RISPETTO AD x_w SI HA CHE

$$x_B = {}^{w}x_{B,x}\, x_w + {}^{w}x_{B,y}\, y_w + {}^{w}x_{B,z}\, z_w$$

→ SPOSTAMENTO DI x_B LUNGO x_w NEL SIST. DI RIF. DEL WORLD

$${}^{w}x_B = \begin{bmatrix} {}^{w}x_{B,x} \\ {}^{w}x_{B,y} \\ {}^{w}x_{B,z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

QUINDI

→ R STA PER ROTATION (CI DA INFORMAZIONI ANCHE SULL'ORIENTAMENTO

$${}^{w}R_B = \begin{bmatrix} {}^{w}x_B & {}^{w}y_B & {}^{w}z_B \end{bmatrix} \Rightarrow \text{MATRICE}$$

RAPPRESENTANDO AD ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} {}^{w}x_w & {}^{w}y_w & {}^{w}z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{w}R_w = I_3$$

ANDIAMO QUINDI A CERCARE LA RELAZIONE CHE VOLEVAMO PRIMA

$$ {}^{w}\Omega_x = x_w \cdot \Omega $$ → PRODOTTO SCALARE

QUINDI

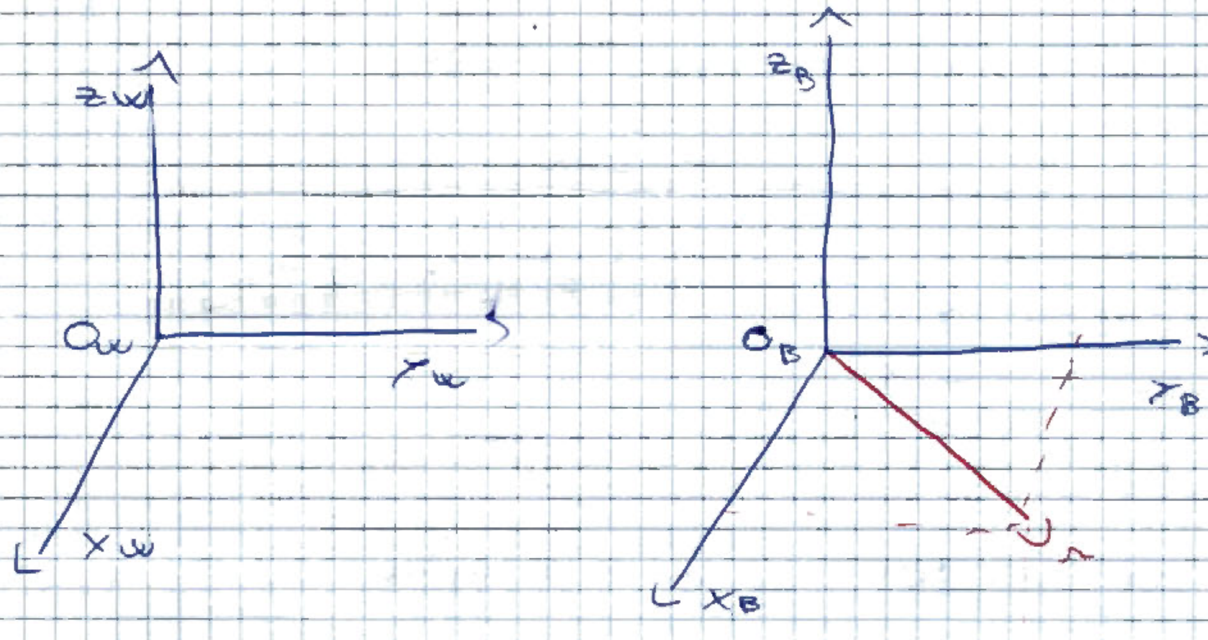
$$ x_w \Omega = {}^{w}\Omega_x (x_w \, x_w) + {}^{w}\Omega_y (x_w \, y_w) + {}^{w}\Omega_z (x_w \cdot z_w) $$
$$ 1 \qquad 0 \qquad 0 $$

DA QUESTA CAPIAMO CHE

$$ \Omega = {}^{w}\Omega_x \, x_w + {}^{w}\Omega_y \, y_w + {}^{w}\Omega_z \, z_w $$
$$ x_w \Omega \qquad y_w \Omega \qquad z_w \Omega $$

PRODOTTI SCALARI

ANDIAMO QUINDI A CALCOLARE IL NOSTRO CAMBIO DI COORDINATE



$$ {}^{w}\Omega_x = x_w \, \Omega = x_w \left({}^{B}\Omega_x \, x_B + {}^{B}\Omega_y \, y_B + {}^{B}\Omega_z \, z_B \right) = $$
$$ = {}^{B}\Omega_x (x_w \, x_B) + {}^{B}\Omega_y (x_w \, y_B) + {}^{B}\Omega_z (x_w \, z_B) $$

NON SONO ORTOGONALI => SONO DI SIST. DI RIF. DIVERSI

$${}^{W}r_y = y_W \cdot r = {}^{B}r_x (y_W \cdot x_B) + {}^{B}r_y (y_W \cdot y_B) + {}^{B}r_z (y_W \cdot z_B)$$

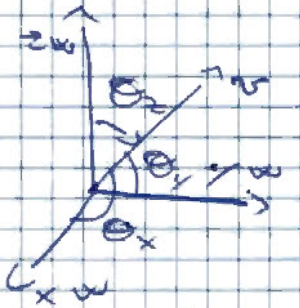
$${}^{W}r_z = z_W \cdot r = {}^{B}r_x (z_W \cdot x_B) + {}^{B}r_y (z_W \cdot y_B) + {}^{B}r_z (z_W \cdot z_B)$$

LA TERNA APPENA SCRITTA SI CHIAMA ${}^{W}r$ QUINDI

$${}^{W}r = \begin{bmatrix} x_W \cdot x_B & x_W \cdot y_B & x_W \cdot z_B \\ y_W \cdot x_B & y_W \cdot y_B & y_W \cdot z_B \\ z_W \cdot x_B & z_W \cdot y_B & z_W \cdot z_B \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{B}r_x \\ {}^{B}r_y \\ {}^{B}r_z \end{bmatrix}}_{{}^{B}r} = \left[{}^{W}R_B\right] {}^{B}r$$

QUESTI SONO TRE COSENI DI VETTORE

COME NOTIAMO È UNA TRASFORMAZIONE LINEARE



$$\boxed{\begin{gathered} {}^{W}r = \left[{}^{W}R_B\right] {}^{B}r \\ \text{CON} \\ {}^{W}R_B = \left[{}^{W}x_B \;\; {}^{W}y_B \;\; {}^{W}z_B\right] \end{gathered}}$$

$${}^{W}v = \begin{bmatrix} \cos\theta_x \\ \cos\theta_y \\ \cos\theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_W \cdot v \\ y_W \cdot v \\ z_W \cdot v \end{bmatrix}$$

APPLICAZIONI

ABBIAMO DUE VETTORI r, v E LA RAPPR. ${}^{W}r, {}^{W}v$ E SI HA

$$r = {}^{W}r_x x_W + {}^{W}r_y y_W + {}^{W}r_z z_W$$

$$v = {}^{W}v_x x_W + {}^{W}v_y y_W + {}^{W}v_z z_W$$

$$r \cdot v = \left({}^{W}r_x x_W + {}^{W}r_y y_W + {}^{W}r_z z_W\right)\left({}^{W}v_x x_W + {}^{W}v_y y_W + {}^{W}v_z z_W\right)$$

$$= {}^{W}r_x {}^{W}v_x \underbrace{(x_W \cdot x_W)}_{1} + {}^{W}r_y {}^{W}v_y \underbrace{(y_W \cdot y_W)}_{1} + {}^{W}r_z {}^{W}v_z \underbrace{(z_W \cdot z_W)}_{1}$$

QUINDI

$$\Omega \cdot v = {}^{w}\Omega_x {}^{w}v_x + {}^{w}\Omega_y {}^{w}v_y + {}^{w}\Omega_z {}^{w}v_z = {}^{w}\Omega^T \, {}^{w}v$$

CONSIDERIAMO ORA

$$ {}^{B}R_w = \begin{bmatrix} {}^{B}x_w & {}^{B}y_w & {}^{B}z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w x_B & y_w x_B & z_w x_B \\ x_w y_B & y_w y_B & z_w y_B \\ x_w z_B & y_w z_B & z_w z_B \end{bmatrix} = {}^{w}R_B^T $$

ABBIAMO SCOPERTO CHE

$$\boxed{{}^{B}R_w = {}^{w}R_B^T}$$

$$\boxed{{}^{B}R_w = {}^{w}R_B^{-1}}$$

MATRICE ORTONORMALE

$\Downarrow$

LA TRASPOSTA E L'INVERSA SONO UGUALI

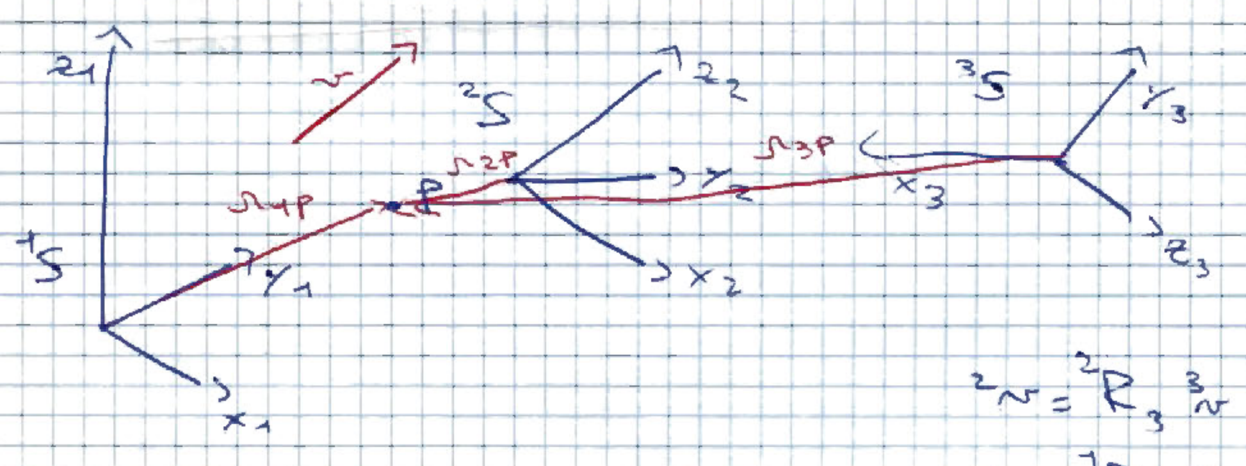
CE NE SONO ∞^3 NELLO SPAZIO ∞^9 DI MATRICI 3x3

$SO(3)$ — ∞^3

NON E' UNO SPAZIO LINEARE

GRUPPO SPECIALE ORTONORMALE DI ORDINE 3

CONSIDERIAMO ORA DI TROVARE LO SPOSTAMENTO v



$${}^{2}v = {}^{2}R_3 \, {}^{3}v$$

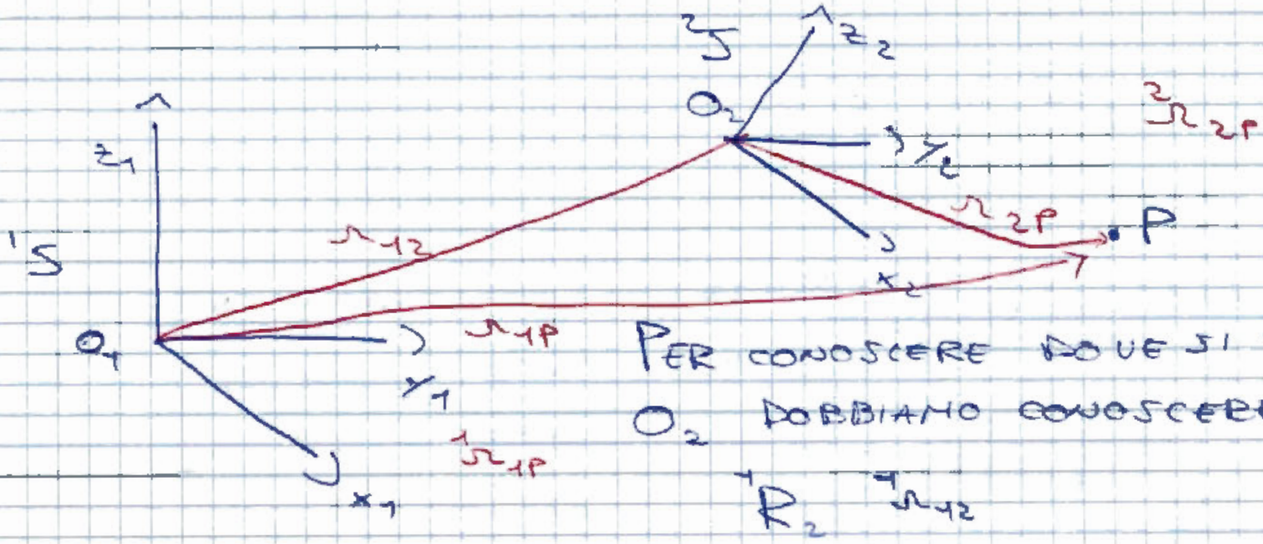
$${}^{1}v = {}^{1}R_2 \, {}^{2}v$$

SOSTITUENDO

$${}^{1}v = \underbrace{{}^{1}R_2 \, {}^{2}R_3}_{{}^{1}R_3} \, {}^{3}v$$

TROVIAMO INVECE ORA LA POSIZIONE P

RIDISEGNAMO TUTTO



PER CONOSCERE DOVE SI TROVA O_2 DOBBIAMO CONOSCERE

$^1R_2$ $\quad$ $^1r_{12}$

ANDIAMO QUINDI A TROVARE r_{1P}

$r_{1P} = r_{12} + r_{2P}$ $\Rightarrow$ SOMMA VETTORIALE E^3

ORA CONSIDERANDO ^1S

$$\boxed{\begin{aligned} &^1r_{1P} = {}^1r_{12} + {}^1r_{2P} = \\ &= {}^1r_{12} + {}^1R_2\,{}^2r_{2P} \end{aligned}}$$

$\mathbb{R}$

OPERATORE LINEARE IN UN SISTEMA DI COORDINATE

NOTAZIONE ⇒ MATRICE DI ROTOTRASLAZIONE

LEZIONE 5

05/10/2019

CHIAMIAMO

$$ {}^2\tilde{r}_{2P} = \begin{bmatrix} {}^2r_{2P} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad {}^1\tilde{r}_{1P} = \begin{bmatrix} {}^1r_{1P} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad {}^1\tilde{v} = \begin{bmatrix} {}^1v \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 $$

QUESTO SI FA PERCHÉ DEFINENDO UNA MATRICE

$$ \boxed{{}^1T_2 = \left[\begin{array}{c|c} {}^1R_2 & {}^1r_{12} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{4\times4}} \Rightarrow $$

POSSIAMO OTTENERE LA ROTOTRASLAZIONE FATTA PRIMA COSÌ

$$ \boxed{{}^1\tilde{r}_{1P} = {}^1T_2\,{}^2\tilde{r}_{2P}} $$

$$ \Downarrow $$

$$ \left[\begin{array}{c|c} {}^1R_2 & {}^1r_{12} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^2r_{2P} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1R_2\,{}^2r_{2P} + {}^1r_{12} \\ \\ 1 \end{bmatrix} $$

MATRICE DI ~~[illegible]~~ ROTOTRASLAZIONE

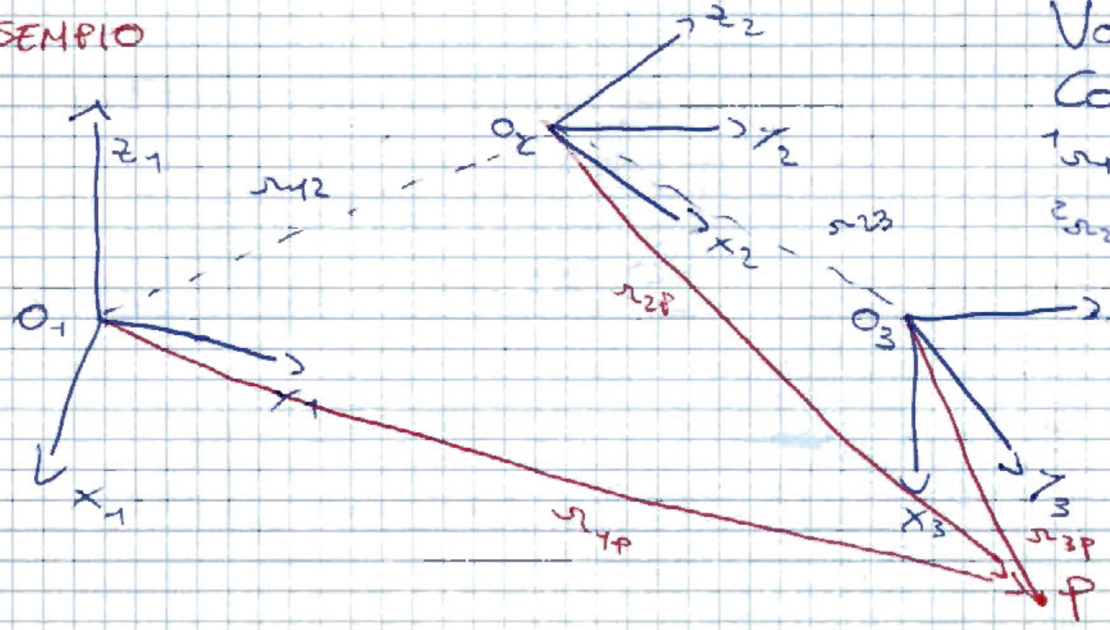
$\Downarrow$

A DIFFERENZA DI QUELLA DI ROTAZIONE R ~~[illegible]~~ LA T NON È ORTONORMALE

NEL CASO DEL VETTORE VELOCITÀ

$$ {}^1\tilde{v} = {}^1T_2\,{}^2\tilde{v} = \left[\begin{array}{c|c} {}^1R_2 & {}^1r_{12} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^2v \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1R_{12}\,{}^2v \\ \hline 0 \end{bmatrix} $$

ESEMPIO



VOGLIAMO r_{1P}

CONOSCIAMO

${}^1r_{12}$, ${}^1R_2$

${}^2r_{23}$, ${}^2R_3$

$${}^{2}r_{2P} = {}^{2}R_{3}\,{}^{3}r_{3P} + {}^{2}r_{23}$$

$${}^{1}r_{1P} = {}^{1}R_{2}\,{}^{2}r_{2P} + {}^{1}r_{12}$$

TUTTA INSIEME

$${}^{1}r_{1P} = {}^{1}R_{2}\left({}^{2}R_{3}\,{}^{3}r_{3P} + {}^{2}r_{23}\right) + {}^{1}r_{12} = {}^{1}R_{2}\,{}^{2}R_{3}\,{}^{3}r_{3P} + {}^{1}R_{2}\,{}^{2}r_{23} + {}^{1}r_{12}$$

UTILIZZANDO LE COORDINATE OMOGENEE E LA T SI HA CHE

$${}^{3}\tilde{r}_{3P} = \begin{bmatrix} {}^{3}r_{3P} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4} \qquad {}^{1}\tilde{r}_{1P} = \begin{bmatrix} {}^{1}r_{1P} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{2}\tilde{r}_{2P} = {}^{2}T_{3}\,{}^{3}\tilde{r}_{3P}$$

$${}^{1}\tilde{r}_{1P} = {}^{1}T_{2}\,{}^{2}\tilde{r}_{2P}$$

$$\Rightarrow {}^{1}\tilde{r}_{1P} = {}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\,{}^{3}\tilde{r}_{3P}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{{}^{1}R_{3} = {}^{1}R_{2}\,{}^{2}R_{3}}$$

MATRICE DI ROTAZIONE O DEGLI ORIENTAMENTI

$\downarrow$

R

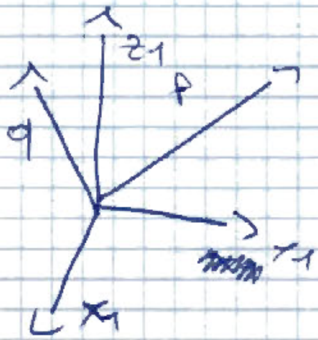
$$\boxed{{}^{1}T_{3} = {}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} {}^{1}R_{2}\,{}^{2}R_{3} & {}^{1}R_{2}\,{}^{2}r_{23} + {}^{1}r_{12} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} {}^{1}R_{3} & {}^{1}r_{13} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

RICONSIDERIAMO ORA IL PRODOTTO VETTORIALE

PRENDIAMO



$$q = f(p) \qquad {}^1p = \begin{bmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{bmatrix}$$

$$p \in E^3 \rightarrow q \in E^3 \qquad p = {}^1p_x x_1 + {}^1p_y y_1 + {}^1p_z z_1$$

$${}^1f(p) = {}^1f\left({}^1p_x x_1 + {}^1p_y y_1 + {}^1p_z z_1\right) =$$

$$= {}^1p_x\, {}^1f(x_1) + {}^1p_y\, {}^1f(y_1) + {}^1p_z\, {}^1f(z_1)$$

VUOL DIRE CHE LO VOGLIO ESPRIMERE RISPETTO AL SISTEMA DI RIF. 1

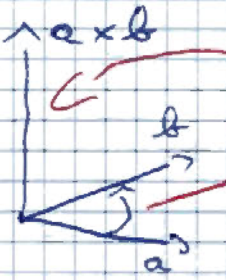
QUINDI

$${}^1f(p) = \begin{bmatrix} {}^1f(x_1) & {}^1f(y_1) & {}^1f(z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

PRODOTTO VETTORIALE

$$a \times b \qquad |a \times b| = |a| \cdot |b| \operatorname{sen}\theta$$



ORTOGONALE AI DUE SEMPRE

SE a VA VERSO b

$\Downarrow$

REGOLA DEL CACCIAVITE

PROPRIETÀ

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $f(p) = a \times p$
- $f(p+q) = a \times (p+q) = a \times p + a \times q = f(p) + f(q)$ LINEARE
- $f(\alpha p) = \alpha f(p)$
- $a \times (\alpha b) = \alpha (a \times b)$

CONSIDERIAMO ORA DI VOLERE IL PRODOTTO RISP. AD UN SIST. DI COORD.

$$c = {}^1(a \times b) \qquad {}^1a = \begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} \qquad {}^1b = \begin{bmatrix} {}^1b_x \\ {}^1b_y \\ {}^1b_z \end{bmatrix}$$

CERCHIAMO ${}^1c_x, {}^1c_y, {}^1c_z$ E SI HA

$$\begin{bmatrix} {}^1a_x & {}^1b_x \\ {}^1a_y & {}^1b_y \\ {}^1a_z & {}^1b_z \end{bmatrix}$$

$${}^1c_x = \begin{vmatrix} {}^1a_y & {}^1b_y \\ {}^1a_z & {}^1b_z \end{vmatrix} = {}^1a_y {}^1b_z - {}^1a_z {}^1b_y$$

$${}^1c_y = - \begin{vmatrix} {}^1a_x & {}^1b_x \\ {}^1a_z & {}^1b_z \end{vmatrix}$$

$${}^1c_z = \begin{vmatrix} {}^1a_x & {}^1b_x \\ {}^1a_y & {}^1b_y \end{vmatrix}$$

VEDIAMO COME SEMPLIFICARE I CALCOLI DI QUESTO PRODOTTO

$$f(p) = a \times p \qquad {}^1f(p) = {}^1A\,{}^1p \qquad {}^1A = \left[{}^1f(x_1) \quad {}^1f(y_1) \quad {}^1f(z_1) \right]$$

$$\boxed{{}^1A} = \begin{bmatrix} \underbrace{{}^1(a \times x_1)}_{{}^1f(x_1)} & \underbrace{{}^1(a \times y_1)}_{{}^1f(y_1)} & \underbrace{{}^1(a \times z_1)}_{{}^1f(z_1)} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -{}^1a_z & {}^1a_y \\ {}^1a_z & 0 & -{}^1a_x \\ -{}^1a_y & {}^1a_x & 0 \end{bmatrix}}$$

$${}^1(a \times x_1) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_y & 0 \\ a_z & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & 1 \\ a_z & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & 1 \\ a_y & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ {}^1a_z \\ -{}^1a_y \end{bmatrix}} \qquad a = \begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^1a_x & 1 \\ {}^1a_y & 0 \\ {}^1a_z & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1(a \times y_1) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} {}^1a_y & 1 \\ {}^1a_z & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} {}^1a_x & 0 \\ {}^1a_z & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} {}^1a_x & 0 \\ {}^1a_y & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} {}^1a_x & 0 \\ {}^1a_y & 1 \\ {}^1a_z & 0 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} \qquad y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^1(a \times z_1) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ^1a_y & 0 \\ ^1a_z & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ^1a_x & 0 \\ ^1a_z & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ^1a_x & 0 \\ ^1a_y & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ^1a_x & 0 \\ ^1a_y & 0 \\ ^1a_z & 1 \end{bmatrix}$$

^1A CI PERMETTE DI FARE QUALSIASI PRODOTTO VETTORIALE

AD ESEMPIO

$$a \times b = {}^1A\, b$$

- A_1 È UNA MATRICE ANTISIMMETRICA OVVERO

$$\boxed{A_1^T = -A} \qquad m_{ij} = -m_{ji}$$

$$m_{ii} = 0$$

TALE MATRICE LA CHIAMEREMO

$$^1A = [^1a \times]$$

→ VUOL DIRE a PER

ESEMPIO

$$^1(\omega \times r) = [^1\omega \times] \cdot {}^1r = -[^1 r \times] \cdot \omega$$

PROPRIETÀ MATRICI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

- FORMA QUADRATICA

$$x^T M x = \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}} m_{ij} x_i x_j$$

- PARTE SIMMETRICA E ANTISIMMETRICA DI UNA MATRICE

$$M = M_S + M_a \qquad M_S = \frac{M + M^T}{2} = M_S^T = \frac{M^T + (M^T)^T}{2}$$

$$M_A = \frac{M-M^T}{2} \quad \frac{M^T-M}{2} = M_A^T$$

RICONSIDERANDO LA FORMA QUADRATICA PRENDIAMO

A (antisimmetrica)

PERCHE' ANTISIMMETRICA

$$\boxed{x^TAx = (x^TAx)^T = x^TA^Tx}\ \boxed{= -x^TAx = 0}$$

QUINDI

$$x^TAx = \frac{1}{2}\left(x^TAx + x^TA^Tx\right) = x^T\left(\frac{A+A^T}{2}\right)x$$

SOLO LA PARTE SIMMETRICA E' RESPONSABILE DELLA FORMA QUADRATA

QUINDI

$$x^TAx = x^T(A_S + A_A)x = \boxed{x^TA_Sx} + \boxed{\underbrace{x^TA_Ax}_{=0}}$$

SOLO LA PARTE SIMMETRICA CONTA

TORNIAMO AL PRODOTTO VETTORE E VEDIAMO COME CAMBIARLO CON LA PROPRIETA' DI SIMMETRIA

$$b\cdot(a\times b) = 0 \qquad \forall a \ \forall b$$

$$a\cdot b = {}^1a^T\,{}^1b \qquad {}^1(a\times b) = [{}^1a\times]\,{}^1b$$

QUINDI

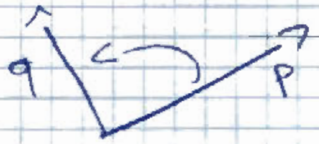
POICHE' ANTISIMMETRICA

$$\underbrace{{}^1b^T[{}^1a\times]\,{}^1b}_{\text{FORMA QUADRATICA}} = 0$$

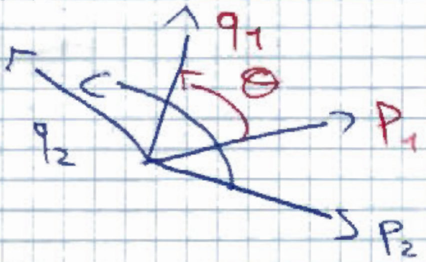
OPERATORE DI ROTAZIONE

PRENDE UN VETTORE E LO RUOTA

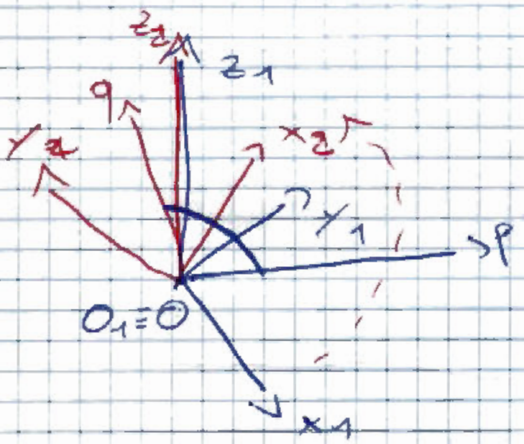
$$\|p\| = \|q\|$$



$q_1 = R(p_1) \qquad q_2 = R(p_2)$



SE IO DEFINISCO GLI ASSI E FACCIO UNA ROTAZIONE



VEDENDO COME E' RUOTA p DIVENTA q USANDO LA ROTAZIONE DEGLI ASSI

$$q = R(p)$$

$$\underline{x_2 = R(x_1)} \quad \underline{y_2 = R(y_1)} \quad \underline{z_2 = R(z_1)}$$

$$^1R = \left[\underbrace{^1R(x_1)}_{^1x_2} \quad \underbrace{^1R(y_1)}_{^1y_2} \quad \underbrace{^1R(z_1)}_{^1z_2} \right]$$

QUINDI

$$^1q = \cancel{}\ {}^1R\ {}^1p$$

CHE POI SAREBBE

$$\boxed{^1q = {}^1R_2\ {}^1p}$$

CONSIDERIAMO ORA

$$q = R(\cancel{}\, p)$$

QUINDI

$\|q\| = \|p\|$ E $\|R(p)\|^2 = \|p\|^2 \qquad R(p) R(p) = p \cdot p$

RAPPRESENTANDO ORA CON IL SISTEMA DI COORDINATE

$$\boxed{p \cdot p = {}^1p^T\, {}^1p} \Rightarrow R(p)\,R(p) = \left({}^1R_2\, {}^1p\right)^T \left({}^1R_2\, {}^1p\right) = {}^1p^T \underbrace{{}^1R_2^T\, {}^1R_2}_{I}\, {}^1p = \boxed{{}^1p^T\, {}^1p}$$

DIMOSTRIAMO CHE ANCHE GLI ANGOLI NON SIANO CAMBIATI

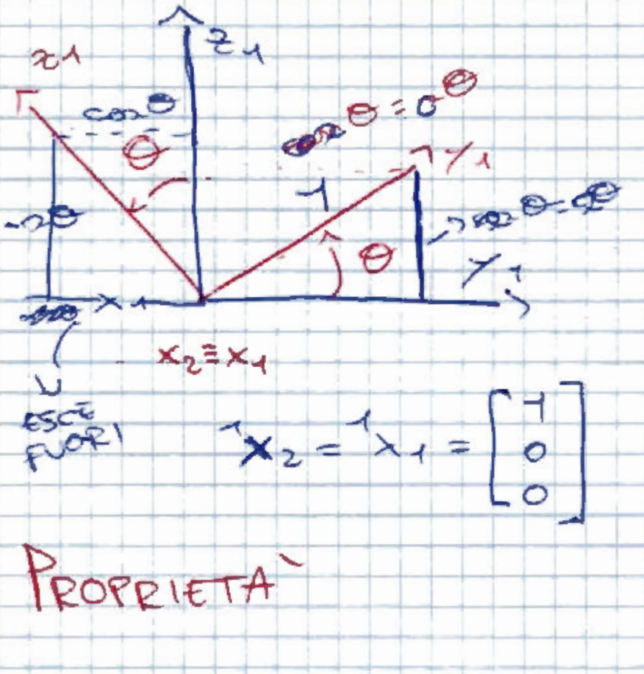
$$p_1 p_2 = \|p_1\| \cdot \|p_2\| \cos\theta$$

$$R(p_1)\,R(p_2) = \|R(p_1)\|\,\|R(p_2)\| \cos\varphi = \|p_1\|\,\|p_2\| \cos\varphi$$

SI FA COME SOPRA

MATRICI DI ROTAZIONE FONDAMENTALI O ELEMENTARI

- MATRICE DI ROTAZIONE INTORNO AD X



ESCE FUORI

$$R_{x,\theta}$$

$$\boxed{{}^1R_2 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \\ {}^1x_2 \quad {}^1y_2 \quad {}^1z_2 \end{array} = R_x(\theta)}$$

$${}^1x_2 = {}^1x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

POTEVO ANCHE OTTENERLA FACENDO

$$z_2 = x_2 \times y_2 =$$

$$= \left[{}^1x_2 \times\right] \cdot {}^1y_2$$

PROPRIETÀ

- $R_x(\theta_1)\,R_x(\theta_2) = R_x(\theta_1 + \theta_2)$

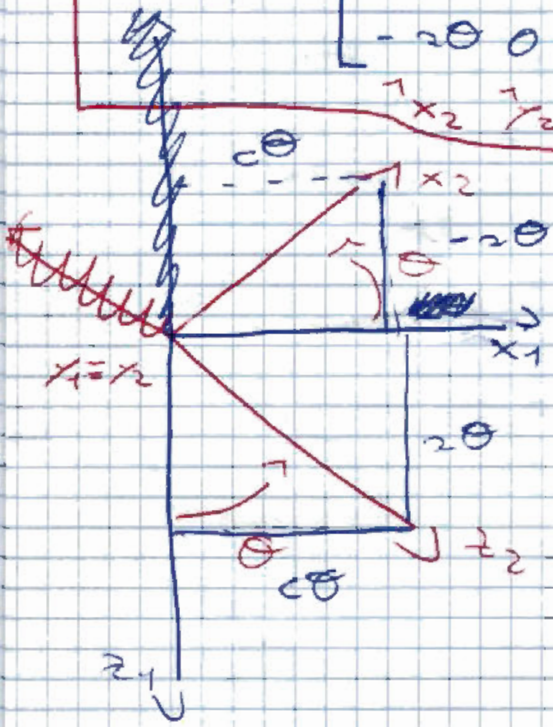
$\Downarrow$

ESSENDO VERSORI x, y, z OVVERO DI MODULO 1 VALE LA COMMUTATIVA

- $R_x(\theta_2)\,R_x(\theta_1) = R_x(\theta_2 + \theta_1) \Rightarrow$ SE LO FACCIO PER UN VETTORE GENERICO NON VALE
- $R_x^{-1}(\theta) = R_x(-\theta) = R_x^T(\theta)$

- MATRICE DI ROTAZIONE INTORNO AD Y

$$\boxed{\begin{array}{c} R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \\ \quad\quad\quad\quad\quad {}^1x_2 \quad {}^1y_2 \quad {}^1z_2 \end{array}}$$



$${}^1y_2 = {}^1y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

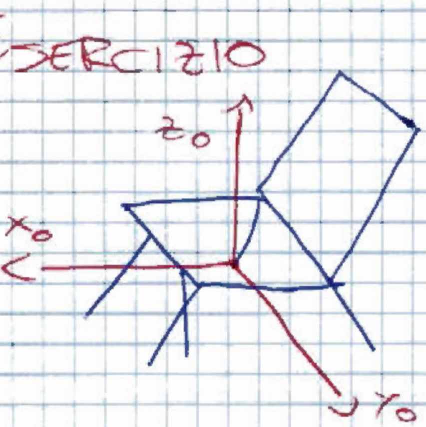
- MATRICE DI ROTAZIONE INTORNO A Z

$$\boxed{R_z(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

PROPRIETA'

- $R_x(\theta_x)\,R_y(\theta_y) \neq R_y(\theta_y)\,R_x(\theta_x)$ NON SONO COMMUTATIVE

ESERCIZIO



APPLICHIAMO

$$R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

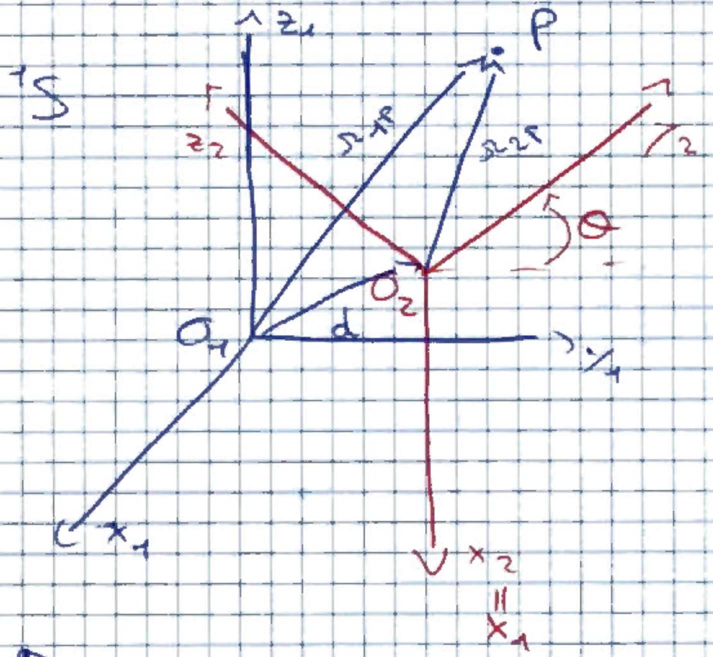
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICI DI ROTOTRASLAZIONI ELEMENTARI

LEZIONE 5

06/10/2011

- MATRICE DI z



IN GENERALE VALE

$${}^1r_{1P} = {}^1R_2\,{}^2r_{2P} + {}^1r_{12}$$

$$\begin{bmatrix} {}^1r_{1P} \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^1R_2 & & {}^1r_{12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^2r_{2P} \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\tilde{r}_{1P} = {}^1T_2\,{}^2\tilde{r}_{2P}$$

PER QUANTO RIGUARDA L'ASSE z

$$\boxed{T_z(\theta, d) = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

- MATRICE DI x

$$\boxed{T_x(\theta, d) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

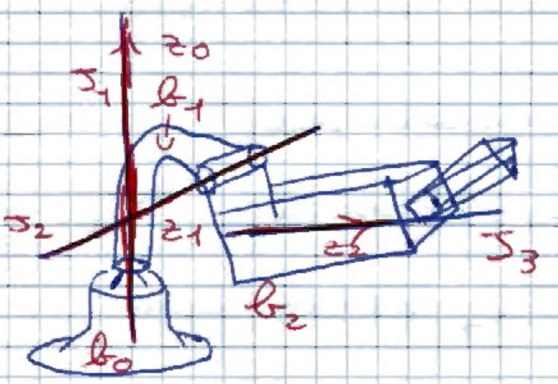
- MATRICE DI y

$$\boxed{T_y(\theta, d) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

PROCEDURA PER PIAZZARE I SISTEMI DI RIFERIMENTO SUI BRACCI DI UN ROBOT

- PROCEDURA DI DENAVIT HARTEMBERG

OVVIAMENTE CI RIFERIAMO A CATENE APERTE E IL TUTTO PER ROBOT RIGIDI



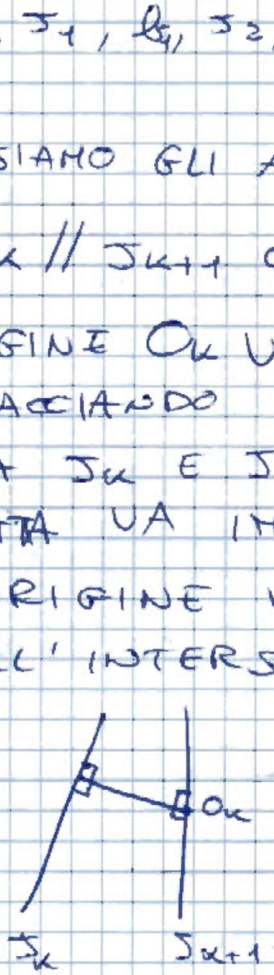
REGOLE

0- l_0, J_1, l_1, J_2, l_2 METTERE BRACCI E GIUNTI

1- FISSIAMO GLI ASSI

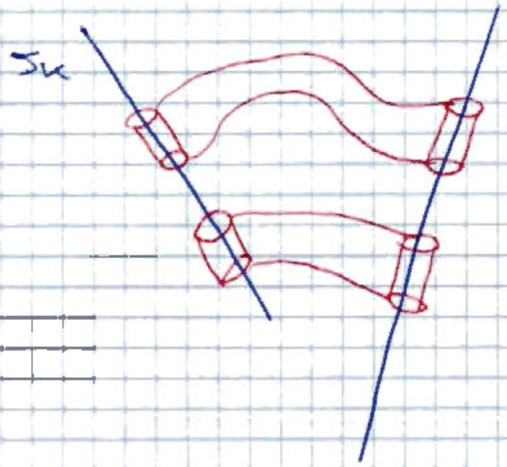
$z_k \parallel J_{k+1}$ OVVERO z_1 NEL GIUNTO 2

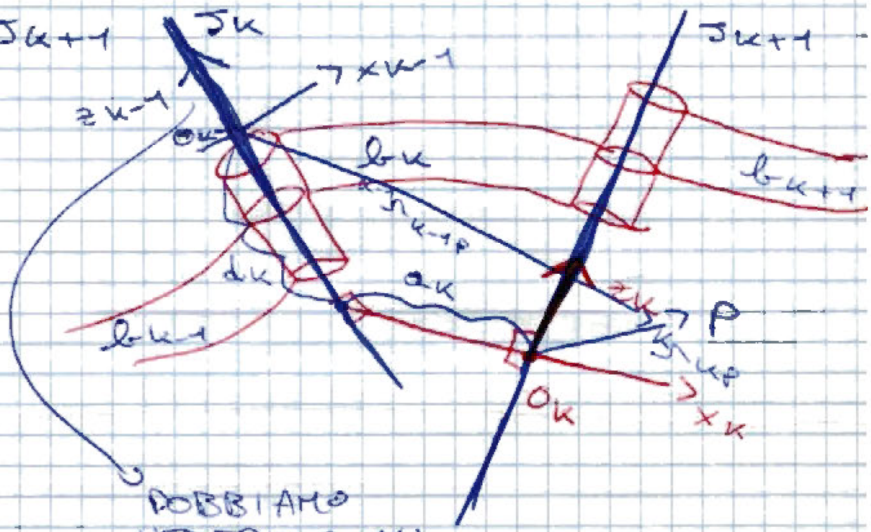
2- ORIGINE O_k VA PIAZZATA TRACCIANDO LA PERPENDICOLARE TRA J_k E J_{k+1} E TALE RETTA VA INTERSECA E L'ORIGINE VIENE MESSA SULL'INTERSEZIONE J_{k+1}



3- L'ASSE x_k E' PROPRIO LA RETTA $\perp$ TRACCIATA PRIMA CON VERSO DA J_k A J_{k+1}

PIAZZANDO COSÌ I BRACCI SI PUÒ TROVARE FACILMENTE LE MATRICI DI ROTOTRASLAZIONE T





SCRIVIAMO LA ${}^{k-1}T_k \Rightarrow$ DOBBIAMO VEDERE QUALI PASSAGGI SERVONO PER SOVRAPPO[RRE] $k-1$ A k

1- VEDIAMO CHE DOBBIAMO TRASLARE ${}^{k-1}S$ LUNGO z_k (d_k È COSTANTE SE J_k È ROTOIDALE) E DIVENTA ${}^{k-1}S'$

2- ROTAZIONE DI ${}^{k-1}S'$ DI θ_k ATTORNO A z_{k-1} E DI[VENTA] ${}^{k-1}S''$

3- TRASLAZIONE DI ${}^{k-1}S''$ DI $a_k > 0$ LUNGO $x''_{k-1} = x_k$

4- ROTAZIONE ${}^{k-1}S'''$ DI UN ANGOLO α_k ATTORNO AD $x'''_{k-1} = x_k$

ESPRIMENDO TUTTO MATEMATICAMENTE

$T_z(\theta_k, d_k)$ E $T_x(\alpha_k, a_k)$

QUELLO CHE NOI VOGLIAMO È CHE

$${}^{k-1}\tilde{r}_{k-1,p} = {}^{k-1}T_k \, {}^{k}\tilde{r}_{kp}$$

QUINDI

$${}^{k-1}\tilde{r}_{k-1,p} = T_z\left(T_x \, {}^{k}\tilde{r}_{kp}\right) \Rightarrow \boxed{{}^{k-1}T_k = T_z(\theta_k, d_k)\, T_x(\alpha_k, a_k)}$$

- a_k CHIAMATA LUNGHEZZA DEL BRACCIO l_k
- α_k TORSIONE DEL BRACCIO (ANGOLO DI ~~...~~ TWIS[T])

- ~~θ_k~~ θ_k VARIABILE DI GIUNTO (CIOE' PUO' CAMBIARE SE E' ROTOIDALE)

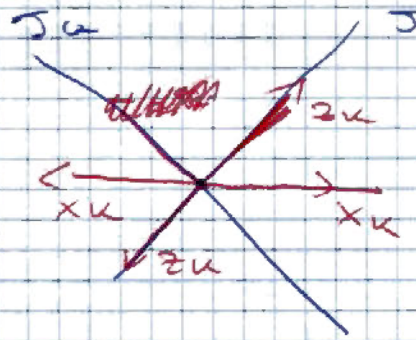
- d_k VARIABILE DI GIUNTO (CIOE' PUO' CAMBIARE SE E' PRISMATICO)

CASI PARTICOLARI

- NEL CASO I GIUNTI SONO PARALLELI LE NORMALI DIVENTANO ∞

POSSIAMO SCEGLIERE L'ORIGINE O_k E QUINDI CAMBIA ANCHE d_k

- GIUNTI CHE SI INTERSECANO



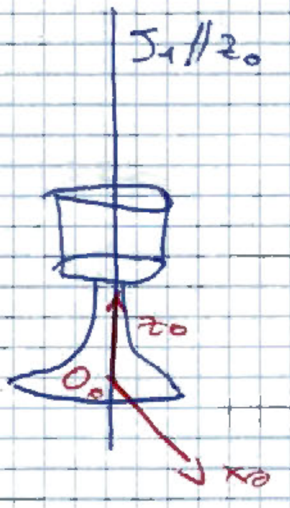
$a_k = 0$ PERCHE' SI INTERSECANO

ESISTE SOLO UNA NORMALE COMUNE

$\Downarrow$

POSSIAMO SCEGLIERE A PIACERE I VERSI DI x_k E z_k

- CASO DEL GIUNTO 1



- POSSIAMO SCEGLIERE O_0 A PIACIMENTO
- POSSIAMO SCEGLIERE A PIACERE ANCHE x_0 (NON C'E' LA NORMALE)

- CASO ULTIMO BRACCIO

$\Downarrow$

IMMAGINIAMO DI AVERE UN GIUNTO IN PIÙ E FISSIAMO IL TUTTO IN BASE A QUESTO

$\Downarrow$

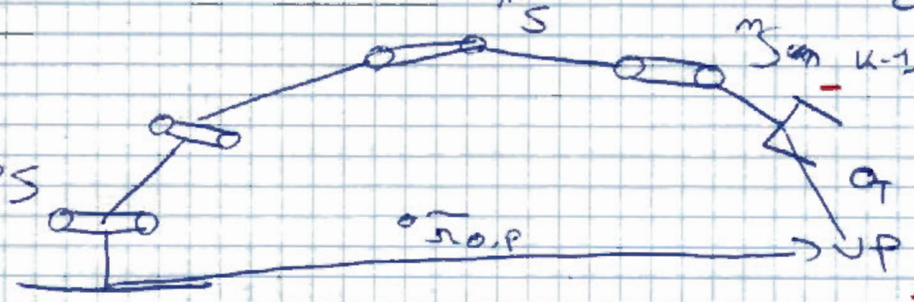
LO SI FA PASSARE PER IL <u>TOOL CENTER POINT</u>

RIFERIMENTI SUI BRACCI

LEZIONE 6
11/10/2011

RICORDANDO CHE

$$\boxed{{}^0\tilde{r}_{0,P} = {}^0T_1(q_1)\,{}^1T_2(q_2)\,\cdots\,{}^{m-1}T_m(q_m)\,{}^m\tilde{r}_{m,P}}$$



CON

- ${}^{k-1}T_k(q_k) = T_z(d_k,\theta_k)\,T_x(a_k \ldots$

O_T DOVE

- $q_k = \begin{cases} d_k & J_k \text{ PRISMATICO} \\ \theta_k & J_k \text{ ROTOIDALE} \end{cases}$

$\boxed{{}^{m-1}\tilde{r}_{m-1,P} = {}^{m-1}T_m(q_m)\,{}^m\tilde{r}_{m,P}}$ $\boxed{{}^{m-2}\tilde{r}_{m-2,P} = {}^{m-2}T_{m-1}(q_m)\,{}^{m-1}\tilde{r}_{m-1,P}}$ → E COSÌ VIA

$$-\boxed{{}^0T_m} = {}^0T_1(q_1)\,{}^1T_2(q_2)\,\cdots\,{}^{m-1}T_m(q_m) = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_m & {}^m r_{0,m} \\ \hline 000 & 1 \end{array}\right]$$

$\Downarrow$ ${}^0T_m(q)$

SE VOLESSIMO IL TOOL RISPETTO AL WORLD DOBBIAMO CONSIDERARE

$${}^wT_T(q) = {}^wT_0\,\boxed{{}^0T_m(q)}\,{}^mT_T \qquad \text{DOVE } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}$$

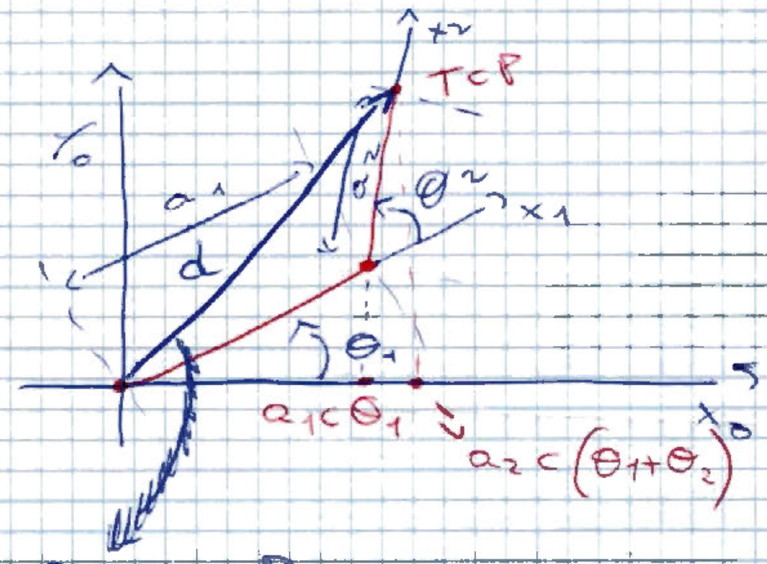
${}^wT_0$ → ROTOTRASLAZIONE DI o RISPETTO A w

${}^mT_T$ → ROTOTRASLAZIONE DEL TOOL RISPETTO A m

q → COORDINATE DI GIUNTO

- IL PROBLEMA DELLA CINEMATICA INVERSA È PARTIRE DALLE T (MATRICE DI ROTOTRASLAZIONE) E TROVARE LE COORDINATE DI GIUNTO q

CINEMATICA INVERSA ROBOT PLANARE



CON DENAVIT-HARTEN[BERG]
PIAZZIAMO GLI ASSI.

$$P_x = a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \ldots$$

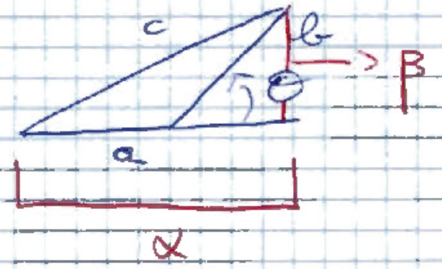
$$P_y = a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \ldots$$

$${}^{0}s_{02,x} = P_x$$

$${}^{0}s_{02,y} = P_y$$

NOI VOGLIAMO PASSARE DA P_x E P_y AGLI ANGOLI

PER FARLO APPLICHIAMO PITAGORA GENERALIZZATO



$$\alpha = a + b\,c\theta$$

$$\beta = b\,s\theta$$

$$\boxed{c^2} = (a + b\,c\theta)^2 + (b\,s\theta)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 c^2\theta + 2ab\,c\theta + b^2 s^2\theta =$$

$$= \boxed{a^2 + b^2 + 2ab\,c\theta}$$

RITORNANDO AL NOSTRO PROBLEMA

$$P_x^2 + P_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\,c\theta_2$$

QUINDI

$$c\theta_2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{2a_1a_2}$$

SE $c\theta_2$ È ≤ 1 POSSO ASSOCIARE UN COSENO E QUINDI C'È SOLUZIONE
MA SE ~~...~~ > 1 ALLORA LA CINEMATICA INVERSA NON HA SOLUZIONE

QUINDI CHIAMANDO $c\theta_2 = c$ SI HA CHE

$$c = \frac{p_x^2+p_y^2-(a_1^2+a_2^2)+2a_1a_2-2a_1a_2}{2a_1a_2} =$$

$$= \frac{p_x^2+p_y^2-(a_1+a_2)^2+2a_1a_2}{2a_1a_2} = \frac{p_x^2+p_y^2-(a_1+a_2)^2}{2a_1a_2}+1$$

DEVE ESSERE NEGATIVA PER ARRIVARE AD UN cos

$$(a_1+a_2)^2 \geq p_x^2+p_y^2$$

$$\boxed{a_1+a_2 \geq \sqrt{p_x^2+p_y^2} = d} \quad \text{C.N.}$$

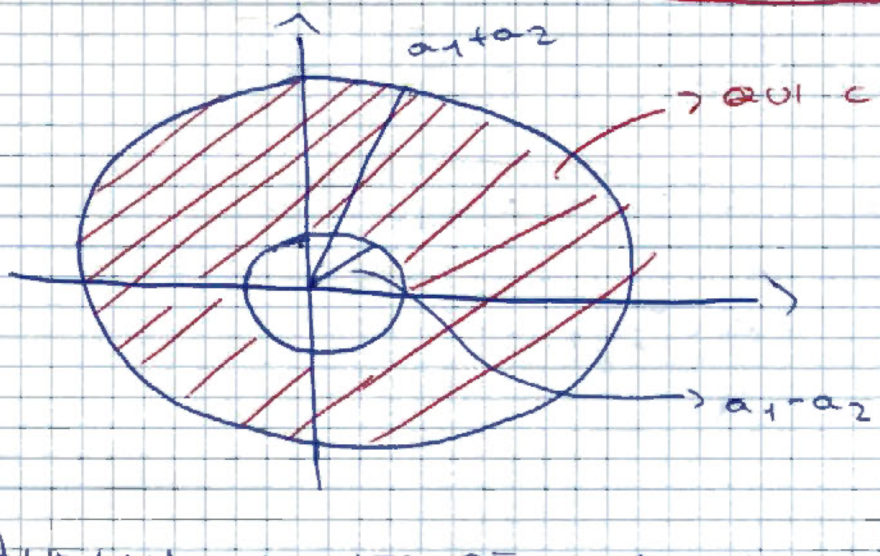
NON È DETTO CHE ANCORA CHE IO ABBIA SOLUZIONE

RICONSIDERIAMO c

$$c = \frac{p_x^2+p_y^2-(a_1-a_2)^2}{2a_1a_2} - 1 \Rightarrow \text{DEVE ESSERE POSITIVA}$$

$$(a_1-a_2)^2 \leq p_x^2+p_y^2$$

$$\boxed{(a_1-a_2) \leq \sqrt{p_x^2+p_y^2} = d = \|p\|}$$



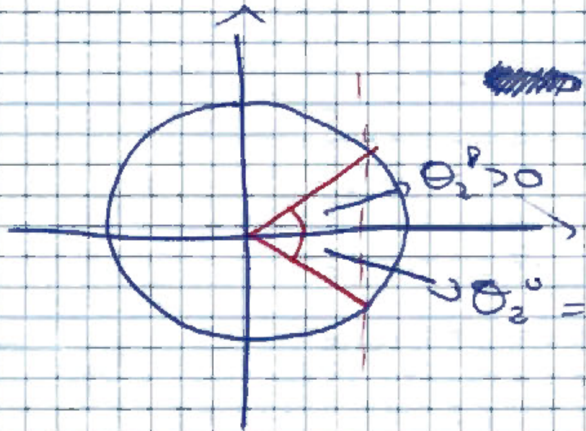
ANDIAMO A VEDERE COME RISOLVERE IN MATLAB

function q=kininv2R(px,py,a1,a2)

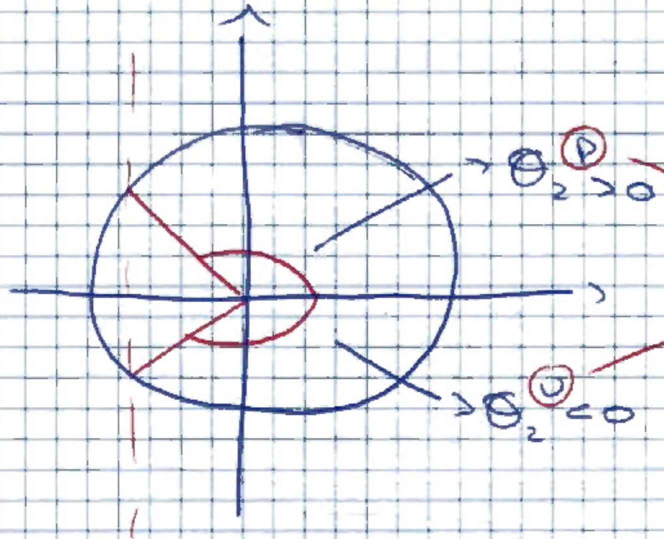
VEDIAMO COSA ACCADE IN BASE AI DIVERSI RISULTATI

$\boxed{1-\ c \in (-1,1)}$ => ~~[illegible]~~ PUO' ESSERE UN COS

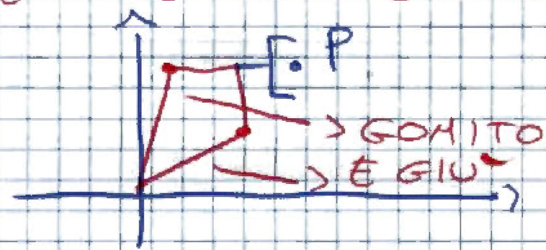
SE $c = c\theta_2 \in [0, 1)$



SE $c = c\theta_2 \in (-1, 0)$



LE SOLUZIONI SONO DUE PERCHE' C'E' GOMITO UP E GOMITO



QUINDI AVRO' CHE => $\theta_2 \in (-\pi, \pi)$ => $[\theta_2 \in [0, 2\pi)$

ANDIAMO A VEDERE COME RICAVARE θ_2^D E θ_2^U

$\theta_2^D > 0 \Rightarrow s\theta_2^D > 0 \Rightarrow s\theta_2^D = \sqrt{1-c^2}$

$\theta_2^U < 0 \Rightarrow s\theta_2^U < 0 \Rightarrow s\theta_2^U = -\sqrt{1-c^2}$

QUINDI

$$\boxed{\theta_2^D = \text{ATAN2}\left(\sqrt{1-c^2}, c\right)}$$

$$\boxed{\theta_2^U = -\theta_2^D}$$

IN MATLAB

$$c = \left(P_x^2 + P_y^2 - (a_1^2 + a_2^2)\right) / 2a_1a_2$$

$$q = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \theta_1^D & \theta_1^U \\ \theta_2^D & \theta_2^U \end{array}\right] & \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} & \end{array}$$

if abs(c)>1; disp("Non esiste soluzione"); end

if abs(c)<1, $\left[\begin{array}{l} q(2,1) = \text{ATAN2}\left(\sqrt{1-c^2}, c\right); \\ q(2,2) = -q(2,1); \end{array}\right]$ OPPURE

ORA VEDIAMO COME TROVARE $\theta_1^U, \theta_2^U, \theta_1^D, \theta_2^D$

CONSIDERIAMO $\theta_2^D > 0$

$$P_x = a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_1 c\theta_2 - a_2 s\theta_1 s\theta_2$$

$$P_y = a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_1 c\theta_2^D + a_2 c\theta_1 s\theta_2^D$$

$$s = \sqrt{1-c^2}$$

$$q(2,1) = \text{ATAN2}(s, c);$$

$$q(2,2) = -q(2,1);$$

QUINDI CHIAMANDO $c\theta_1 = x_1$ E $s\theta_1 = x_2$ SI HA CHE IN FORMA MATRICIALE E CONSIDERANDO $c = c\theta_2^D$ E $s = s\theta_2^D$

UP

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 c & -a_2 s \\ a_2 s & a_1 + a_2 c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 I + a_2 R = A \Rightarrow R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$$

IN MATLAB PER RISOLVERE UN SISTEMA

$b = A \cdot x$

$x = inv(A) \cdot b$

$x = A \backslash b$ ⇒ CI DÀ LA SOLUZIONE SENZA CALCOLARE L'INVERSA ⇒ INDICA b/A

DOWN ⇒ UGUALE A PRIMA MA AVRÒ R^T ⇒ $R^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$

QUINDI CONTINUANDO A SCRIVERE IN MATLAB

```
b = [Px, Py]'; R = [c -s; s c];
A = a1*eye(2) + a2*R;
x = A\b;
q(1,1) = ATAN2(x(2), x(1));
```

⇒ ABBIAMO RICAVATO Θ

```
A = a1*eye(2) + a2*R'
x = A\b;
q(1,2) = ATAN2(x(2), x(1)); end;
```

⇒ ABBIAMO RICAVATO Θ

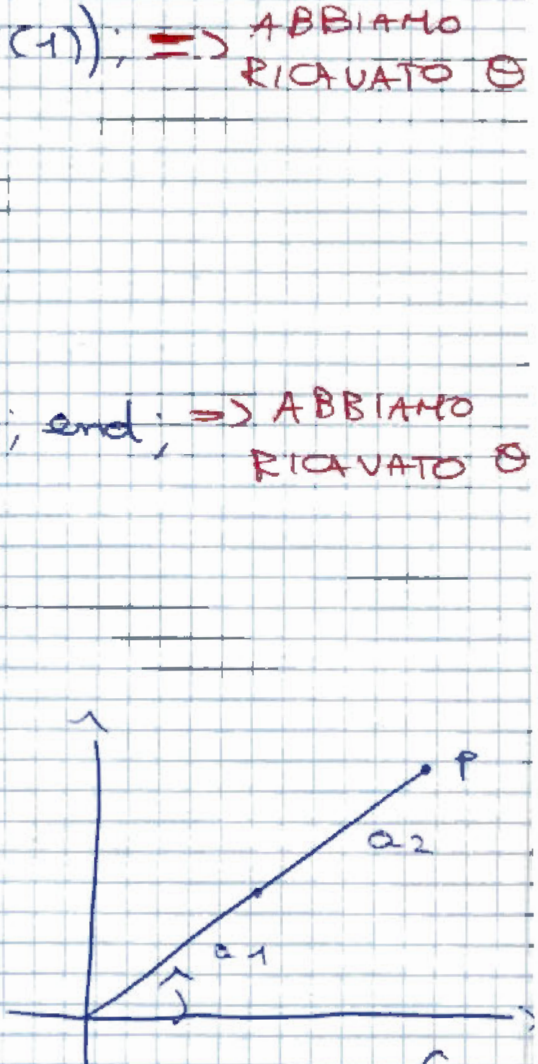
ORA CONSIDERIAMO I CASI

2- $\boxed{c = 1}$ PRIMA COSA SAPPIAMO CHE

$\theta_2 = 0 = \theta_2^U = \theta_2^D$

QUINDI

$$c = \frac{P_x^2 + P_y^2 - (a_1 + a_2)^2}{2a_1a_2} + 1$$



$\theta_1 = ATAN2(P_y,$

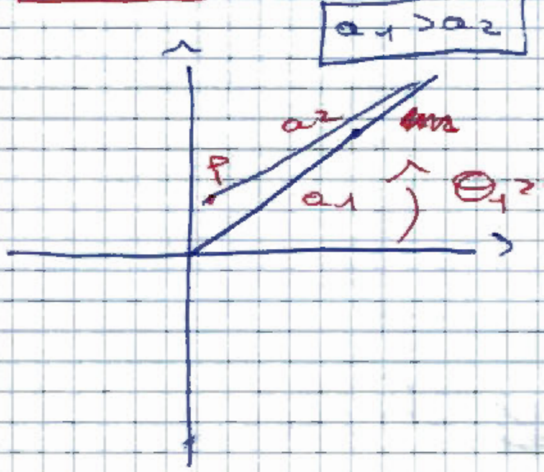
IN MATLAB

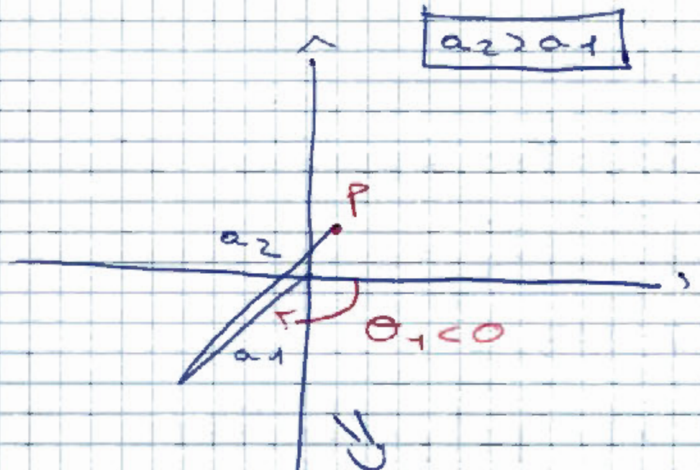
if (c==1) ; q(1,1)=ATAN2(Py, Px);

q(1,2)=q(1,1), end;

3-

$\boxed{c=-1}$ POSSIAMO AVERE DUE SITUAZIONI





QUI E' COME SE CI FOSSE UN BRACCIO DI LUNGHEZZA NEGATIVA

if c == -1

if $a_1>a_2$, $q(1,:)=[1,1]$ * ATAN2(P_y, P_x)

else

$q(1,:)=[1,1]$ * $\boxed{\text{ATAN2}(-P_y, -P_x)}$

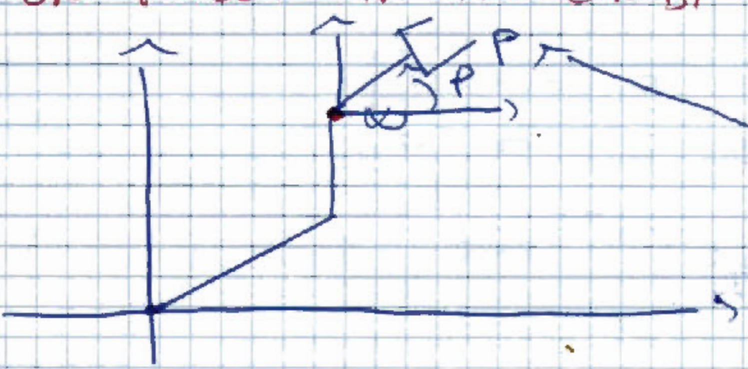
UN ALTRO DI RISCRIVERE È

$(P_x^2+P_y^2==0)$

if $(c==-1)$ & $(a_1==a_2)$

$q(2,:)=[+\pi \quad -\pi]$

SE UN ROBOT HA TRE GRADI DI LIBERTÀ



ADESSO GLI P_x E P_y DI PRIMA SONO

- ORA GLI ALTRI SI CHIAMANO W_x , W_y

$$\begin{cases} W_x = a_1 c\theta_1 + a_2 c(\theta_1+\theta_2) \\ W_y = a_1 s\theta_1 + a_2 s(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

QUINDI

$$P_x = W_x + a_3 c(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \qquad \varphi = (\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$P_y = W_y + a_3 s(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

DA QUESTA

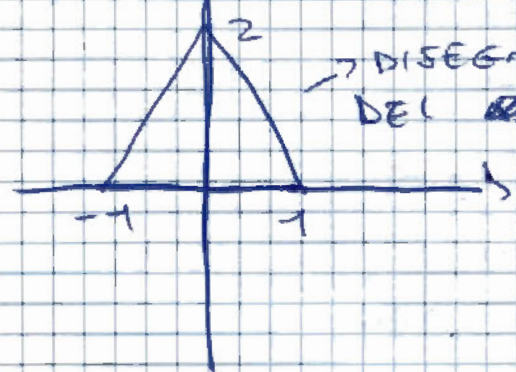
$$W_x = P_x - a_3 c\varphi$$

$$W_y = P_y - a_3 s\varphi$$

IN MATLAB

```
function q = kininv3R(Px, Py, phi, a1, a2,
  Wx = Px - a3 * c(phi);
  Wy = Py - a3 * s(phi);
  q = zeros(3,2);
  q(1:2, 1:2) = kininv2R(Wx, Wy, a1, a2);
  q(3,1) = phi - q(1,1) - q(2,1);
  q(3,2) = phi - q(1,2) - q(2,2);
```

DISEGNARE UN OGGETTO PLANARE IN MATLAB



→ DISEGNAMO ALL'ESTREMITÀ DEI ROBOT UN TRIANGOLO

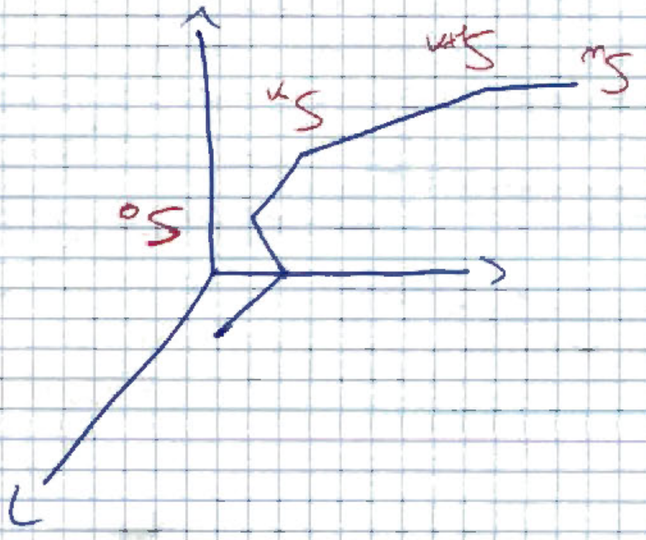
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
figure(1), plot(P(1,:), P(2,:))
```

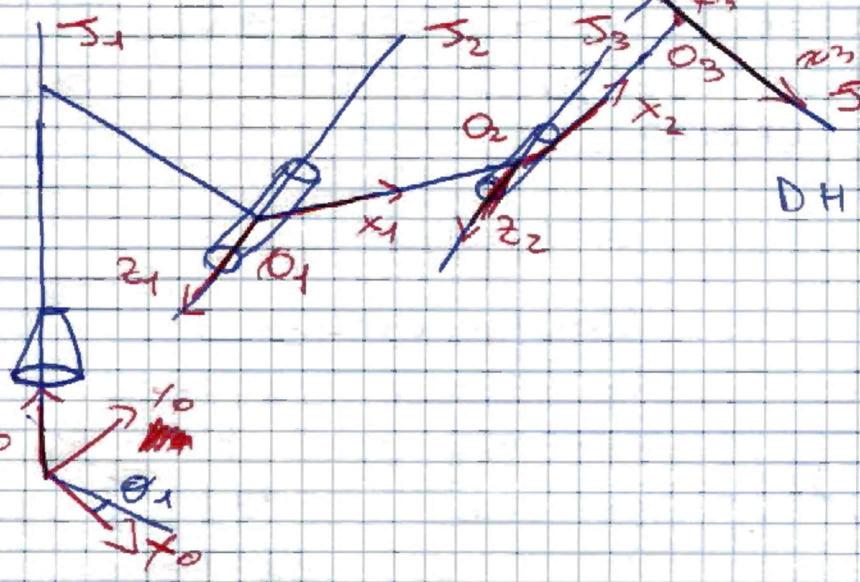
RAPPRESENTAZIONE 3D IN MATLAB — LEZIONE 2 — 12/10/2011

L'ISTRUZIONE È plot3(x, y, z) → 3 COORDINATE

DIAMO COME COORDINATE ~~[illegible]~~ L'ORIGINE DEI RIFERIMENTI ${}^kS$



ASSEGNARE CON DENAVIT-HATEMBERG I RIFERIMENTI PER UN ROBOT ANTROPOMORFO



1 ROTOIDALE
0 PRISM.

DH =

a_i	α_i (TWIST)	θ_i / d_i	(1/0)
0,3	$\pi/2$	0,3	1
0,6	0	0	1
0,2	$\pi/2$	0	1

⇓

CREIAMO UNA MATRICE CHE CONTIENE LE INFORMAZIONI PER FAR COINCIDERE TUTTI I SISTEMI DI RIF.

RAPPRESENTAZIONE DEGLI ORIENTAMENTI

LEZIONE 13/10/20

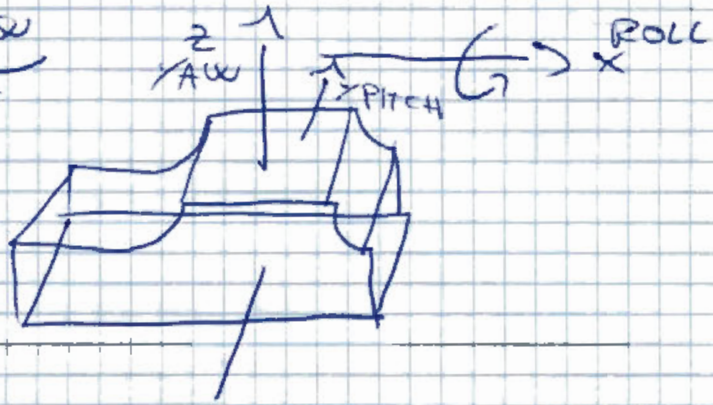
RICORDIAMO CHE

$^0R_1 = R_x R_y R_z \Rightarrow$ POSSIAMO CON GLI ANGOLI DI EULERO ESPRIMERE UNA ROTAZIONE

$\Downarrow$

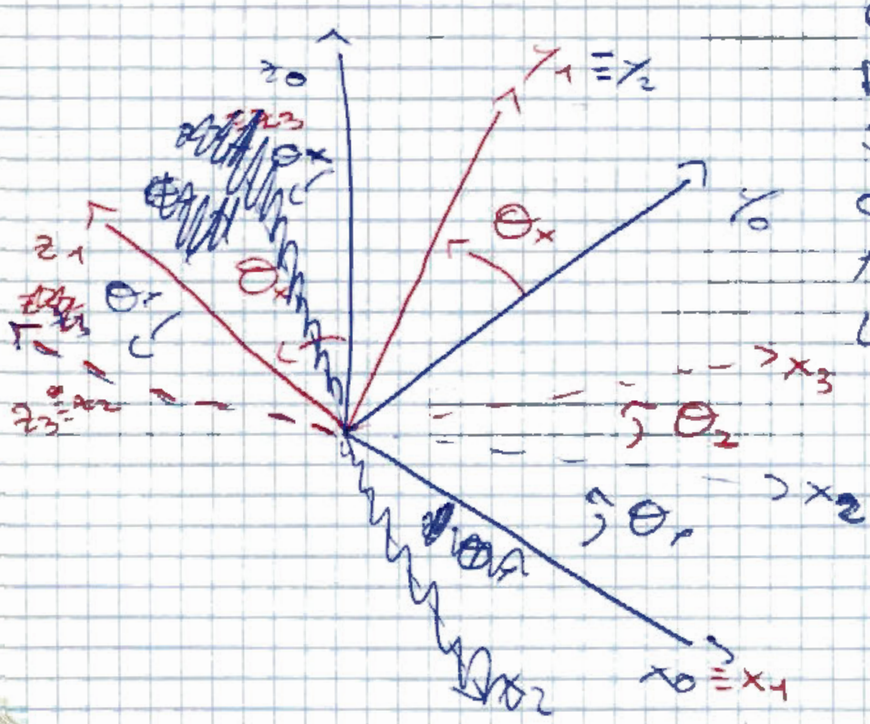
CI SONO 12 MODI POSSIBILI BASTA CHE DUE ASSI UGUALI NON SIANO VICINI

PIU' COMUNEMENTE SI USANO GLI ANGOLI DI $\underbrace{\text{ROLL}}_{x}$, $\underbrace{\text{PITCH}}_{y}$ E $\underbrace{\text{YAW}}_{z}$



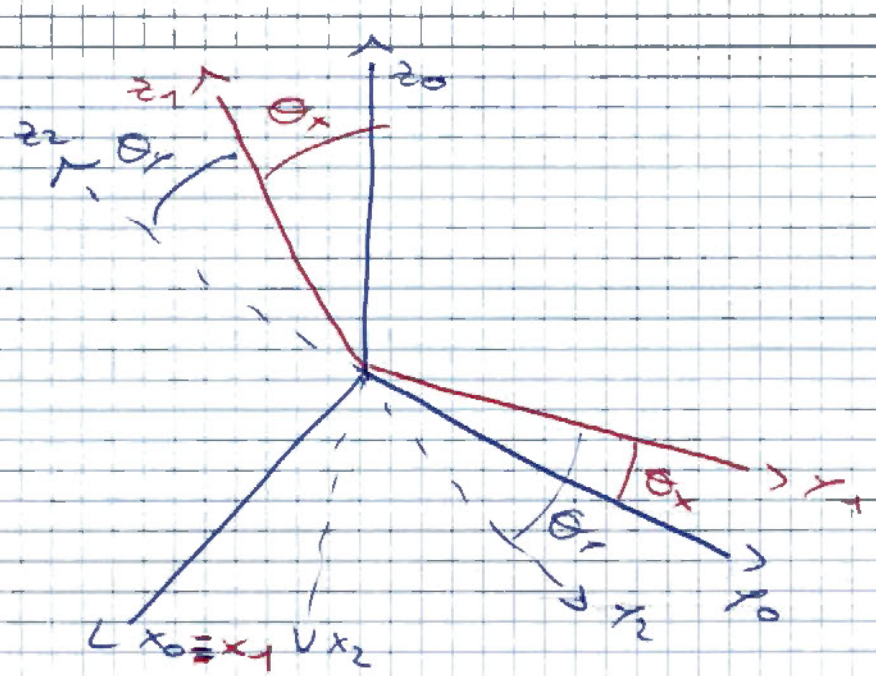
ANDIAMO QUINDI A FARE I CALCOLI SCEGLIENDO COME SEQUENZA ROLL PITCH YAW E DISTINGUIAMO TRA ASSI FISSI E ASSI VARIABILI

CONSIDERIA ^3S COME SISTEMA FINALE



CONSIDERIAMO LE ROTAZIONI SUCCESSIVE SU ASSI VARIABILI OVVERO LE APPLICHIAMO AGLI ASSI ~~...~~ DOPO LA PRIMA ROTAZIONE

SE FOSSE AD ASSI FISSI



NOI FAREMO LE ROTAZIONI SUCCESSIVE CON GLI ASSI GIA' VARIATI

SI HA CHE VOLENDO ${}^0v$ ABBIAMO

$${}^0v = \underbrace{{}^0R_1 \underbrace{{}^1R_2 \underbrace{{}^2R_3\, {}^3v}_{{}^2v}}_{{}^1v}}_{{}^0v}$$

DOVE ${}^2R_3 = R_z(\theta_z)$

${}^1R_2 = R_y(\theta_y)$

${}^0R_1 = R_x(\theta_x)$

QUINDI VOLENDO METTERE TUTTO INSIEME OTTENIAMO CHE

$$\boxed{{}^0R_3 = R_x(\theta_x)\, R_y(\theta_y)\, R(\theta_z)} \Rightarrow$$

IN PRATICA E' COME CONSIDERARE CHE QUESTE MATRICI OPERINO UN CAMBIO DI COORDINATE

CONSIDERANDO ORA INVECE GLI ASSI FISSI

PARTIAMO STAVOLTA SAPENDO ${}^0v$ ED ABBIAMO CHE

$$R_z(\theta_z)\,R_y(\theta_y)\,\underbrace{R_x(\theta_x)\,{}^o v}_{{}^o v_A}$$

$$\underbrace{R_y(\theta_y)\,R_x(\theta_x)\,{}^o v}_{{}^o v_B}$$

$$\underbrace{R_z(\theta_z)\,R_y(\theta_y)\,R_x(\theta_x)\,{}^o v}_{}$$

$${}^o v_C = {}^o R_3\,{}^o v$$

QUINDI

$$\boxed{{}^o R_3 = R_z(\theta_z)\,R_y(\theta_y)\,R_x(\theta_x)}$$ ATTORNO AD ASSI FISSI

PER PICCOLE ROTAZIONI PERO' LE MATRICI DIVEN COMMUTATIVE OVVERO NON E' IMPORTANTE IN CHE ORDINE LI PRENDO

CONSIDERIAMO

$$R_z(\theta_x)\,R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{bmatrix}$$

~~PER ERRORE ABBIAMO MESSO LA MATRICE R_z~~ => RIFARE CALCOLI CON X

E SI HA CHE $s\theta_y = \theta_y$

$$c\theta_y = 1 - \frac{\theta_y^2}{2}$$ => SE LE ROTAZIONI SONO PICCOLE

QUINDI ESSENDO CHE PER DEF. DI PICCOLE ROTAZIONI $\theta_x\theta$
SI HA CHE

$$R_z(\theta_x)\,R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_x & 0 \\ \theta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\theta_x & \theta_y \\ \theta_x & 1 & \theta_x\theta_y \\ -\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_x & \theta_y \\ \theta_x & 1 & 0 \\ -\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SE FACCI $R_z R_x$ VI UGUALE P PICCOLA $\theta_x\theta_y$

AGGIUNGENDO LA PICCOLA ROTAZIONE IN z VERREBBE ANCORA COMMUTATIVA

CONSIDERIAMO ~~ORA~~ QUINDI

$\theta_x \to \theta_y \to \theta_z$ RUOTATI — $\theta_x \to \theta_y \to \theta_z$ FISSI

$\theta_z \to \theta_y \to \theta_x$ FISSI — $\theta_z \to \theta_y \to \theta_x$ RUOTATI

CONSIDERIAMO ORA UNA ROTAZIONE ATTORNO AGLI ASSI FISSI E PARTENDO DA ${}^0R_3$ E CALCOLIAMO $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

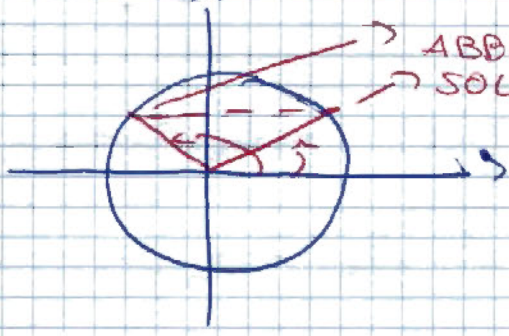
$$R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & -s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_z c\theta_y & & \\ s\theta_z c\theta_y & & \\ -s\theta_y & c\theta_y s\theta_x & c\theta_y c\theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$+s\theta_y = -r_{31} \Rightarrow$ CONOSCO IL $\sin\theta_y$ QUINDI

$\Downarrow$



ABBIAMO DUE SOLUZIONI

$$c\theta_y^A = \sqrt{1-r_{31}^2}$$

$$c\theta_y^B = -\sqrt{1-r_{31}^2}$$

QUINDI

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_y^A &= \mathrm{ATAN2}\left(-r_{3,1}, \sqrt{1-r_{31}^2}\right) \\ \theta_y^B &= \mathrm{ATAN2}\left(-r_{3,1}, +\sqrt{1-r_{31}^2}\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_x^A &= ATAN2(r_{32}, r_{33})\\ \theta_x^B &= ATAN2(-r_{32}, -r_{33})\\ \theta_z^A &= ATAN2(r_{21}, r_{11})\\ \theta_z^B &= ATAN2(-r_{21}, -r_{11})\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ ESSENDO $a = \beta \cos\theta$

$\theta = ATAN2(\beta, a$

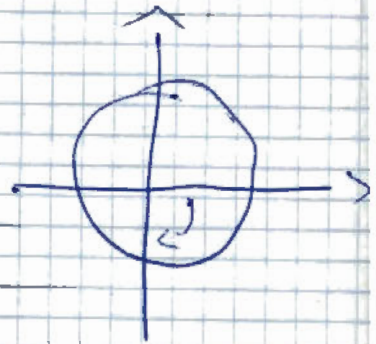
CASO PARTICOLARE

CI SARÀ UNA SINGOLARITÀ DI RAPPRESENTAZIONE

$\boxed{r_{31} = 1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{} & \\ 0 & & \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta_y^A = \theta_y^B = -\frac{\pi}{2}$$

$\sin\theta_y = -1$



↳ SE VALE 1 r_{31} SI HA GLI ZERI PER L'ORTONORMALITÀ $\Rightarrow$ ESSENDO VERSOR

ANDIAMO QUINDI A SVILUPPARE LA MATRICE STA VOLTA IN FORMA COMPLETA

$$\begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -s\theta_z c\theta_x - s\theta_x c\theta_z & +s\theta_z s\theta_x - c\theta_z c\theta_x \\ 0 & c\theta_x c\theta_z - s\theta_x s\theta_z & -c\theta_z s\theta_x - s\theta_z c\theta_x \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

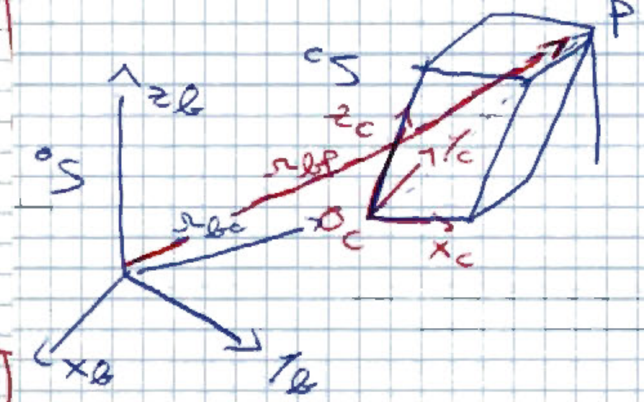
$$= \begin{bmatrix} 0 & -s(\theta_x+\theta_z) & -c(\theta_x+\theta_z) \\ 0 & c(\theta_x+\theta_z) & -s(\theta_x+\theta_z) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

QUINDI

$$\theta_x+\theta_z = \mathrm{ATAN2}(-r_{23}, -r_{13})$$

CINEMATICA DIFFERENZIALE 18/10/20

- VELOCITA' CARTESIANA



$$^bT_c = \left[\begin{array}{c|c} ^bR_c & ^br_{bc} \\ \hline 000 & 1 \end{array}\right]$$

NEL MOMENTO IN CUI IL CORPO SI MUOVE ENTRA IN GIOCO IL TEMPO

$^br_{bc}(t)$ $^bR_c(t) \Leftrightarrow \Theta(t$

ANGOLI DI EUL

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_x(t) \\ \theta_y(t) \\ \theta_z(t) \end{bmatrix}$$

ORA PER STUDIARE LA VELOCITA' DI UN CORPO ABBIAMO BISOGNO DI VELOCITA' DI ROTAZIONE E TRASLAZIONE

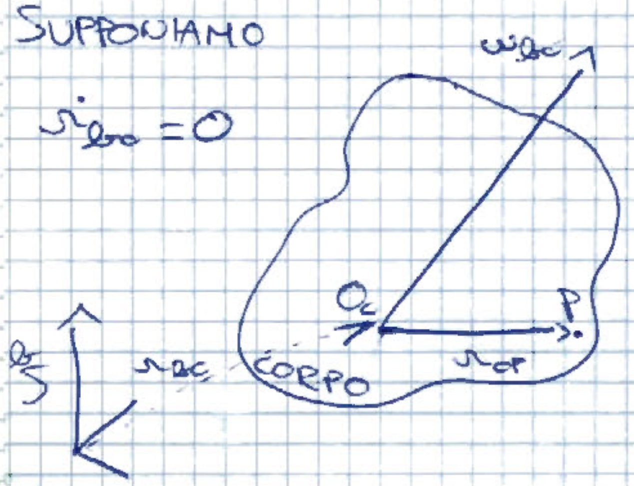
$^b\dot{r}_{bc}(t)$ VELOCITA' DI TRASLAZIONE $\Rightarrow$ CONSIDERIA COME PUNT DI RIFERIMEN O_c

$^b\dot{R}_c(t)$ $\Rightarrow$ CI INDICANO INFORMAZIONI
$\dot{\Theta}(t)$ $\nearrow$ SULLA VELOCITA' ANGOLARE

QUINDI DEFINIAMO LA VELOCITA' ANGOLARE

SUPPONIAMO

$\dot{r}_{bc} = 0$



SONO IND. DAL SIST COORDINATE

$$\boxed{\dot{r}_{cp} = \omega_{bc} \times r_{cp}}$$

VELOCITA' ANGOLARE DI UN CORPO CHE RUOTA MA NON TRASLA

$$\boxed{\dot{r}_{bp} = \dot{r}_{bc} + \omega_{bc} \times r_{cp}}$$

VELOCITA' ANGOLARE DI UN CORPO CHE RUOTA E TRASLA

QUINDI TORNANDO AL NOSTRO PROBLEMA INIZIALE

$$\boxed{\dot{r}_{bp} = \dot{r}_{bc} + \omega_{bc} \times r_{cp}}$$

ANDIAMO QUINDI A VEDERE IL LEGAME TRA ω_{bc} E ${}^{b}\dot{R}_{c}(t)$ E $\dot{\Theta}(t)$ E SI HA

$$ {}^{b}\dot{r}_{bp} = {}^{b}\dot{r}_{bc} + [{}^{b}\omega_{bc} \times]\, {}^{b}r_{cp}$$

SOMMANDO I VETTORI

$$ {}^{b}r_{bp} = {}^{b}r_{bc} + {}^{b}r_{cp} = {}^{b}r_{bc} + {}^{b}R_{c}\, {}^{c}r_{cp}$$

QUINDI

$$ {}^{b}r_{bp}(t) = {}^{b}r_{bc}(t) + {}^{b}R_{c}(t)\, {}^{c}r_{cp}$$

$$\boxed{{}^{c}r_{cp} = \text{COSTANTE}}$$

POICHE' IL CORPO E' RIGIDO

DERIVANDO

$$ {}^{b}\dot{r}_{bp}(t) = {}^{b}\dot{r}_{bc}(t) + {}^{b}\dot{R}_{c}(t)\, {}^{c}r_{cp}$$

SAPENDO CHE ${}^{c}r_{cp} = {}^{c}R_{b}\, {}^{b}r_{cp} \Rightarrow {}^{c}r_{cp} = {}^{b}R_{c}^{T} \cdot {}^{b}r_{cp}$

QUINDI

$$ {}^{b}\dot{r}_{bp} = {}^{b}\dot{r}_{bc} + {}^{b}\dot{R}_{c}\, {}^{b}R_{c}^{T}\, {}^{b}r_{cp}$$

QUINDI

$$ 0 = [{}^{b}\omega_{bc} \times]\, {}^{b}r_{cp} - {}^{b}\dot{R}_{c}\, {}^{b}R_{c}^{T}\, {}^{b}r_{cp}$$

$$ 0 = \left([{}^{b}\omega_{bc} \times] - {}^{b}\dot{R}_{c}\, {}^{b}R_{c}^{T}\right) {}^{b}r_{cp} \qquad \forall\, {}^{b}r_{cp} \in \mathbb{R}^{n}$$

QUINDI

$$ [{}^{b}\omega_{bc} \times] = {}^{b}\dot{R}_{c}\, {}^{b}R_{c}^{T}$$

VERIFICHIAMO L'ANTISIMMETRIA DELLA NOSTRA MATRICE OTTENUTA

$$ {}^{b}R_c(t)\,{}^{b}R_c^T(t) = I_3 \quad \forall t $$

$$ \Downarrow \qquad \uparrow \text{DERIVATA DELL'IDENTITÀ} $$

$$ {}^{b}\dot{R}_c\,{}^{b}R_c^T + {}^{b}R_c\,{}^{b}\dot{R}_c^T = 0 $$

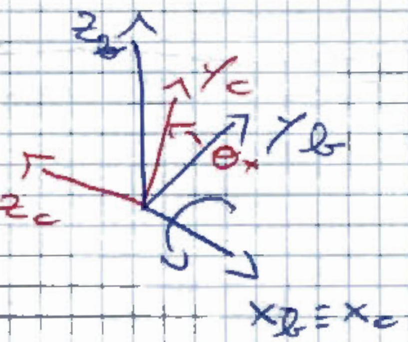
$$ \Downarrow $$

$$ \boxed{{}^{b}\dot{R}_c\,{}^{b}R_c^T = -\,{}^{b}R_c\,{}^{b}\dot{R}_c^T} \quad \text{ANTISIMMETRIA} $$

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI AVERE

$$ {}^{b}R_c = R_x(\theta_x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix} \rightarrow \text{ROTAZIONE ATTORNO AD } x $$



QUINDI

$$ \begin{bmatrix} 0 & -{}^{b}\omega_z & {}^{b}\omega_y \\ -{}^{b}\omega_z & 0 & -{}^{b}\omega_x \\ -{}^{b}\omega_y & {}^{b}\omega_x & 0 \end{bmatrix} = $$

$$ = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta_x\dot{\theta}_x & -c\theta_x\dot{\theta}_x \\ 0 & c\theta_x\dot{\theta}_x & -s\theta_x\dot{\theta}_x \end{bmatrix}}_{{}^{b}\dot{R}_c} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & s\theta_x \\ 0 & -s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix}}_{{}^{b}R_c^T \rightarrow \text{MI DÀ L'ORIENTAME}} = $$

$$ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_x \\ 0 & \dot{\theta}_x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{b}\omega_{bc} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

ACCELERAZIONE ANGOLARE

$\boxed{{}^b\dot{\omega}_{bc}}$ DERIVATA VELOCITÀ ANGOLARE

ACCELERAZIONE DI TRASLAZIONE

${}^b\ddot{r}_{bc}$

RICONSIDERIAMO ORA L'ACCELERAZIONE ANGOLARE

$${}^b\dot{r}_{bp} = {}^b\dot{r}_{bc} + \overbrace{\left[{}^b\omega_{bc}\times\right]{}^b r_{cp}}^{{}^b\dot{r}_{cp}}$$

$${}^b\ddot{r}_{bp} = {}^b\ddot{r}_{bc} + \left[{}^b\dot{\omega}_{bc}\times\right]{}^b r_{cp} + \left[{}^b\omega_{bc}\times\right]{}^b\dot{r}_{cp} =$$

$$= {}^b\ddot{r}_{bc} + \left[{}^b\dot{\omega}_{bc}\times\right]{}^b r_{cp} + \underbrace{\left[{}^b\omega_{bc}\times\right]\left[{}^b\omega_{bc}\times\right]{}^b r_{cp}}_{\text{DEFINITA NEGATIVA}}$$

ORA TROVIAMO IL LEGAME TRA $\left[{}^b\omega_{bc}\times\right]$ E $\Theta(t)$
E SI HA CHE

CONSIDERANDO RPY SI HA CHE

$$R(\Theta) = R_z(\theta_z)\, R_y(\theta_y)\, R_x(\theta_x)$$

$${}^B R_c = R(\Theta(t))$$

E RICORDANDO CHE

$$\left[{}^B\omega_{Bc}\times\right] = {}^B\dot{R}_c\, {}^B R_c^T$$

QUINDI

$$\dot{R}(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{\partial R}{\partial \theta_x}\dot{\theta}_x + \frac{\partial R}{\partial \theta_y}\dot{\theta}_y + \frac{\partial R}{\partial \theta_z}\dot{\theta}_z =$$

$$= R_z R_y \frac{\partial R_x}{\partial \theta_x}\dot{\theta}_x + R_z \frac{\partial R_y}{\partial \theta_y} R_x \dot{\theta}_y + \frac{\partial R_z}{\partial \theta_z} R_y R_x \dot{\theta}_z$$

ORA SCRIVENDO

$$\dot{R} R^T = \dot{R}\left(R_x^T R_y^T R_z^T\right) = \qquad R = R_z R_y R_x$$

$$R^T = R_x^T R_y^T R$$

$$= R_z R_y \boxed{\frac{\partial R_x}{\partial \theta_x} R_x^T} R_y^T R_z^T \dot{\theta}_x + R_z \boxed{\frac{\partial R_y}{\partial \theta_y} R_y^T} R_z^T \dot{\theta}_y + \boxed{\frac{\partial R_z}{\partial \theta_z} R}$$

RICORDANDO I CALCOLI DI PRIMA SI HA CHE

$$\frac{\partial R_x}{\partial \theta_x} R_x^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[{}^A x_A \times\right]$$

$$\frac{\partial R_y}{\partial \theta_y} R_y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[{}^A y_A \times\right]$$

$$\frac{\partial R_z}{\partial \theta_z} R_z^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[{}^A z_A \times\right]$$

QUINDI

$$\dot{R} R^T = R_z R_y \left[{}^A x_A \times\right] (R_y R_z)^T \dot{\theta}_x + R_z \left[{}^A y_A \times\right] R_z^T \dot{\theta}_y + \left[{}^A z_A \times\right] \dot{\theta}$$

$$\boxed{= \left[\left(R_z R_y {}^A x_A\right)\times\right]\dot{\theta}_x + \left[\left(R_z {}^A y_A\right)\times\right]\dot{\theta}_y + \left[{}^A z_A \times\right]\dot{\theta}_z = \left[{}^B\omega_B\right.}$$

ESSENDO ${}^B R_A \left[{}^A n \times\right] {}^B R_A^T = \left[\left({}^B R_A {}^A n\right)\times\right]$

CON ${}^A x_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^A y_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^A z_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

QUINDI SOSTITUENDO E FACENDO I PRODOTTI SI HA C

$$\boxed{{}^{b}\omega_{c\theta} = \begin{bmatrix} c\theta_z c\theta_y \\ s\theta_z c\theta_y \\ -s\theta_y \end{bmatrix} \dot{\theta}_x + \begin{bmatrix} -s\theta_z \\ c\theta_z \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_z =}$$

$\to$ COLONNE UNITARIE IN NORMA MA NON ORTONORMALE

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} c\theta_z c\theta_y & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z c\theta_y & c\theta_z & 0 \\ -s\theta_y & 0 & 1 \end{array}\right]}_{G(\Theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix}}_{\dot{\Theta}}$$

CI SONO DELLE VOLTE DOVE NOI CERCANDO LA FORMULA INVERSA

$$ {}^{b}\omega_{bc} = G(\Theta)\dot{\Theta} \Rightarrow \dot{\Theta} = G^{-1}(\Theta)\,{}^{b}\omega_{bc}$$

NON ESISTE SEMPRE L'INVERSA INFATTI SE CALCOLO IL DET SI HA CHE

$$|G(\Theta)| = \cos\theta_y \Rightarrow \theta_y = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$ SI ANNULLA QUINDI DIVENTA SINGOLARE

ESEMPIO

$$\theta_y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow {}^{b}\omega_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_z & 0 \\ 0 & c\theta_z & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\Theta}$$

IL ROBOT PUO' FARE ${}^{b}\omega_{bc}$ MA NON POSSO RAPPRESENTARLO CON I TRE ANGOLI DI EULERO

CONSIDERIAMO ORA

$$ {}^{b}T_{T} = {}^{b}T_{0}\,{}^{0}T_{1}(q_1) \cdots {}^{n-1}T_{n}(q_n)\,{}^{n}T_{T} = {}^{b}T_{0}\,{}^{0}T_{n}\,{}^{n}T_{T}$$

QUINDI

$$ {}^{b}T_{T}(q) = \left[\begin{array}{c|c} {}^{b}R_{T}(q) & {}^{b}r_{bT}(q) \\ \hline 0\;0\;0 & 1 \end{array}\right]$$

QUINDI

$$\begin{bmatrix} {}^{b}r_{bt} \ \text{POS.} \\ \hline \Theta_{bt} \end{bmatrix} = {}^{b}p_{bT} = K(q) = \begin{bmatrix} k_t(q) \\ \hline k_o(q) \end{bmatrix}$$

$\to$ VAR. CARTESIANE

$\to$ CINEMATICA DIRETTA IN ~~FORMA MINIMA~~

Θ_{bt} ORIENTAMENTO

$q \to$ VAR. DI GIUNTO

$\Theta \to$ NON È ~~UNO SPAZIO~~ VETTORIALE

$\Downarrow$

INFATTI

$${}^{A}R_C = {}^{A}R_B \, {}^{B}R_C$$

QUINDI SCRIVIAMO LO JACOBIANO PER CAPIRE IL LEGAME TRA VAR. DI GIUNTO E CARTESIANE QUINDI

1- POSIZIONE

$${}^{b}\dot{p}_{bT} = \begin{bmatrix} {}^{b}\dot{r}_{bT} \\ \hline \dot{\Theta}_{bT} \end{bmatrix} = \frac{dk}{dq}\dot{q} = J_k(q)\dot{q}$$

VEL

POS

$\to$ JACOBIANO ALGEBRICO

$$\frac{dk}{dq}\dot{q} = \left[\frac{\partial k}{\partial q_1} \;\middle|\; \frac{\partial k}{\partial q_2} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \frac{\partial k}{\partial q_n} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

2- VELOCITÀ

$${}^{b}v_{bT} = \begin{bmatrix} {}^{b}\dot{r}_{bT} \\ \hline {}^{b}\omega_{bT} \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} = \bar{G}(k_o(q))\, J_k(q)\dot{q}$$

$\to$ JACOBIANO GEOMETRICO

QUESTO DERIVA DAL FATTO CHE

$${}^{b}v_{bT} = \begin{bmatrix} {}^{b}\dot{r}_{bT} \\ {}^{b}\omega_{bT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ \hline 0 & G(\Theta)_{bT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{b}\dot{r}_{bT} \\ \hline \dot{\Theta}_{bT} \end{bmatrix} = \bar{G}(\Theta_{bT})\, \overbrace{{}^{b}\dot{p}_{bT}}^{J_k(q)\dot{q}} =$$

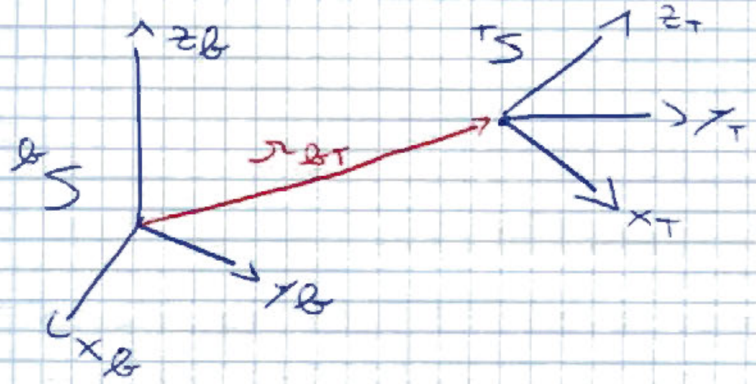
QUINDI

$${}^{b}v_{bT} = \bar{G}(k_o(q))\, J_k(q)\dot{q}$$

ANCORA SULLE JACOBIANE

19/10/2011

RICONSIDERIAMO



$${}^b\dot{p}_{bT} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{r}_{bT} \\ \Theta_{bT} \end{bmatrix} = \frac{dk}{dq}\dot{q} = \boxed{J_k(q)\dot{q}}$$ ALGEBRICO

$${}^b v_{bT} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{r}_{bT} \\ {}^b\omega_{bT} \end{bmatrix} = \boxed{J(q)\dot{q}}$$ GEOMETRICO

QUINDI

$${}^T p_{bT} = \begin{bmatrix} {}^b r_{bT} \\ \Theta_{bT} \end{bmatrix} = k(q) = \begin{bmatrix} k_T \\ k_o \end{bmatrix}$$

CON

$$\bar{G}(\Theta_{bT}) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & G(\Theta_{bT}) \end{bmatrix}$$

$${}^b\omega_{bT} = G(\Theta_{bT})\,\dot{\Theta}_{bT} \qquad {}^b v_{bT} = \bar{G}(\Theta_{bT})\,{}^b\dot{p}_{bT}$$

DA QUESTE RICAVIAMO CHE

$$J(q) = \bar{G}(k_o(q))\, J_k(q)$$

CALCOLIAMO LO JACOBIANO GEOMETRICO CHE LEGA LE VELOCITA' DI GIUNTO ALLE VELOCITA' DELL'UTENSILE

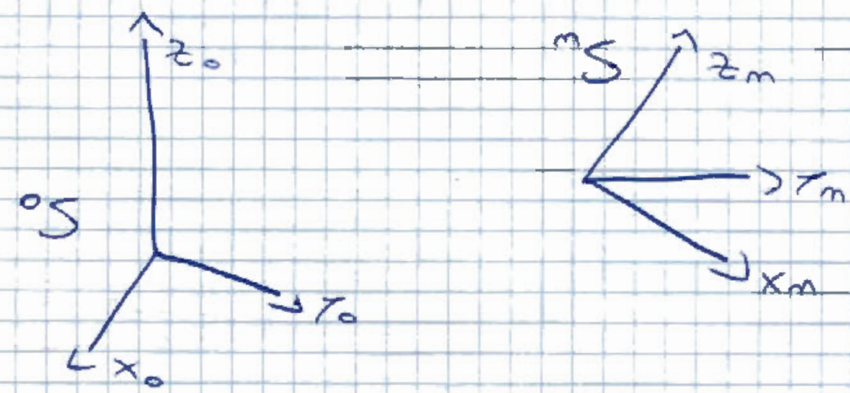
CONSIDERIAMO QUINDI

$${}^bT_T(q) = {}^bT_0\,{}^0T_n(q)\,{}^nT_T$$

NOI FINO AD ORA ABBIAMO CALCOLATO LE VELOCITA' TRA TOOL E BASE PERO', PER LO JACOBIANO CALCOLIAMO TRA ${}^0S$ E ${}^nS$ PERCHE' NELLE IMPLEMENTAZIONI SI USANO QUESTE

$\Downarrow$

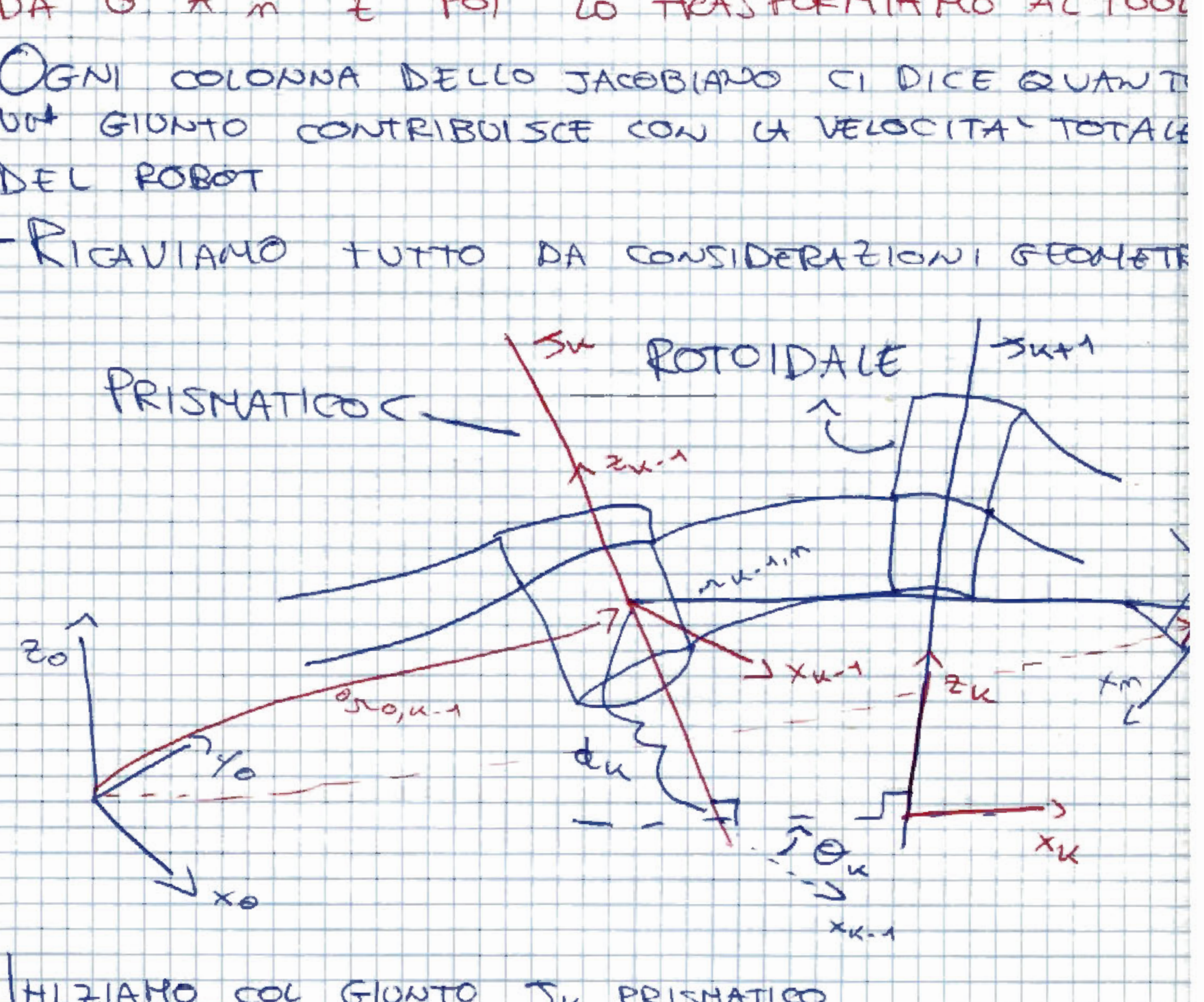
POI CI PREOCCUPEREMO DEL TOOL



QUINDI CALCOLIAMO PER PRIMA LO JACOBIANO GEOMETRICO DA 0 A n E POI LO TRASFORMIAMO AL TOOL

OGNI COLONNA DELLO JACOBIANO CI DICE QUANTO UN GIUNTO CONTRIBUISCE CON LA VELOCITA' TOTALE DEL ROBOT

- RICAVIAMO TUTTO DA CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE



INIZIAMO COL GIUNTO J_k PRISMATICO

- STIAMO CONSIDERANDO CHE SOLO k SI MUOVE

$\Downarrow$

TRASLA TUTTO d_k

QUINDI CERCANDO NOI

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{r}_{0n} \\ \dot{\omega}_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{k}_{T,k}(q) \\ J_{O,k}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \dot{q}_k \end{bmatrix}$$

QUINDI

$$J_{T,k}(q)\,\dot d_k = {}^0z_{k-1}(q)\,\dot d_k \Rightarrow \left.\begin{array}{l} J_{T,k}(q) = {}^0z_{k-1}(q) \\ J_{\omega,k}(q) = 0_{3\times 1} \end{array}\right\}$$ ABBIAMO CALCOLATO LA COLONNA K

DOVE

${}^0z_{k-1}$ SARÀ $\Rightarrow {}^0R_{k-1} = \left[{}^0x_{k-1} \quad {}^0y_{k-1} \quad {}^0z_{k-1}\right]$

PASSIAMO AL GIUNTO ROTOIDALE

ESSENDO TUTTO RIGIDO

$${}^0\omega_{0m} = {}^0z_{k-1}\,\dot\theta_k \Rightarrow \boxed{J_{\omega,k}(q) = {}^0z_{k-1}}$$ COLONNA K

ORA ESSENDO

$$\dot r_{0m} = \dot r_{k-1,m} = \omega_{k-1,m} \times r_{k-1,m}$$
$$\| $$
$$\omega_{0m} = (z_{k-1,m} \times r_{k-1,m})\,\dot\theta_k$$

QUINDI

$${}^0\dot r_{0m} = \left(\left[{}^0z_{k-1}\times\right]{}^0r_{k-1,m}\right)\dot\theta_k \Rightarrow \boxed{J_{T,k}(q) = {}^0z_{k-1} \times {}^0r_{k-1,m}}$$ COLONNA K

PER CALCOLARE ${}^0r_{k-1,m}$ SI HA CHE

$${}^0r_{k-1,m} = {}^0r_{0m} - {}^0r_{0,k-1}$$

MA POSSIAMO RAGIONARE ALL'INDIETRO TROVANDO TUTTE LE T DA m A 0 E OTTENIAMO IL SISTEMA IN K-1 E QUINDI POI TRASFORMIAMO IN 0

$${}^{k-1}T_m = \left[\begin{array}{c|c} & {}^{k-1}r_{k-1,m} \\ \hline & \end{array}\right] \Rightarrow \left(\left[{}^{k-1}z_{k-1}\times\right]{}^{k-1}r_{k-1,m}\right)$$
$$\Downarrow$$

RITRASPORTARLO A 0 CON ${}^0R_0$

ADESSO PASSIAMO A CONSIDERARE UNA ${}^{b}S$ BASE E UN TOOL OVVERO ${}^{T}S$ QUINDI

- RISPETTO ALLA BASE b

$\dot{r}_{b0} = 0 \Rightarrow \dot{r}_{0m} = \dot{r}_{bm} \Rightarrow {}^{0}\dot{r}_{0m} = {}^{0}\dot{r}_{bm}$

QUINDI

$$\boxed{{}^{b}\dot{r}_{bm} = {}^{b}R_{0}\,{}^{0}\dot{r}_{0m}}$$

ABBIA SEMPLICEMENTE CAMBIATO LE COORDINATE

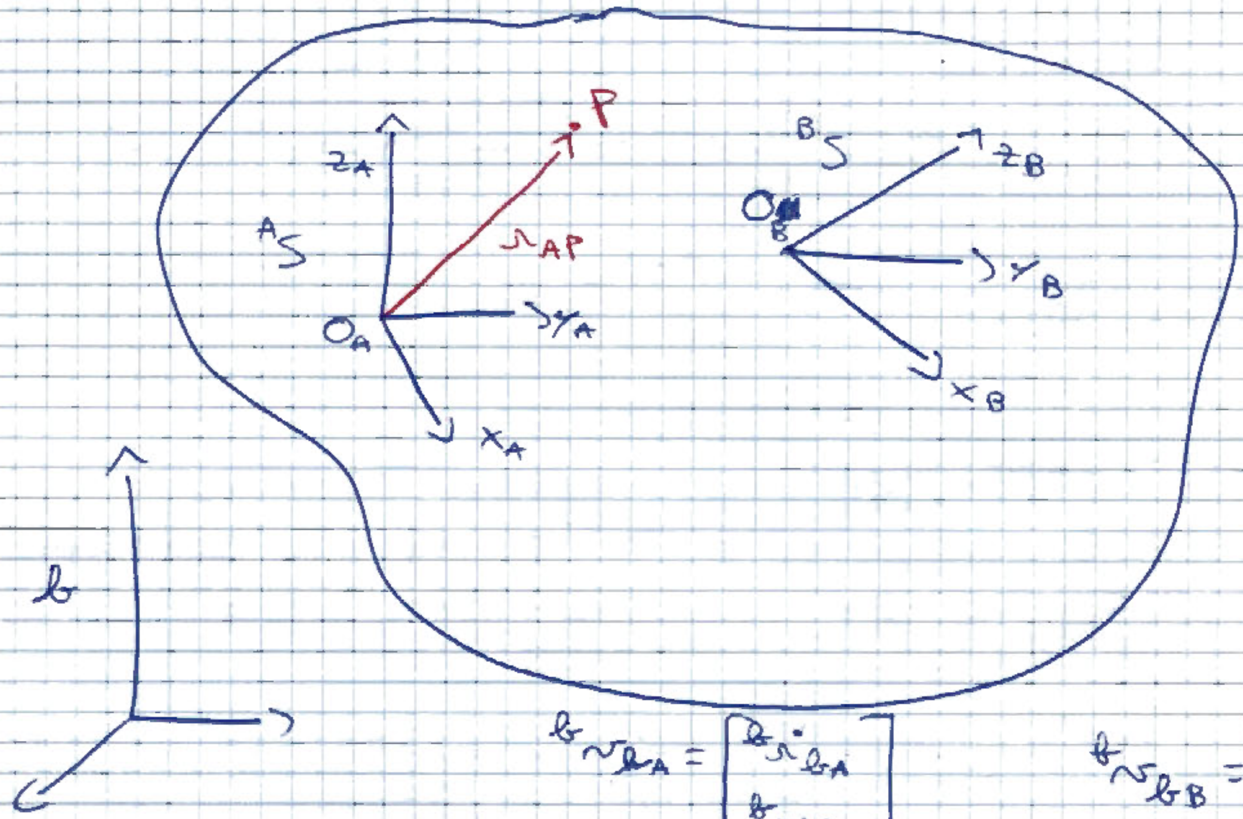
$$\boxed{{}^{b}\omega_{bm} = {}^{b}R_{0}\,{}^{0}\omega_{0m}}$$

E POI ${}^{0}v_{0m} = J_{0m}(q)\,\dot{q}$

$${}^{b}v_{bm} = \begin{bmatrix} {}^{b}R_{0} & 0 \\ 0 & {}^{b}R_{0} \end{bmatrix} J_{0m}(q)\,\dot{q}$$

$\rightarrow$ JACOBIANO DA 0 A m

- RISPETTO AL TOOL T



$${}^{b}v_{bA} = \begin{bmatrix} {}^{b}\dot{r}_{bA} \\ {}^{b}\omega_{bA} \end{bmatrix} \qquad {}^{b}v_{bB} = \begin{bmatrix} {}^{b}\dot{r}_{bB} \\ {}^{b}\omega_{bB} \end{bmatrix}$$

VELOCITÀ DEI SISTEMI A E B RISPETTO ALLA BASE

$${}^b\dot{r}_{bP} = {}^b\dot{r}_{bA} + \left[{}^b\omega_{bA}\times\right]{}^b r_{AP} = {}^b\dot{r}_{bB} + \left[{}^b\omega_{bB}\times\right]{}^b r_{BP}$$

ORA DIMOSTRIAMO CHE ${}^b\omega_{bA} = {}^b\omega_{bB}$

SE ${}^A R_B$ = COSTANTE

RICORDANDO CHE

$$\left[{}^b\omega_{bA}\times\right] = {}^b\dot{R}_A\,{}^bR_A^T \qquad\qquad \left[{}^b\omega_{bB}\times\right] = {}^b\dot{R}_B\,{}^bR_B^T$$

ESSENDO

$${}^bR_B = {}^bR_A\,{}^AR_B \Longrightarrow {}^b\dot{R}_B = {}^b\dot{R}_A\,{}^AR_B$$

↳ ESSENDO COSTANTE

SOSTITUENDO

$$\left[{}^b\omega_{bB}\times\right] = \left({}^b\dot{R}_A\,{}^AR_B\right)\left({}^bR_A\,{}^AR_B\right)^T = {}^b\dot{R}_A\,\underbrace{{}^AR_B\,{}^AR_B^T}_{I_3}\,{}^bR_A^T = \left[{}^b\omega_{bA}\times\right]$$

QUINDI TORNANDO AL NOSTRO PROBLEMA

$$\begin{cases} {}^b\dot{r}_{bB} = {}^b\dot{r}_{bA} + \left[{}^b\omega_{bA}\times\right]{}^b r_{AB} \\ {}^b\omega_{bB} = {}^b\omega_{bA} \end{cases}$$

DA QUESTA

$$\begin{cases} {}^b\dot{r}_{bB} = {}^b\dot{r}_{bA} - \left[{}^b r_{AB}\times\right]{}^b\omega_{bA} \\ {}^b\omega_{bB} = {}^b\omega_{bA} \end{cases}$$

QUINDI

$${}^b v_{bB} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{r}_{bB} \\ {}^b\omega_{bB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -{}^b r_{AB}\times \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^b\dot{r}_{bA} \\ {}^b\omega_{bA} \end{bmatrix} = M\left({}^b r_{AB}\right){}^b v_{bA}$$

PASSANDO ALL'UTENSILE ORA OVVERO IL NOSTRO PROBLEMA

$${}^b v_{bT} = M\left({}^b r_{mT}\right){}^b v_{bm} = M\left({}^b r_{mT}\right) J_{bm}(q)\,{}^b\tilde{v}_{bm}$$

$$M({}^b r_{mT}) = \begin{bmatrix} I_3 & -({}^bR_m(q)\,{}^m r_{mT})\times \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} J_{bm}(q)$$

QUINDI CONSIDERANDO ${}^bR_m = {}^bR_0\,{}^0R_m(q)$ E SI HA CH

$$J_{bT}(q) = \begin{bmatrix} I_3 & -{}^bR_m\left[{}^m r_{mT}\times\right]{}^bR_m^T \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^bR_0 & 0 \\ 0 & {}^bR_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} {}^bR_0 & -{}^bR_0\,{}^0R_m(q)\left[{}^m r_{mT}\times\right]{}^0R_m^T(q) \\ 0 & {}^bR_0 \end{bmatrix} J_{0m}(q)$$

NEL CASO ABBIAMO UNA ${}^b v_{des}$

$\Downarrow$

$$\dot q_{des} : {}^b v_{des} = J(q)\,\dot q_{des}$$

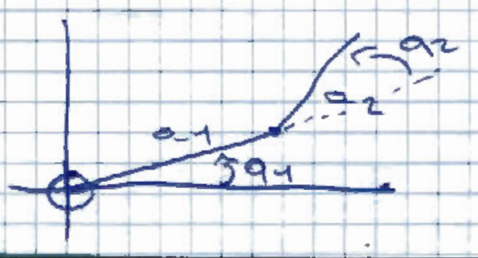
$$\dot q_{des} = J^{-1}(q)\,{}^b v_{des}$$

→ DEVE PERO' ESSERE INVERTIBILE

→ DEVE AVERE SOLUZIONE UNICA

1- $J^{-1}(q)$ NON INVERTIBILE (SINGOLARE)

ROBOT PLANARE A DUE GIUNTI



$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c q_1 + a_2 c(q_1+q_2) \\ a_1 s q_1 + a_2 s(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

$$= k_T(q)$$

QUINDI LO JACOBIANO SARÀ

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s q_1 - a_2 s(q_1+q_2) & -a_2 s(q_1+q_2) \\ a_1 c q_1 + a_2 c(q_1+q_2) & a_2 c(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

$$|J(q)| = a_1 a_2 \left(- s q_1 c(q_1+q_2) + c q_1 s(q_1+q_2)\right) =$$

$s(\alpha - \beta)$

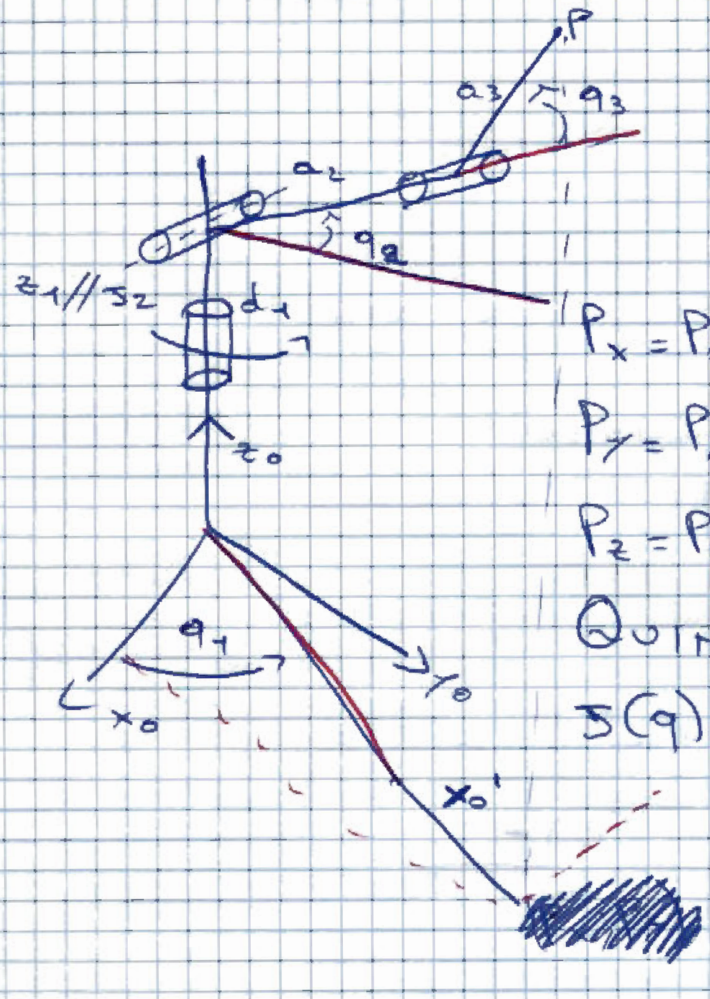
$$= a_1 a_2 \left(s(q_2)\right)$$

SINGOLARE $\Rightarrow$ $q_2 = 0$ $\quad q_2 = \pm\pi$

QUINDI

$$J(q)\Big|_{q_2=0} = \begin{bmatrix} -(a_1+a_2) s q_1 & -a_2 s q_1 \\ (a_1+a_2) c q_1 & a_2 c q_1 \end{bmatrix}$$

- SINGOLARITÀ ROBOT ANTROPOMORFO A TRE GRADI DI LIBERTÀ



$$P_{x'} = a_2 c q_2 + a_3 c(q_2+q_3)$$

$$P_{z'} = d_1 + a_2 s q_2 + a_3 s(q_2+q_3)$$

$$P_x = P_{x'} c q_1 = \left(a_2 c q_2 + a_3 c(q_2+q_3)\right) c q_1$$

$$P_y = P_{x'} s q_1 = \left(a_2 c q_2 + a_3 c(q_2+q_3)\right) s q_1$$

$$P_z = P_{z'} = d_1 + a_2 s q_2 + a_3 s(q_2+q_3)$$

QUINDI

$$J(q) = \begin{bmatrix} -s q_1 P_{x'} & c q_1\left(-a_2 s q_2 - a_3 s(q_2+q_3)\right) \\ c q_1 P_{x'} & s q_1\left(-a_2 s q_2 - a_3 s(q_2+q_3)\right) \\ 0 & a_2 c q_2 + a_3 c(q_2+q_3) \end{bmatrix}$$

COLONNA 3

$$c q_1\left(-a_3 s(q_2+q_3)\right) \qquad s q_1\left(-a_3 s(q_2+q_3)\right) \qquad a_3 c(q_2+q_3)$$

ESEMPIO

$R^T R = I_3 \qquad R u_k = \lambda_k u_k$ 20/10/20

$$|R^T||R| = |I_3| \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)_{R^T} \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)_{R} = |I_3|$$

SIA

$$\begin{bmatrix} {}^0x_1 & {}^0y_1 & {}^0z_1 \end{bmatrix} = z_1 (x_1 \times y_1) = z_1 \cdot z_1 = 1$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \overset{{}^0z_{1,x}}{a_{13}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{{}^0(x_1 \times y_1)_x} - \overset{{}^0z_{1,y}}{a_{23}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{{}^0(x_1 \times y_1)_y} + \overset{{}^0z_{1,z}}{a_{33}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \\ a_{23} & \end{vmatrix}}_{{}^0(x_1}$$

1- λ_k TUTTI REALI $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1 \Rightarrow |\lambda_k| = 1$

2- λ_k UN REALE E GLI ALTRI COMPLESSI CONIUGATI

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \underbrace{|\lambda_2|^2}_{1} = \lambda_1 = 1$$

QUINDI UNA R DESTRORSA SI SCRIVE COME

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_{2,3} = e^{\pm j\rho}$

DOVE ρ E' L'ANGOLO DI ROTAZIONE

POSSO SCRIVERE ANCHE CHE

$e^{j\rho} = co$

$$Tr(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + e^{+j\rho} + e^{-j\rho} =$$

$$= 1 + 2\cos\rho \Rightarrow \qquad \cos\rho = \frac{Tr(R) - 1}{2}$$

CONSIDERIAMO ORA UN ASSE E UN ANGOLO DI ROTAZIONE

$$ {}^0n, \varphi \Rightarrow {}^0R_1 = R({}^0n, \varphi) $$

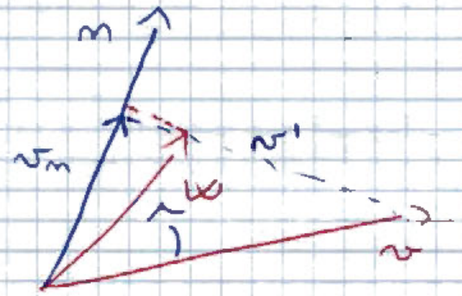
SE IO CONSIDERO L'OPERATORE DI ROTAZIONE $R_{{}^0n,\varphi}$ E APPLICO AD UN VETTORE v NE OTTENGO UN ALTRO

$$ w = R_{{}^0n,\varphi}\, v $$

PER GLI ASSI

$$ x_1 = R_{{}^0n,\varphi}\, x_0 $$

CONSIDERIAMO ORA UN ASSE DI ROTAZIONE n E RUOTIAMO DEI VETTORI SU DI ESSO



$$ v_n = (n \cdot v)\, n $$

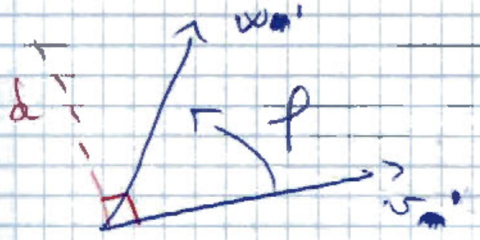
$$ v' = v - v_n $$

ORA DICIAMO CHE w È

$$ w = R_{n,\varphi}\, v \qquad v = v' + v_n $$

$$ \Downarrow $$

VOGLIAMO VEDERE



$$ w = R_{n,\varphi}\,(v' + v_n) = $$

$$ = v_n + \underbrace{R_{n,\varphi}\, v'}_{w_n'} = w_n + w_n' $$

POICHÉ LA ROTAZIONE VARIA SOLO v'

$$ d = \frac{v \times n}{\|v \times n\|} $$

$$ \tilde{d} = n \times v' $$

QUINDI

$$ w' = v' \cos\varphi + \tilde{d} = v' \cos\varphi + (n \times v') \operatorname{sen}\varphi $$

QUINDI SOSTITUENDO TUTTO

$$ w = v_n + R_{n,\varphi}(v_n') = v_n + v' \cos\varphi + (n \times v') \operatorname{sen}\varphi $$

$$ w = (n \cdot v)\cdot n + (v - (n \cdot v)n)\cos\varphi + (n \times v) \operatorname{sen}\varphi $$

$$R_{n,\varphi}(v) = n(n\cdot v) + \cos\varphi\,(v - n(n\cdot v)) - \text{sen}\,\varphi\,(n\times v)$$

PORTANDO TUTTO AL SISTEMA O SI HA CHE

$$^{0}(R_{n,\varphi}(v)) = {}^{0}n\,({}^{0}n^{T}\,{}^{0}v) + \cos\varphi\,({}^{0}v - {}^{0}n\,({}^{0}n^{T}\,{}^{0}v)) - \text{sen}\,\varphi\,({}^{0}n$$

RACCOGLIENDO

$$^{0}(R_{n,\varphi}(v)) = \underbrace{\left[{}^{0}n\,{}^{0}n^{T} + \cos\varphi\,(I_3 - {}^{0}n\,{}^{0}n^{T}) + \text{sen}\,\varphi\,[{}^{0}n\times]\right]}_{\text{FORMULA DI RODRIGUEZ}}{}^{0}v$$

QUINDI DATO UN ASSE E UN ANGOLO POSSIAMO RICAVARE AL VOLO LA MATRICE DI ROTAZIONE

$$^{0}R_{n,\varphi} = R({}^{0}n,\varphi) = \left[{}^{0}n\,{}^{0}n^{T} + \cos\varphi\,(I_3 - {}^{0}n\,{}^{0}n^{T}) + \text{sen}\,\varphi\,[{}^{0}n\right.$$

SUPPONIAMO ORA PIU' CASI

$\text{sen}\,\varphi \neq 0$

RICORDANDO L'ANTISIMMETRIA

$$\frac{R-R^{T}}{2} = [{}^{0}n\times]\,\text{sen}\,\varphi \Rightarrow [{}^{0}n\times] = \frac{1}{2\sqrt{1-c^2}}(R-R^{T})$$

CASO DOVE LO JACOBIANO È UNA MATRICE RETTANGOLARE 25/10/2011

CONSIDERIAMO

$^{0}v_{0m} = J(q)\dot{q}$ DOVE $^{0}v = \begin{bmatrix} ^{0}\dot{p}_{0m} \\ - - - \\ ^{0}\omega_{0m} \end{bmatrix}$

SIA J UNA MATRICE RETTANGOLARE BASSA

- ROBOT PLANARE 3R → NON SERVE L'ORIENTAMENTO θ

$$^{0}v_{dom} = \begin{bmatrix} ^{0}\dot{p}_x \\ ^{0}\dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

$^{0}v_{dom} \in \mathbb{R}^2$

⇓

DUE RIGHE → GRADI DI LIBERTÀ CARTESIANI m
E TRE COLONNE → n GIUNTI

QUANDO LE VARIABILI PER ESEGUIRE UN COMPITO SONO MINORI DEI GIUNTI ⇒ ROBOT RIDONDANTE

⇓

MATRICE RETTANGOLARE

QUINDI SE CI SONO PIÙ ~~righe~~ COLONNE CHE RIGHE IL PROBLEMA VIENE DETTO SOTTOCONDIZIONATO

⇓

DOBBIAMO VEDERE COME SCEGLIERE LE SOLUZIONI CHE SARANNO $\infty^{n-\rho(M)}$
→ RANGO DI J

- PROBLEMA DI MINIMO CON VINCOLI

SI CERCA UNA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

TRASFORMA UN VETTORE IN UNO SCALARE

ABBIAMO BISOGNO DELLA NORMA DI UN VETTORE PER CONFRONTARLI ⇒ ESSENDO IL PROBLEMA DEL MINIMO DOBBIAMO SCEGLIERE IL PIÙ PICCOLO

ALCUNE NORME DI UN VETTORE SONO

$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |v_k|$ MANHATTA

$\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} |v_k|^2\right)^{1/2}$ EUCLI

LA NORMA DUE A DIFF. DELLE ALTRE È OTTENUTA DA UN PRODOTTO SCALARE

$\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} |v_k|^p\right)^{1/p}$

⇓

SEMPLIFICA I CALCOLI ⇒ CON LE PROPRIETÀ DEL PRODO SCALARE SI DIMOSTRANO FACILMENTE

PROPRIETÀ

- $\|w_1 + w_2\| \leq \|w_1\| + \|w_2\|$
- $\|\alpha w\| = |\alpha| \, \|w\|$
- $\|w\| = 0 \iff w = 0 \in \mathbb{R}^n$

↳ DEVE AVERE TUTTI I COMPONENTI NULLI

PROPRIETÀ PRODOTTO SCALARE

- $v_A v_B = v_B v_A$
- $v \cdot v \geq 0$
- $v_A \cdot v_B = v_A^T W v_B$ → MA PE

NOI PER IL NOSTRO PROBLEMA CERCHIAMO

$$\begin{cases} \min \|x\| \rightarrow \text{PROBLEMA} \Rightarrow \|x\| = x^T W x \\ Mx = b \rightarrow \text{VINCOLO} \end{cases}$$

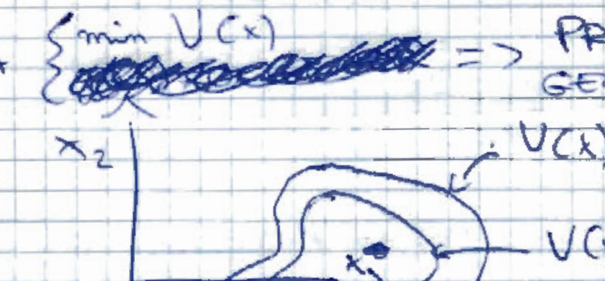
↳ SISTEMA DI EQUAZIONI

NEL NOSTRO CASO

$$\begin{cases} \min \|\dot q\| = \dot q^T W \dot q \rightarrow \text{PROBLEMA} \rightarrow \text{NOI OVVIAMENTE CERCHIAMO L'ARGOMENTO CHE DIA IL MINIM} \\ J(q)\dot q = v_{des} \rightarrow \text{VINCOLO} \end{cases}$$

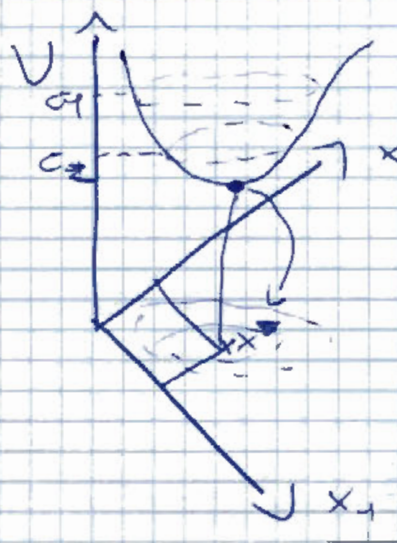
CONSIDERIAMO ORA $\{\min V(x)$ ⇒ PROBLEMA GENERICO SENZA VINC

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



$V(x^*) \leq V$

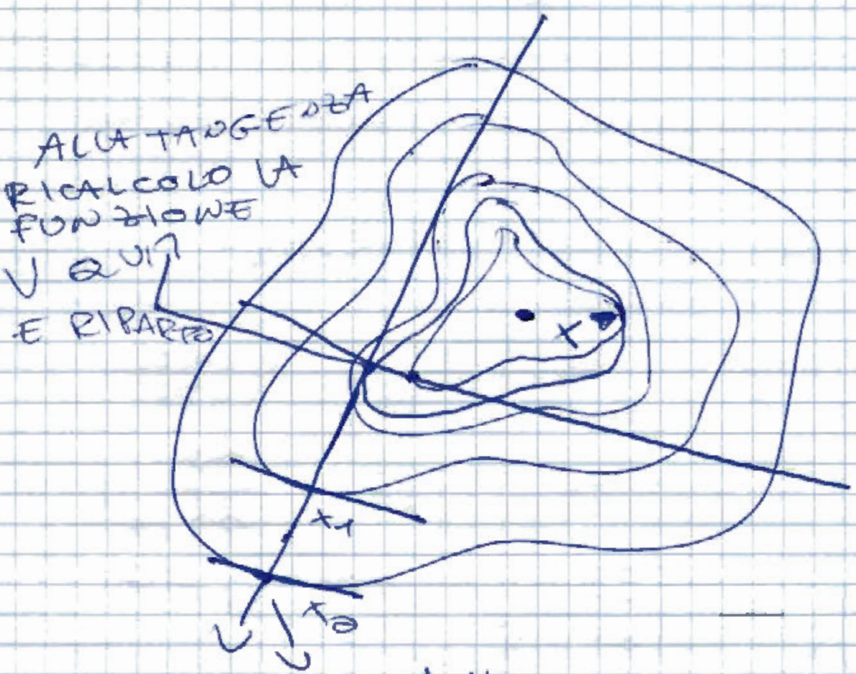
È PROPRIO L'ARGOMENTO CHE CERCHIAMO



SE $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x^*} = 0$ LE CURVE DI LIVELLO SI CONCENTRANO IN UN PUNTO x^*

$\left.\frac{d^2U}{\partial x^2}\right|_{x^*} > 0$ IL PUNTO x^* E' UN MINIMO

UTILIZZEREMO L'ALGORITMO DEL GRADIENTE PER ARRIVARE AD x^* OVVERO



- SE $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} \neq 0$ ALLORA POSSO SPOSTARMI VERSO L'INTERNO

$\Downarrow$

DOVE

$$U(x_{k+1}) = U(x_k) - \alpha_k \left\| \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_k} \right\|^2 \Leftarrow U(x_{k+1}) < U(x_k)$$

$\Downarrow$

LO SPOSTAMENTO DIPENDE DA α_k

$\Downarrow$

IL PASSO INFATTI E'

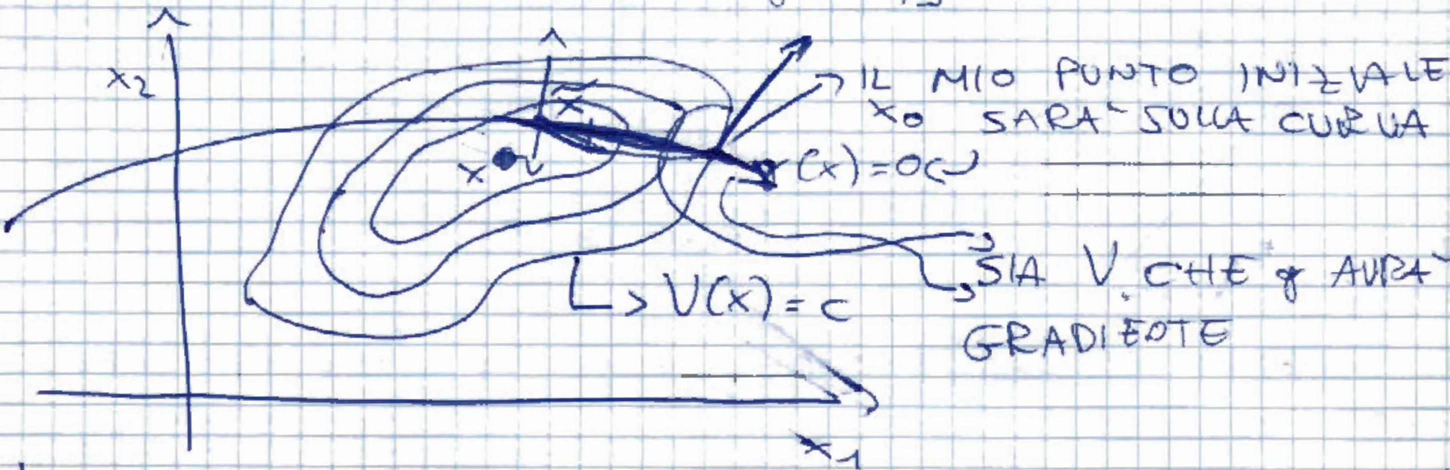
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left(\frac{dU}{dx}\right)^T_{x_k}$$

$\Downarrow$

- QUANDO ARRIVO A $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x^*} = 0$ ALLORA SONO AL PUNTO STAZIONARIO E SE $\frac{dU^2}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow x^*$ MINIMO

CON VINCOLI

$$\begin{cases} \min V(x) \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad \text{CON} \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$



IN QUESTO CASO NON POSSO SPOSTARMI E BASTA MA DEVO PROIETTARE IL MIO SPOSTAMENTO SUL VINCOLO PER CONTROLLARE CHE NON SONO ANDATO OLTRE LUI

⇓

SONO ARRIVATO AL MINIMO VINCOLATO = QUANDO ARRIVO CHE IL GRADIENTE DI V È PARALLELO A QUELLO DI g NON POSSO ANDARE OLTRE

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^T_{\tilde{x}} = \gamma \left(\frac{dg}{dx}\right)^T_{\tilde{x}} \quad \text{CON } \gamma \neq 0$$

⇒ PER CONTROLLARE CHE SONO SUL VINCOLO DEVO AVERE $\left.\frac{dg}{dx}\right|_{\tilde{x}} (x - \tilde{x}) =$

SE I VINCOLI SONO m SI HA CHE

$$\boxed{\left(\frac{dV}{dx}\right)^T_{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \left(\frac{dg_i}{dx}\right)^T_{\tilde{x}}}$$

SCRIVENDO IL TUTTO CON IL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

$$L(x, \lambda) = V(x) + \lambda^T g(x) \quad \text{DOVE } \lambda^T g(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

CON $\lambda \in \mathbb{R}^m$ CON $m < n$
$x \in \mathbb{R}^n$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0$$

QUINDI DERIVANDO L

$$\left(\frac{dU}{dx} + \lambda^T \frac{dg}{dx}\right)\Bigg|_{x^*, \lambda^*} = 0 \qquad \text{E} \qquad g^T(x)\Big|_{x^*, \lambda^*} = 0$$

SOSTITUENDO

$$\frac{dU}{dx}\Bigg|_{x^*} + \lambda^{*T} \frac{dg}{dx}\Bigg|_{x^*} = 0$$

TRASPONENDO TUTTO ORA

$$\boxed{\left(\frac{dU}{dx}\right)^T_{x^*} = -\left(\frac{dg}{dx}\right)^T_{x^*} \lambda^*}$$

26/10/2011

NOI ORA ANDIAMO CERCARE

$$\begin{cases} \min \|\dot{q}\|^2_w & \text{con } \|\dot{q}\|^2_w = \dot{q}^T W \dot{q} \\ J(q)\dot{q} = v_{des} \end{cases}$$

CONSIDERIAMO QUINDI ORA UNA FUNZIONE QUADRATICA

$V(x) = x^T W x \quad \in \mathbb{R}^n$ CON $W = W^T > 0$

E IL VINCOLO

$g(x) = Mx - b = 0$

SCRIVIAMO LA LANGRAGIANA

$$L(x, \lambda) = x^T W x + \lambda^T (Mx - b)$$

ORA DOBBIAMO DERIVARE

- RICONSIDERIAMO LA DERIVATA DI UNA FORMA QUADRATICA OVVERO

$V(x) = f^T(x)\, h(x) = h^T(x) f(x) \quad h(x) \in \mathbb{R}^n$

DERIVANDO

$$\frac{dV}{dx} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \; \cdots \; \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]$$

$$\frac{dh}{dx} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \; \cdots \; \frac{\partial h}{\partial x_n}\right]$$

SAPENDO CHE

$$\frac{dCx}{dx} = \left[\frac{\partial Cx}{\partial x_1} \; \cdots \; \frac{\partial Cx}{\partial x_n}\right] = C \quad \text{con } C = [c_1 \cdots c_n]$$

$$Cx = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

ORA RICONSIDERIAMO

$$\frac{dV}{dx} = f^T(x)\frac{dh}{dx} + h^T(x)\frac{df}{dx}$$

ORA CONSIDERIAMO IL SUO CASO PARTICOLARE

$$V(x) = f^T(x) f(x) = \| f(x) \|^2 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 2 f^T(x)\frac{df}{dx}$$

DA QUESTE DERIVIAMO LA FORMA QUADRATICA

$$V(x) = \underbrace{x^T}_{x} \underbrace{Wx}_{h} \overset{\frac{dV}{dx}}{=} \underbrace{x^T W}_{f^T(x)\frac{dh}{dx}} + \underbrace{x^T W^T}_{h^T} = x^T(W + W^T)$$

QUINDI

$$\frac{d\, x^T W x}{dx} = 2x^T W$$

QUINDI POSSIAMO RISOLVERE IL NOSTRO PROBLEMA NELLA LAGRANGIANA

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x^T W + \lambda^T M$$

CALCOLATO NEL SUO PUNTO OTTIMALE SI DEVE AVERE

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{x^*, \lambda^*} = 2x^{*T} W + \lambda^{*T} M = 0$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{x^*, \lambda^*} = (Mx^* - b)^T = 0$$

$\Rightarrow$ CONDIZIONI DI STAZIONARIETA'

ORA CONSIDERIAMO

$Mx^* = b \Rightarrow$ CONDIZIONE 2

$2W^T x^* = -M^T \lambda^* \Rightarrow$ CONDIZIONE 1 (HO FATTO IL TRASPOSTO)

QUINDI RICAVO x^* DALLA 1

$$x^* = -\frac{1}{2} W^{-1} M^T \lambda^*$$

SOSTITUENDO x^* NELLA 2

$$-\frac{1}{2} M W^{-1} M^T \lambda^* = b$$

NELL' IPOTESI CHE $M W^{-1} M^T > 0$ (DEF. POS.) ALLORA POSSIAMO CALCOLARE LA SOLUZIONE CHE SARÀ

$$\lambda^* = -2 \left(M W^{-1} M^T\right)^{-1} b$$

SOSTITUENDO ORA λ^* SI HA CHE

$$x^* = \underbrace{W^{-1} M^T \left(M W^{-1} M^T\right)^{-1}}_{M_W^+ \text{ PSEUDO INVERSA DESTRA}} b \Rightarrow x^* = M_W^+ b$$

- SE M QUADRATA $\Rightarrow M^{-1} = M_W^+$
- $M M_W^+ = M W^{-1} M^T \left(M W^{-1} M^T\right)^{-1} = I_m$ PER QUESTO È DETTA DESTRA

APPLICANDO QUESTO PROCEDIMENTO AL NOSTRO PROBLEMA

$$\boxed{\dot{q}^* = W^{-1} J^T(q) \left(J(q) W^{-1} J^T(q)\right)^{-1} \dot{r}_{des}}$$

L'UNICO PROBLEMA RIMASTO È SCEGLIERE LA MATRICE DI PESO W => USIAMO SOLITAMENTE LA MATRICE DI INERZIA

ESEMPIO (MATRICE DI PESO)

$$x_1 - x_2 = 2 \qquad V_A(x) = x_1^2 + x_2^2 = x^T W_A x$$

$$x_2 = x_1 - 2 \qquad V_B(x) = 9x_1^2 + x_2^2 = x^T W_B x$$

IN FORMA ~~[illegible]~~ MATRICIALE

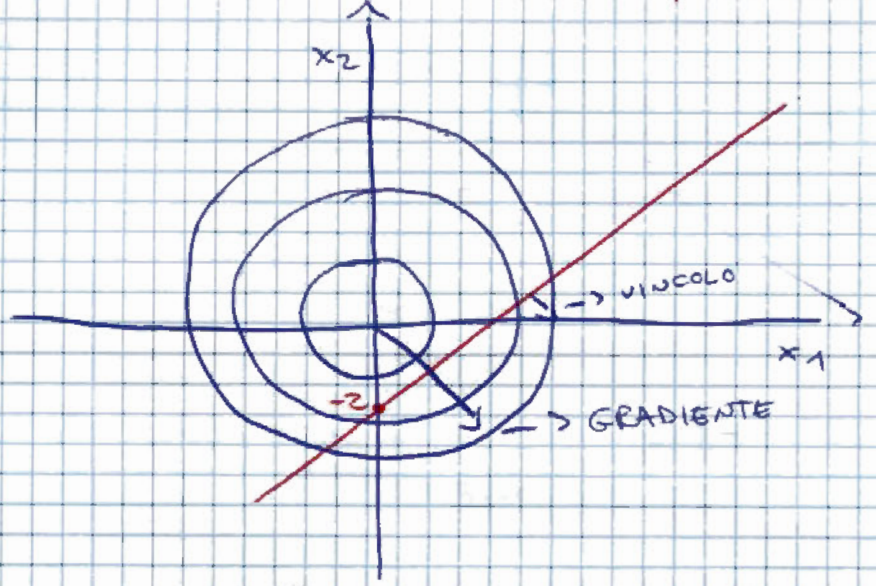
$$V_A(x) = x^T x \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x = 2 \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = 2$$

$$W_A = I_2 \qquad W_B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ POICHÉ } V_B(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ANDANDO A RAPPRESENTARE NEL CASO DI W_A



ESSENDO PARALLELO
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

CALCOLO LA ~~~~ PSEUDOINVERSA E SI HA CHE

$$M^+_{W_A} = W_A^{-1} M^+ \left(M W_A^{-1} M^+\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

QUINDI

$$x_A^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} b$$

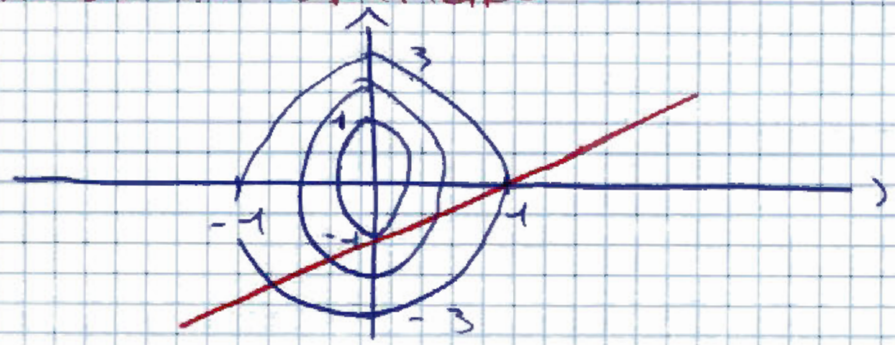
ORA CONSIDERIAMO LA W_B E SI HA CHE

$$M^+_{W_C} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/9 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{9}{10} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -9/10 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B^* = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -9/10 \end{bmatrix} b =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/10 \\ -9/10 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -9/5 \end{bmatrix}$$

ANDANDO A GRAFICARE



PROBLEMA DUALE => CONSIDERIAMO ORA DI AVERE PIU' EQUAZIONI CHE INCOGNITE

$\Downarrow$

PROBLEMA SOVRADETERMINATO

$m > n$

- $Mx = b$

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

- NON ESISTE QUASI MAI SOLUZIONE

CONSIDERANDO ORA LA MATRICE

$$\underbrace{\boxed{(M^T W M)^{-1} M^T W}}_{M_W^+}$$

MATRICE PSEUDO INVERSA SINISTRA

PROPRIETA'

- $M_W^+ M = I_n$ -> PICCOLA
- $M \cdot M_W^+ \neq I_m$

- MENTRE QUI IL PESO CI PERMETTE DI ABBASSARE L'INCOGNITA NELL'ALTRO CASO LA ALZANO

$\Downarrow$

IN ENTRAMBI I CASI CI INTERESSA QUELLA VARIABILE

CI AIUTA A CALIBRARE ~~COSE OVVERO~~

$y = f(x_i, \theta)$

$\quad$ ↳ PARAMETRI

$y_k = f(x_k, \theta) + n_k$

$$V(\theta) = \sum_{k=1}^{m} (y_k - f(x_k, \theta))^2$$

↳ MINIMIZZARE QUESTO CI FA PRENDERE L'ERRORE MINIMO

PROBLEMA SOVRADETERMINATO 27/10/2011

⇓

DETTA ANCHE STIMA DEI PARAMETRI O CALIBRAZIONE

$Mx = b$ — NON HA SOLUZIONI

⇓

$M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$ $m > n$ => PIU' EQUAZIONI CHE INCOGNITE

DEFINENDO $\eta = Mx - b$ => OVVERO UN ERRORE TROVO IL MINIMO DELLA FORMA QUADRATICA

$$\min \eta^T W \eta \Rightarrow x^* = M_W^+ b \Rightarrow M_W^+ = (M^T W M)^{-1} M^T W$$

OVVIAMENTE PER RISOLVERLO NON CI CONVIENE CALCOLARE L'INVERSA MA CALCOLIAMO

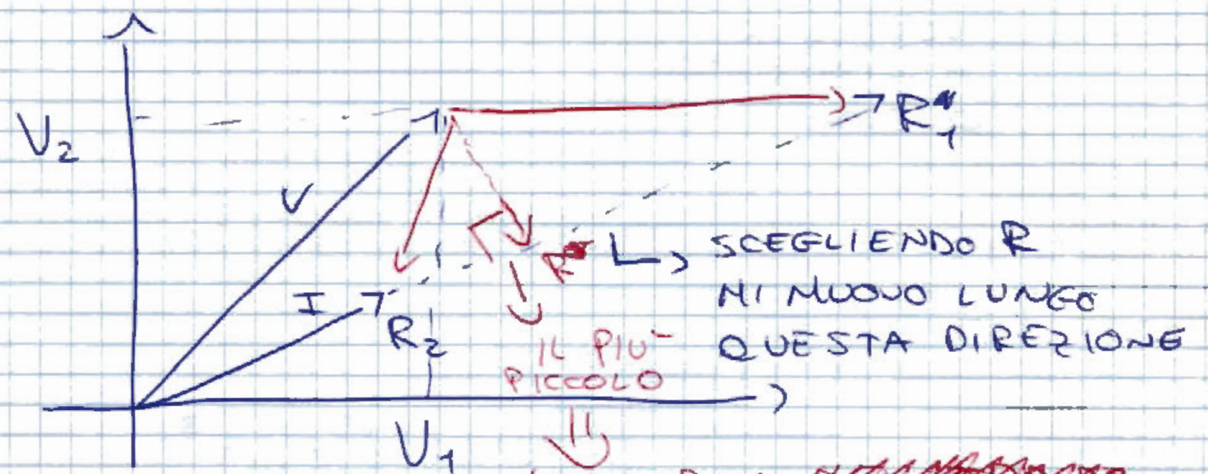
$$(M^T W M) x^* = M^T W b$$

ESEMPIO

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}$$ CERCHIAMO R^*

$V = RI + \eta$

↳ RUMORE



⇓

LA NORMA ~~[illegible]~~ DELL'ERRORE E' LA PIU' PICCOLA

$\eta^* \perp Im(M) \Leftarrow$

QUINDI DAI CONTI

$$Mx^* - b = M M_W^+ b - b = \underbrace{(M M_W^+ - I_m)\, b}_{= H^*}$$

VERIFICANDO L'ORTOGONALITA'

$$v \in \mathcal{I}(M) \Rightarrow v = M\lambda$$

$$v^T W H^* = \lambda^T M^T W \left(M M_W^+ - I_m\right) b =$$

$$= \lambda^T M^T W \left(M \left(M^T W M\right)^{-1} M^T W - I_m\right) b =$$

$$= \lambda^T \left(M^T W M \left(M^T W M\right)^{-1} M^T W - M^T W\right) b =$$

$$= \lambda^T \left(M^T W - M^T W\right) b = 0$$

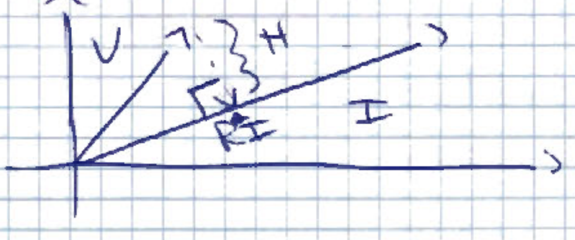
QUESTO VUOL DIRE ANCHE CHE IL GRADIENTE SI ANNULLA

$$V(x) = (Mx - b)^T W (Mx - b) \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 2\left(Mx^* - b\right)^T W M = 0$$

VOGLIAMO MINIMIZZARE QUESTA

APPLICANDO IL TUTTO NELLA ROBOTICA

- PROIETTORE



$$\Pi_I(V) = V^* = I R^*$$

PROIEZIONE DI V SULLO SPAZIO GENERATO DA I

DATA UNA $W>0$ PROIETTARE IN GENERALE VUOL DIRE

$$\Pi_M(b) : \boxed{b - \Pi_M(b) \perp Im(M)}$$

SI PARLA DI PROIEZIONE ORTOGONALE

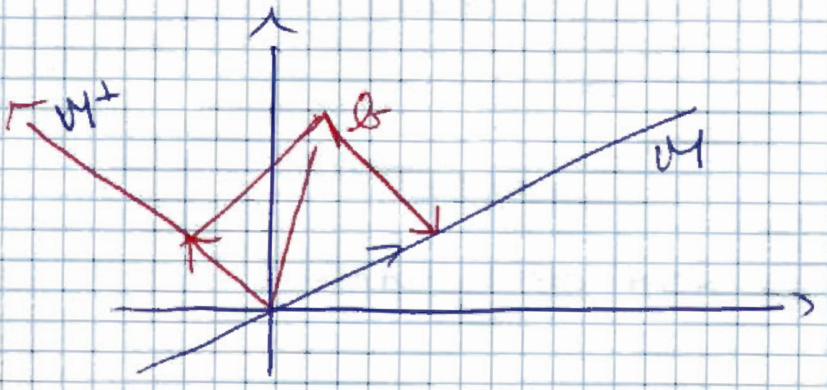
DOVE

$\Pi_M(b) = Mx^* =$

$= MM_W^+ b$

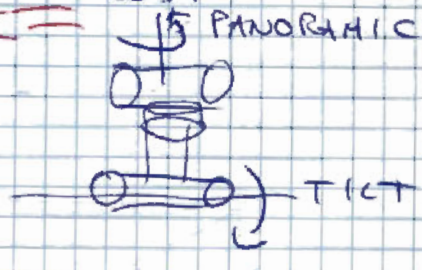
$\Pi_{M^\perp}(b) =$

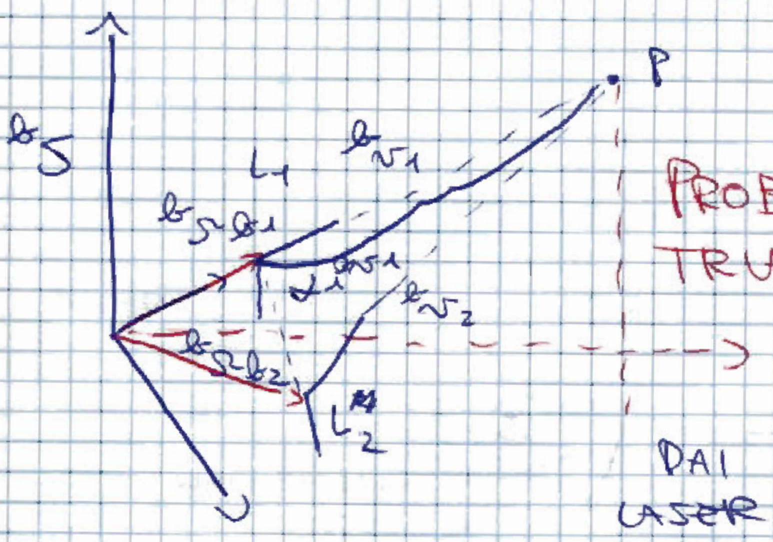
$= (I_m - MM_W^+) b$



CONSIDERIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO

⇒ POI PRENDIAMO DEI PAN-TILT OVVERO UN ROBOT FATTO COSÌ





PROBLEMA DI TRIANGOLAZIONE ⇐

⇓

DAI DUE LASER CERCHIAMO DI SCOPRIRE DOVE SI TROVA P ⇐ CON DEI LASER SOPRA MONTATI

$$^b r_{b_P} = {}^b r_{b_1} + \alpha_1 \, {}^b v_1$$

$$^b r_{b_P} = {}^b r_{b_2} + \alpha_2 \, {}^b v_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{{}^b r_{b_1} + \alpha_1 \, {}^b v_1 = {}^b r_{b_2} + \alpha_2 \, {}^b v_2}_{\text{TRE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE}} \qquad x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \, {}^b v_1 - \alpha_2 \, {}^b v_2 = {}^b r_{b_2} - {}^b r_{b_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^b v_1 & -{}^b v_2 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^b r_{b_2} - {}^b r_{b_1} \end{bmatrix}}_{b}$$

DA CIÒ DERIVA CHE

$$MM^T = \begin{bmatrix} 1 & -c\,\rho_{12} \\ -c\,\rho_{12} & 1 \end{bmatrix} = 1 - c^2 \rho_{12} = x^2 \rho_{12}$$

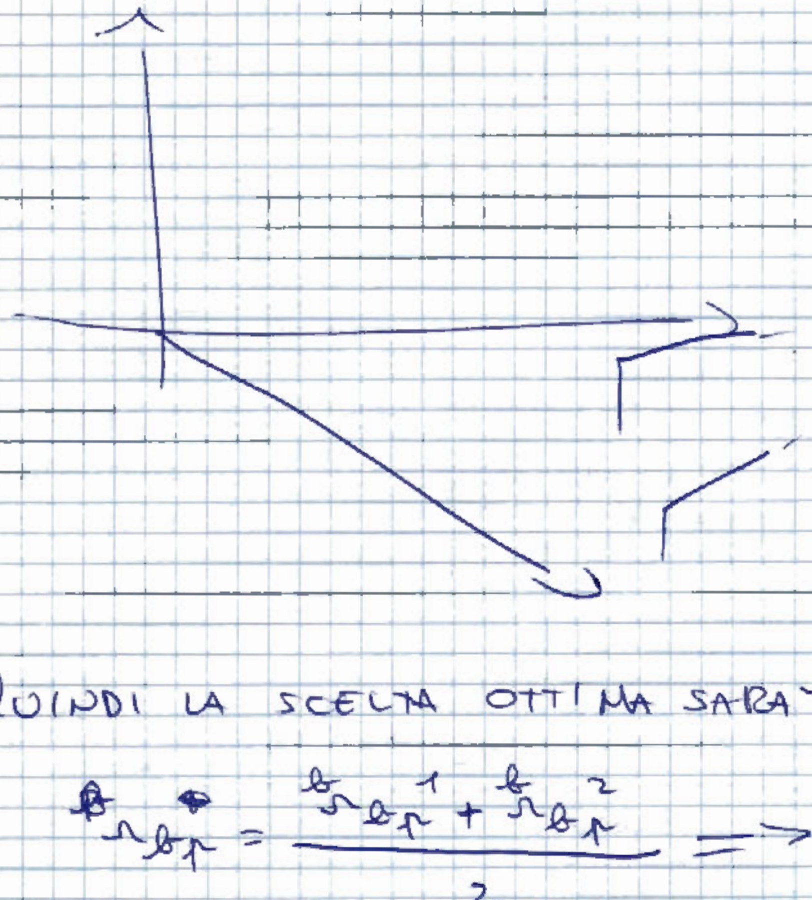
$$\begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} = \left(M^T M\right)^{-1} M^T b$$

$\Downarrow$

SOSTITUENDOLI $^b\Omega_{b\Gamma}$ NON OTTENIAMO LO STESSO RISULTATO

CERCHIAMO QUINDI DI MINIMIZZARE LA NORMA DI UN ERRORE OVVERO

$$\left\| {}^b\Omega_{b\Gamma}^1 - {}^b\Omega_{b\Gamma}^2 \right\|$$



α_1 (1)

α_2 → MINIMIZZIAMO QUESTO

QUINDI LA SCELTA OTTIMA SARÀ UNA MEDIA TRA I DUE

$${}^b\Omega_{b\Gamma}^* = \frac{{}^b\Omega_{b\Gamma}^1 + {}^b\Omega_{b\Gamma}^2}{2} \Longrightarrow$$

OTTENIAMO IL RISULTATO CON UN RESIDUO CHE SARÀ L'ERRORE DEL MIO RISULTATO (LE RETTE POSSONO ESSERE SGHEMBE) → RESIDUO GRANDE

SE HO PIÙ LASER PERÒ NON POSSO PIÙ ~~...~~ UGUALIARE DUE EQUAZIONI PERCHÈ NE AVRÒ DI PIÙ QUINDI ANDIAMO A CAMBIARE LE NOSTRE VARIABILI

$^b r_{bp} = {}^b r_{bk} + \alpha_k {}^b v_k \Rightarrow$ CERCHIAMO LA MEDIA DOVE TUTTE LE MISURE FANNO MENO ERRORI POSSIBILI

SCEGLIAMO QUINDI

$$x = \begin{bmatrix} {}^b r_{bp} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+3} \Rightarrow {}^b r_{bp} - \alpha_k v_k = {}^b r_{bk}$$

TROVIAMO QUINDI M E b E SI HA CHE

$$\overset{M}{\begin{bmatrix} I_3 & -v_1 & 0 & \dots & 0 \\ I_3 & 0 & -v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ I_3 & 0 & \dots & \dots & -v_m \end{bmatrix}} \overset{x}{\begin{bmatrix} {}^b r_{bp} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}} = \overset{b}{\begin{bmatrix} {}^b r_{b1} \\ {}^b r_{b2} \\ \vdots \\ {}^b r_{bm} \end{bmatrix}}$$

ORA HO $3m$ EQUAZIONI IN $m+3$ INCOGNITE

INTRODUCIAMO L'ERRORE

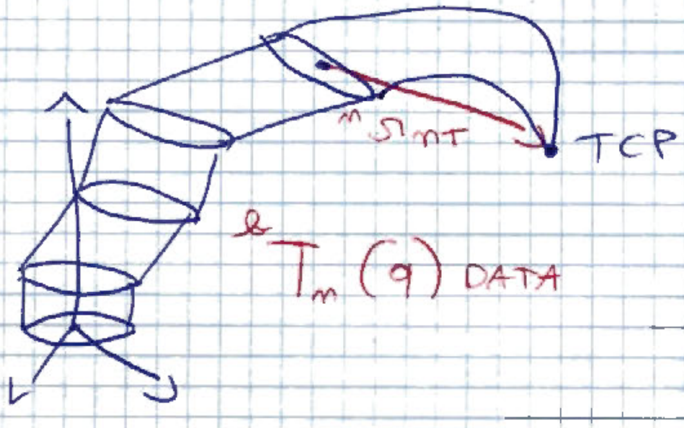
$$\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^b r_{bp} - ({}^b r_{b1} - \alpha_1 {}^b v_1) \\ \vdots \\ {}^b r_{bp} - ({}^b r_{bk} - \alpha_k {}^b v_k) \end{bmatrix}$$

QUINDI LA MIA NORMA SARÀ

$$\sum_{k=1}^{m} \left\| {}^b r_{bp} - ({}^b r_{bk} + \alpha_k {}^b v_k) \right\|^2$$

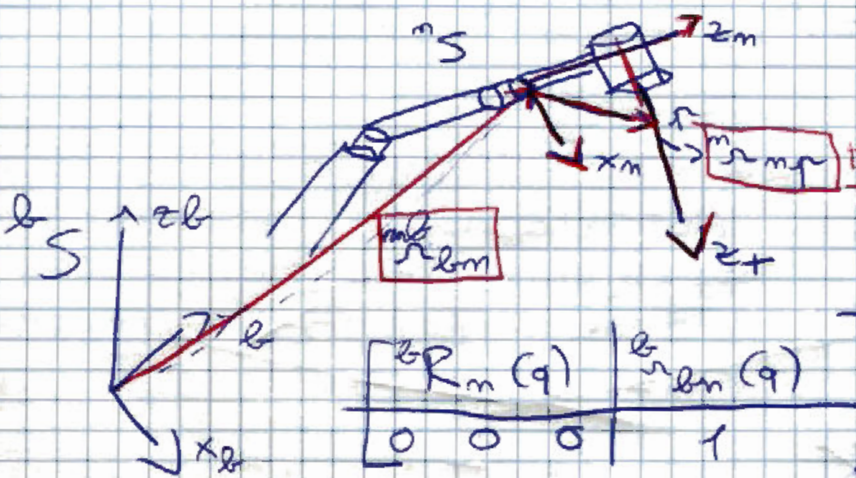
DA QUANTO DETTO ANDIAMO A VEDERE COME ADDESTRARE UN ROBOT AD UTILIZZARE UN UTENSILE

IL PRIMO PROBLEMA E' TROVARE ${}^{n}s_{nT}$



DOBBIAMO QUINDI VEDERE COME FARE ACQUISIRE IL TOOL AL ROBOT

LEZIONE 02/11/2011



$$\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^bR_m(q) & & {}^b r_{bm}(q) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

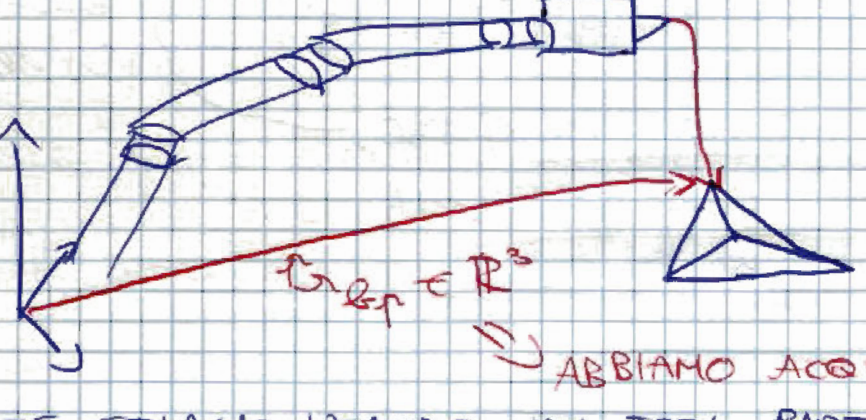
POSSIAMO PASSARE O CERCANDO LE COORDINATE x, y, z O GLI ANGOLI DI EULER E_1, E_2, E_3

PROCEDURA 1 (MASTER TOOL)

PER POTER SETTARE QUINDI IL TOOL SI PROCEDE COSÌ

- SI MONTA IL TOOL => IN GENERE APPUNTITO ALL'ESTREMITÀ
- SI CONSIDERA UN ALTRA PUNTA (UN OGGETTO A CASO)
- SI PORTA LA PUNTA DEL TOOL A FAR COINCIDERE CON LA PUNTA DELL'OGGETTO => SAPPIAMO DOVE SI TROVA (STIAMO USANDO IL ROBOT COME SISTEMA DI MISURA)

⇓



⇒ ABBIAMO ACQUISITO QUESTO

OVVIAMENTE STIAMO USANDO UN TOOL PARTICOLARE CHIAMATO MASTER TOOL (SERVE PROPRIO A CALIBRARE)

⇓ CONOSCIAMO DI FABRICA LE SU COORDINATE

- CAMBIANDO ORA IL TOOL CON QUELLO CHE A NOI INTERESSA E RIPORTANDOLA IN QUEL PUNTO ARRIVO AL TCP => OVVERO CONOSCO

$$^bR_m(\bar{q}) \quad {}^b r_{bm}(\bar{q})$$

$$\underbrace{\boxed{^bR_m}}_{M}\,\underbrace{\boxed{^m r_{mT}}}_{x} + {}^b r_{bm} = {}^b r_{bP}$$

QUINDI

$$ {}^{b}R_{m}\, {}^{m}r_{mT} = {}^{b}r_{bp} - {}^{b}r_{bm} \Rightarrow {}^{m}r_{mT} = {}^{b}R_{m}^{T} \left({}^{b}r_{bp} - {}^{b}r_{bm} \right) $$

$\Downarrow$

QUESTO E' PROPRIO IL PASSAGGIO DALLE VECCHIE COORDINATE DEL MASTER TOO[L] A QUELLE DEL TOOL DI INTE[RESSE]

PROCEDURA 2 (4 MISURE)

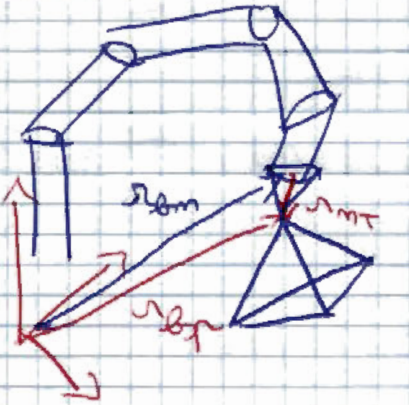
- DIRETTAMENTE CON IL TOOL DI INTERESSE VADO A FAR COINCIDERE LA SUA PUNTA IN 4 MODI DIVERSI SUL PUNTO DELL'OGGETTO ESTERNO $\Rightarrow$ CIOE' CON ORIENTAMENTO DIVERSO $\Downarrow$ OVVIAMENTE LE MISURE POSSONO ESSERE PIU' DI 4

- LUI ACQUISISCE
  - ${}^{b}R_{m}(q^1)\ {}^{b}r_{bm}(q^1)$
  - ${}^{b}R_{m}(q^2)\ {}^{b}r_{bm}(q^2)$
  - ${}^{b}R_{m}(q^3)\ {}^{b}r_{bm}(q^3)$
  - ${}^{b}R_{m}(q^4)\ {}^{b}r_{bm}(q^4)$

- QUI ABBIAMO 12 EQ. IN 6 INC.

CON $k = 1, \dots, 4$

$$ {}^{b}r_{bp} = {}^{b}r_{bm}^{k} + {}^{b}R_{m}^{k} \cdot {}^{m}r_{mT} $$



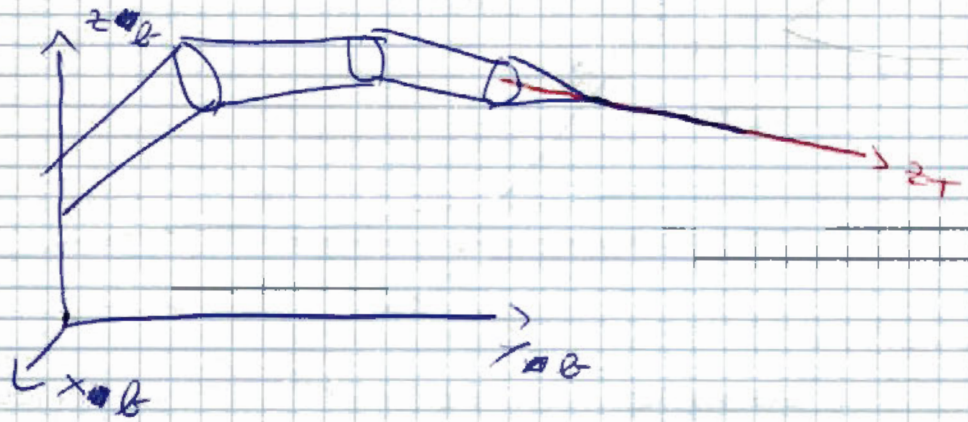
QUINDI COME PRIMA SCRIVIAMOLA NELLA FORMA $Mx = b$ E SI HA CHE $\Rightarrow$ PONENDO NEL CASO GENERALE CHE LE MISURE SONO m E NON 4

$$\begin{cases} {}^{b}r_{bf} - {}^{b}R_m^{1} \, {}^{m}r_{mT} = {}^{b}r_{bm}^{1} \\ \vdots \\ {}^{b}r_{bf} - {}^{b}R_m^{m} \, {}^{m}r_{mT} = {}^{b}r_{bm}^{m} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I_3 & -{}^{b}R_m^{1} \\ \vdots & \vdots \\ I_3 & -{}^{b}R_m^{m} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{b}r_{bf} \\ {}^{m}r_{mT} \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{b}r_{bm}^{1} \\ \vdots \\ {}^{b}r_{bm}^{m} \end{bmatrix}}_{b}$$

AVENDOLO ORA CALIBRATO SI POTREBBE USARE QUESTO COME MASTER TOOL

PRODURA 3 (ASSE Z)

DOBBIAMO ALLINEARE L'ASSE Z ~~...~~ AD UN ASSE COORDINATO CHE VOGLIO IO (OVVERO RISPETTO AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO)



LUI ACQUISISCE ${}^{b}R_m$ E AVENDOLO AD ESEMPIO ALLINEATO CON x_b

$${}^{b}z_T = {}^{b}R_m \, {}^{m}z_T = -{}^{b}x_b \Rightarrow {}^{m}z_T = -{}^{b}R_m^{T} \, {}^{b}x_b \quad \text{DOVE } {}^{b}x_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

AVREMO DEGLI ERRORI PERCHE' NON SARA' PERF. PERP.
QUINDI DOBBIAMO PROCEDERE CON UNA ORTOGONALIZZAZIONE

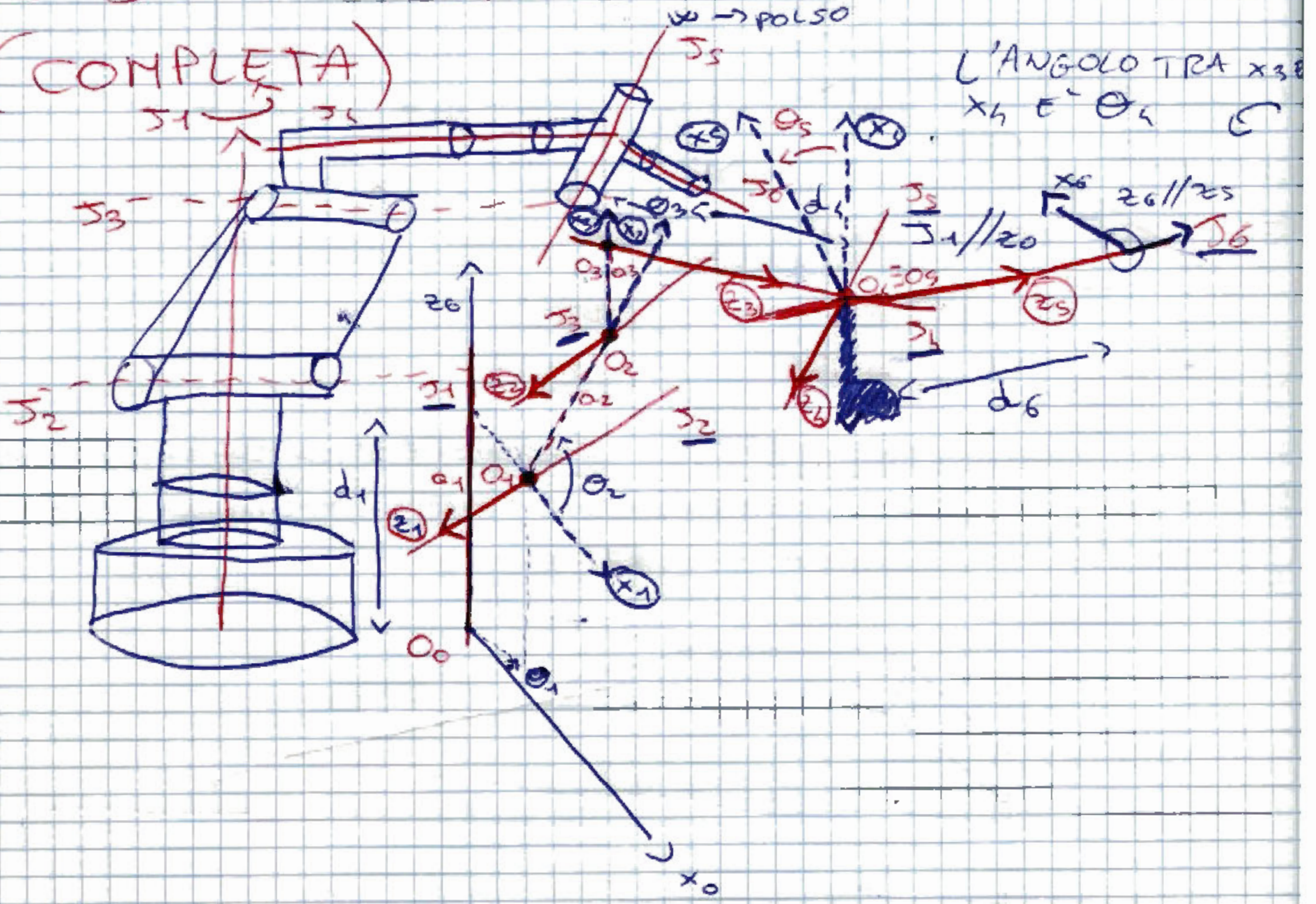
$$\boxed{{}^{m}\tilde{x}_T^{1} = {}^{m}\tilde{x}_T - \left({}^{m}\tilde{x}_T \, {}^{m}z_T\right) {}^{m}z_T} \Rightarrow {}^{m}x_T = \frac{{}^{m}\tilde{x}_T^{1}}{\|{}^{m}\tilde{x}_T^{1}\|} \perp {}^{m}z_T$$

PROCEDURA DI GRAHM SMITH

QUINDI

$${}^{m}y_T = {}^{m}z_T \times {}^{m}x_T$$

CINEMATICA INVERSA DEL ROBOT ANTROPOMORFO (COMPLETA)



L'ANGOLO TRA x_3 E x_4 È θ_4

SCRIVIAMO I PARAMETRI DI DENAVIT HARTENBERG

→ DISTANZA FRA I GIUNTI

d_k	a_k	α_k
d_1	a_1	$\pi/2$
0	a_2	0
0	a_3	$\pi/2$
d_4	0	$-\pi/2$
0	0	$\pi/2$
d_6	0	0

PERCHÉ CI PASSA PER O_1

PASSA PER O_2

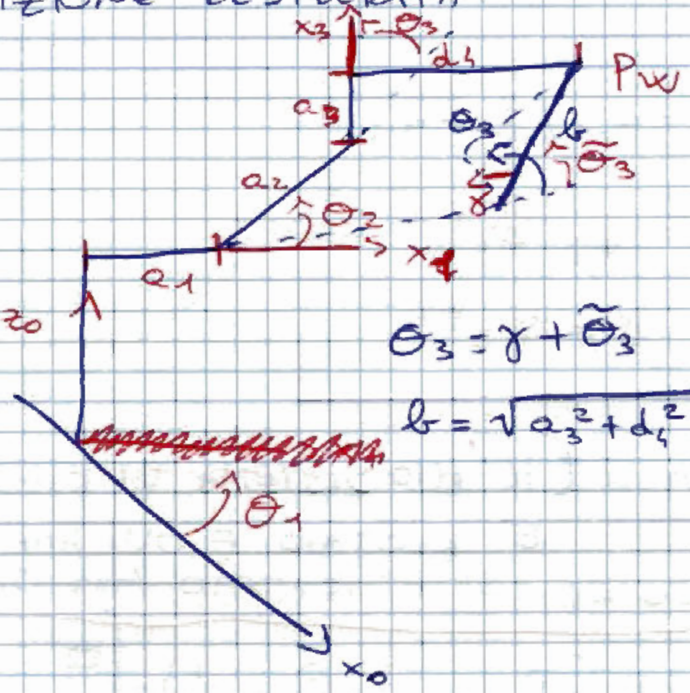
→ CON QUESTA TABELLA ABBIAMO RISOLTO LA CINEMATICA DIRETTA PERCHÉ POSSIAMO CALCOLARCI ${}^0T_6(q)$

→ IL SEGNO DIPENDE SE ORARIO O ANTIORARIO

NOI CERCHIAMO ${}^0p_w$ OVVERO CHE POI SAREBBE IL CENTRO DEL POLSO SFERICO OVVERO $O_4 \equiv O_5$ E SI HA CHE

$$\boxed{{}^0p_w = {}^0p_6 - d_6\,{}^0z_6}$$ → COORDINATE DEL POLSO

TROVIAMO ORA q_1, q_2, q_3 CHE PORTANO IL POLSO NELLA POSIZIONE DESIDERATA (LEGATI A [illegible] DOWN)



$$\theta_3 = \gamma + \tilde{\theta}_3$$

$$b = \sqrt{a_3^2 + d_4^2}$$

$$^0P_w = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \Rightarrow (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

CON

Kinimr 2R ( ) = Θ

⇓

COMANDO CHE DATO UN PUNTO MI RESTITUISCE UNA MATRICE DI ANGOLI PER ARRIVARCI A SECONDA DEL NUMERO DEI MIEI BRACCI

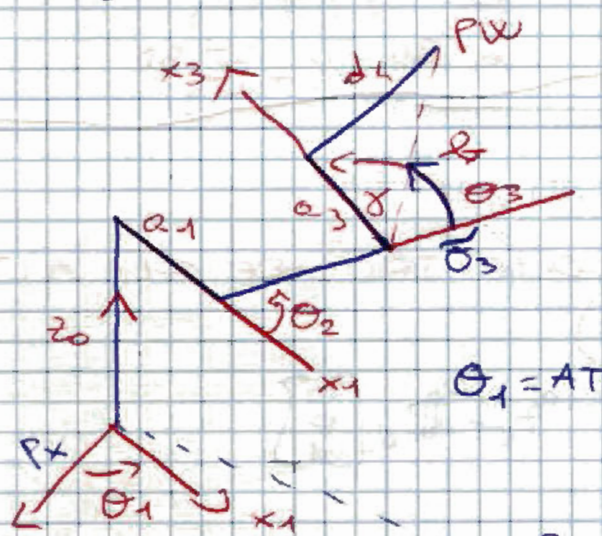
⇓

AVRÒ PIÙ SOLUZIONI

⇓

DOWN E UP

RIDISEGNANDO CON LA VERSIONE DOWN FATTA SOPRA



$\theta_1 = ATAN2(P_y, P_x) \Rightarrow$ QUESTA SOLUZIONE NON È UNICA

⇓

POSSO ARRIVARCI SIA DA UN LATO CHE DALL'ALTRO

CONSIDERIAMO LA SOLUZIONE θ_1^F E SI HA CHE

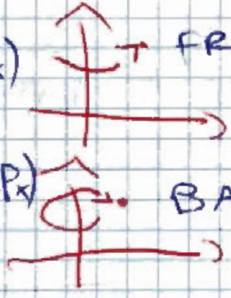
SE $\underbrace{\sqrt{P_x^2+P_y^2}}_{P_{x_1}} > 0$

⇓

SOLUZIONE FRONT

$\theta_1^F = ATAN2(P_y, P_x)$

$\theta_1^B = ATAN2(-P_y, -P_x)$



DOVE

$\theta_1^B = \theta_1^F + \pi$

ATTRAVERSO ORA I COMANDI Kinimr $2R(P_{x_1} - a_1, P_z - d_1) = \begin{bmatrix} \theta_2^U & \theta_2^{D} \\ \tilde{\theta}_3^U & \tilde{\theta}_3^{D} \end{bmatrix}$

MA SCRITTA MEGLIO

$$\begin{bmatrix} \theta_2^{FU} & \theta_2^{FD} \\ \tilde{\theta}_3^{FU} & \tilde{\theta}_3^{FD} \end{bmatrix} = \text{Kininv2R}(P_{x_1} - a_1, P_z - d_1)$$

DOVE $\theta_3^{FU} = \gamma + \tilde{\theta}_3^{FU}$

$\theta_3^{FD} = \gamma + \tilde{\theta}_3^{FD}$

PASSANDO ALLA SOLUZIONE BACK (IL MIO SISTEMA DI RIFERIM
È RUOTATO E OVVIAMENTE

$P_{x_1} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} < 0$

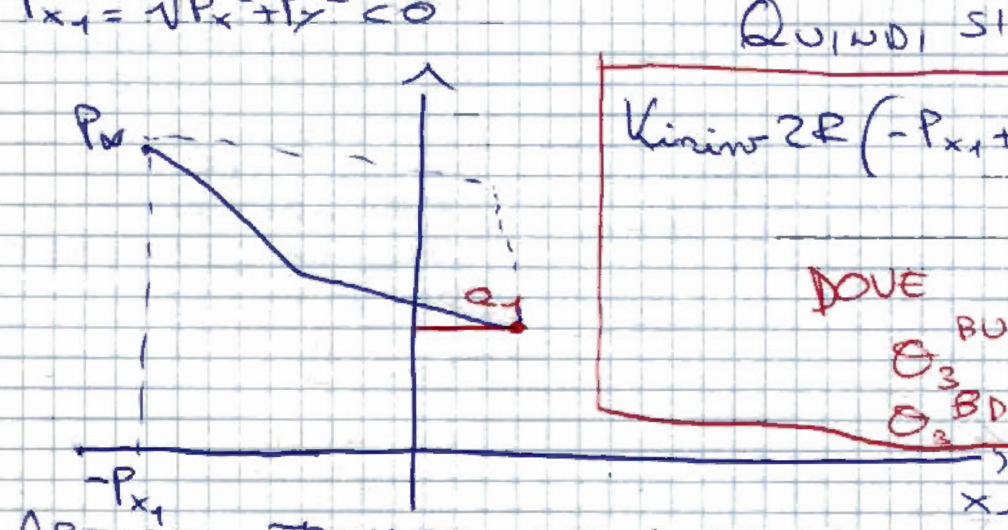
QUINDI SI È PORTATO APPRESSO

$$\text{Kininv2R}(-P_{x_1} + a_1, P_z - d_1) = \begin{bmatrix} \theta_2^{BU} & \theta_2^{B} \\ \tilde{\theta}_3^{BU} & \tilde{\theta}_3^{B} \end{bmatrix}$$

DOVE

$\theta_3^{BU} = \gamma + \tilde{\theta}_3^{BU}$

$\theta_3^{BD} = \gamma + \tilde{\theta}_3^{BD}$



ABBIAMO TROVATO LE 4 SOLUZIONI

ANDIAMO ORA A DEFINIRE COME TROVARE GLI ALTRI TRE PARAMETRI (ORIENTAMENTO)

DOBBIAMO INSOMMA TROVARE $^0z_6 = {^0R_6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

QUINDI

$$\underbrace{^0R_{6,des}}_{\Downarrow} = {^0R_6}(q) = {^0R_3}(\underbrace{q_1, q_2, q_3}_{\Downarrow})\, {^3R_6}(q_4, q_5, q_6)$$

QUESTA È DATA

~~QUESTI~~ TRE LI HO $\Rightarrow$ CALCOLATA PRIMA

$\Downarrow$

$$\boxed{{^0R_3^T}\, {^0R_{6,des}} = {^3R_6}(q_4, q_5, q_6)}$$

ABBIAMO TROVATO LE 4 SOLUZIONI $\Rightarrow$ TUTTO IL PROBLEMA CI RESTITUISCE 8 SOLUZIONI

CONSIDERIAMO 08/11/2011

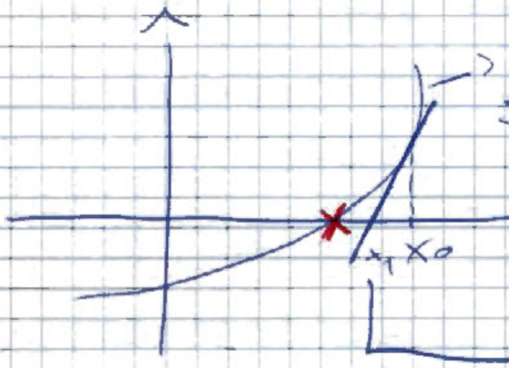
ANCORA L'OTTIMIZZAZIONE

NEWTON - RAPHSON

NASCE PER TROVARE SOLUZIONI A SISTEMI NON LINEARI

LA FUNZIONE SI TROVA IN $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

CONSIDERO



→ POLINOMIO DOVE VOGLIO TROVARE IL SUO VALORE IN ZERO

PRENDO UN x_0 GENERICO E CALCOLO $f(x_0)$

⇓

SE NON È QUELLO LO ZERO TRACCIO LA TANGENTE IN QUEL PUNTO E TROVO x_1 E VADO AVANTI A CERCARE

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\Big|_{x_0}(x_1 - x_0) = 0}$$ ⇐ OVVERO

⇓ POSSIAMO PERÒ TROVARLO ANCHE NELLA FORMA

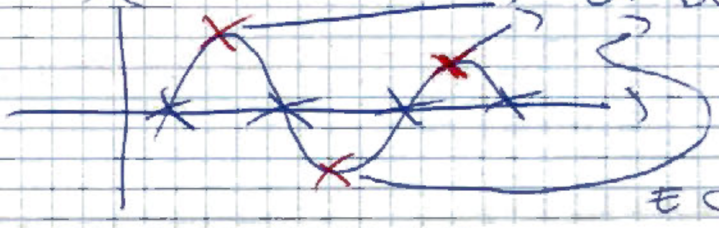
CONDIZIONE DI TANGENZA

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$ LO TROVA

QUINDI PROSEGUENDO OVVERO FINCHÉ NON VADO AVANTI E IN GENERALE

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

- SE LA DERIVATA SI ANNULLA È UN PROBLEMA



LA DERIVATA QUI È ZERO

⇓

DOVREMMO SPOSTARCI UN PO' SENNÒ NON CI RIUSCIAMO E COMUNQUE NON SI SA CHE

SOLUZIONE È

NEL CASO GENERALE OVVERO CASO DI n VARIABILI SI HA CHE

$$f(x) = f(x_k) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_k} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

$\Downarrow$ PER POTER APPLICARE NEWTON LA JACOBIANA DEVE POTERSI INVERTIRE

UN α_k C'È ~~LA~~ PURE NEWTON

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}_{x_k} f(x_k)}$$

CON QUESTO TROVIAMO LE SOLUZIONI

C = SE LA SCELTA INIZIALE È LONTANA

CON IL METODO DEL GRADIENTE INVECE TROVAVAMO E RISOLVEVAMO I PROBLEMI DI MINIMO OVVERO

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left(\frac{dU}{dx}\right)^T_{x_k}$$

$\Rightarrow$ PER FUNZIONARE IL GRADIENTE DEVE ESSERE DERIVABILE

PERÒ ENTRAMBI POSSONO ESSERE UTILIZZATI PER TUTTI E DUE I PROBLEMI

AD ESEMPIO IL GRADIENTE LO POSSIAMO USARE PER TROVARE SOLUZIONI DI EQUA. NON LINEARI

$\Downarrow$

BASTA DARE IN PASTO ALLA PROCEDURA $U(x) = \|f(x)\|^2 = f^T(x) f(x)$

QUINDI APPLICANDO QUESTO METODO

$$U = f^T f \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 2 f^T \frac{df}{dx}$$

$\Downarrow$

SOSTITUENDO

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \alpha_k 2 \left(\frac{df}{dx}\right)^T_{x_k} f(x_k)}$$

$\Rightarrow$ NOTIAMO COME QUESTA SIA UGUALE A NEWTON

APPLICANDO ORA I MIEI METODI NELLA ROBOTICA

- DEVO RISOLVERE

$r = k(q)$ CON $r \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^m$ $\Rightarrow r - k(q) = 0$

IN PRATICA STIAMO CERCANDO UNA POSIZ. OVVERO DOVE VOGLIO CHE IL MIO ROBOT SI SPOSTI

QUINDI OTTENIAMO

$$q_{k+1} = q_k - \alpha_k 2$$

ORA TROVIAMO LO JACOBIANO ALGEBRICO

$$\frac{df}{dx} \Rightarrow \frac{d(r - k(q))}{dq} = -\frac{dk}{dq} = -J_k(q)$$

SOSTITUENDO TUTTO AL CASO DEL GRADIENTE

$$\boxed{q_{k+1} = q_k + \alpha_k 2 J_k^T(q_k)(r - k(q_k))}$$

MENTRE NEWTON

$$\boxed{q_{k+1} = q_k + \alpha_k J_k^{-1}(q_k)(r - k(q_k))}$$

- ORA INVECE VEDIAMO COME MINIMIZZARE CON NEWTON

APPLICHIAMO NEWTON ALLA DERIVATA

$$f = \left(\frac{dU}{dx}\right)^T \quad \text{E CERCHIAMO IL } \min U(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dx}\right)^T = \frac{d^2U}{dx^2} = H(x)$$ → E' UN ESSIANA PERCHE' SONO DERIVATE SECONDE

$$\Downarrow$$

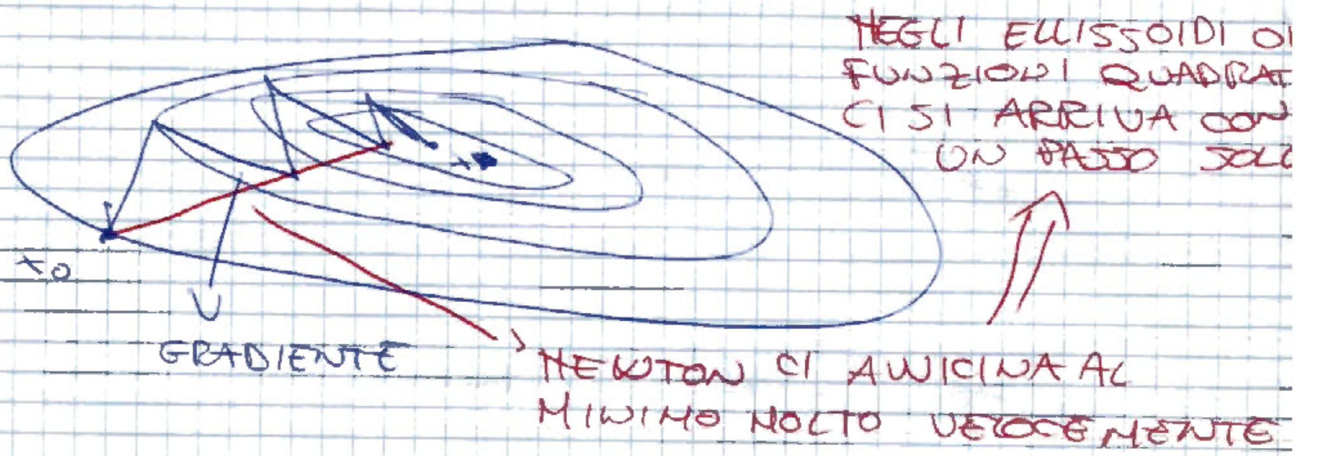
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_m}\end{pmatrix} \cdots \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_m}\end{pmatrix} \right)$$

QUINDI OTTENIAMO CHE SOSTITUENDO A NEWTON

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)^{-1}_{x_k} \left(\frac{dU}{dx}\right)^T_{x_k}}$$

MENTRE NEL GRADIENTE

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left(\frac{dU}{dx}\right)^T_{x_k}}$$



CONSIDERIAMO ORA CIO' CHE ABBIAMO CALCOLATO PRIMA

$$q_{k+1} - q_k = \alpha_k 2 J^T_{x_k}(q_k)(r - k(q_k))$$

$$\underbrace{q_{k+1} - q_k}_{\text{OGNI PASSO}} = 2\alpha_k J_k^{-1}(q_k)\underbrace{(r - k(q_k))}_{\text{MINIMIZZA L'ERRORE}}$$

GLI α_k USATI E ASSICURARE LA CONVERGENZA

QUINDI POI SIMBOLEGGIANO LA VEL D CO

PROCEDENDO PER PASSI PERO' SIAMO NEL DISCRETO

$\Downarrow$

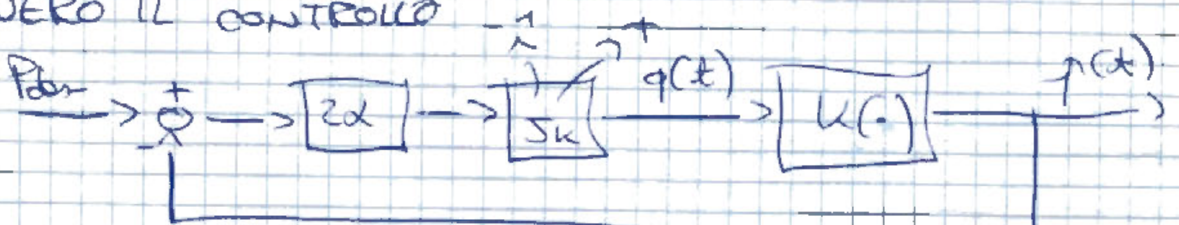
NOI VORREMMO VEDERE NEL CONTINUO QUINDI

RISCRIVIAMO TUTTO COSI'

$$\dot{q}(t) = 2\alpha_k J_k^T(q(t))(r_{des} - k(q(t)))$$

$$\dot{q}(t) = 2\alpha_k J_k^{-1}(q(t))(r_{des} - k(q(t)))$$

OVVERO IL CONTROLLO



E VEDIAMO CHE $q(t) \to q^* \mid k(q^*) = r_{des}$

RISOLVEREMO IL NOSTRO PROBLEMA APPLICANDO LIAPUNOV

RICORDIAMO $\Rightarrow$ FUNZIONE DI LIAPUNOV $\begin{cases} V(x) > 0 \text{ DEF. POS. CON } V(x^*) = 0 \\ \dot{V}(x) = \dfrac{dV}{dx} f(x) \leq 0 \text{ CON } \dot{x}(t) = f(x) \end{cases}$

$\Downarrow$ STABILITÀ DEL PUNTO DI EQUILIBRIO x^*

$\Rightarrow$ SE NEGATIVA

TORNANDO AL NOSTRO CASO APPLICHIAMO LIAPUNOV CON q^* IL NOSTRO EQUILIBRIO OVVERO SE

$$f(q(t)) = \dot{q}(t) = 2\alpha_k J_k^T(q(t)) \left(r_{des} - k(q(t))\right) \Rightarrow f(q^*(t)) = 0$$

QUINDI LA MIA FUNZIONE SARÀ

$$V(q) = (r_{des} - k(q))^T (r_{des} - k(q)) \Rightarrow$$ COME NOTIAMO È DEF. POS.

CALCOLANDO ORA

$$\left(\frac{dV}{dq}\right)^T = -2 J_k^T(q) (r_{des} - k(q)) \quad \text{JACOBIANO}$$

E ANDANDO A TROVARE L'ESSIANO

$$\frac{d}{dq}\left(\left(\frac{dV}{dq}\right)^T\right) = 2 J_k^T(q) J_k(q) - 2 \frac{d}{dq^2}\left(J_k^T(z)(r_{des} - k(q))\right)\Big|_{z=q}$$

ANCHE L'ESSIANO È DEF. POS. SE LO JACOBIANO NON È SINGOLARE

CALCOLATO IN $z = q$

QUINDI APPLICANDO LIAPUNOV

$$\dot{V} = \frac{dV}{dq} f(q) = \underbrace{-2 (r_{des} - k(q))^T J_k(q)}_{\frac{dV}{dq}} J_k^T(q)(r_{des} - k(q))\alpha$$

ESSENDOCI UNA NORMA AL QUADRATO E α CHE È POSITIVO ALLORA SARÀ SICURO SEMI DEF. NEGATIVA

$$\boxed{\dot{V}(q) = -2\alpha \left\| J_k^T(q)(r_{des} - k(q)) \right\|^2}$$

NOTIAMO PROPRIO CHE $\dot{V}(q) < 0$ FINO A CHE $\rho|J_k(q)| = m$

QUINDI SI HA LA STAB. ASINTOTICA

ORA RICONSIDERIAMO QUESTI CALCOLI NEL CASO DELLO JACOBIANO INVERSO OVVERO

$$\dot{q}(t) = 2\alpha_k J_k^{-1}(q(t))\left(r_{des} - k(q(t))\right)$$

E $$V(q) = \left(r_{des} - k(q)\right)^T \left(r_{des} - k(q)\right)$$

QUINDI

$$\dot{V}(q) = \frac{dV}{dq} f(q) = \underbrace{-2\left(r_{des} - k(q)\right)^T J_k(q)}_{\frac{dV}{dq}} \underbrace{\alpha J_k^{-1}(q)\left(r_{des} - k\right.}_{f(q)}$$

QUINDI

$$\boxed{\dot{V}(q) = -2\alpha \underbrace{\|r_{des} - k(q)\|^2}_{V(q)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{V}(q) = -2\alpha V(q)$$

E CHIAMANDO $\sigma(t) = V(q(t))$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\sigma} = -2\alpha\sigma \Rightarrow \sigma = e^{-2\alpha t}\sigma(0)$$

QUINDI OTTENIAMO CHE

$$V(q(t)) = e^{-2\alpha t} V(q(0))$$

$$\sqrt{V(q(t))} = e^{-\alpha t}\sqrt{V(q(0))}$$

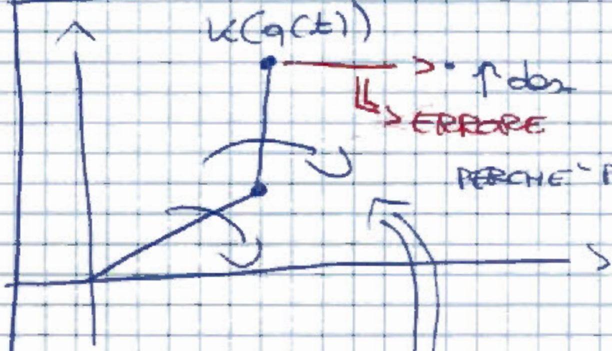
SARÀ PROPRIO LA NORMA

$$\Downarrow$$

$$\|r_{des} - k(q(t))\| \leq e^{-\alpha t} \|r_{des} - K(q(0))\|$$

↳ CONVERGENZA ESPONENZIALE

LA CONVERGENZA DI NEWTON È PIÙ FORTE DEL GRADIENTE PERÒ LO JACOBIANO TRASPOSTO È PIÙ ROBUSTO PERCHÉ QUANDO SONO IN SINGOLARITÀ J_k^{-1} NON POSSO CALCOLARLA MENTRE J_k^T SI PERÒ SE L'ERRORE $p_{des} - k(q(t))$ È NEL NULLO DELLO JACOBIANO ALLORA DEVO FERMARMI



NOTIAMO CHE CON J_k^{-1} SI HA

PERCHÉ PARLO IN CONTINUO

$$\dot q = \alpha J_k^{-1}(q)\underbrace{(p_{des} - k(q))}_{e}$$

$$\dot p = J_k(q)\dot q$$

TRASFORMIAMO LE VELOCITÀ CARTESIANE IN VELOCITÀ DI GIUNTO

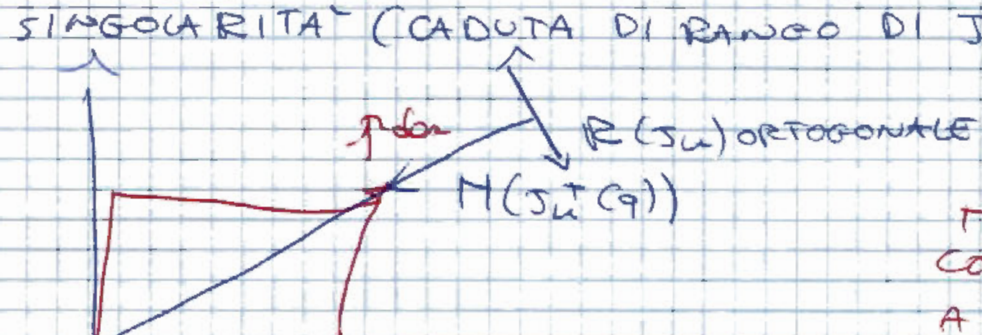
CI DICE IN CHE DIREZIONE CI MUOVIAMO PER ARRIVARE A p_{des}

⇓

GENERATORE DI TRAIETTORIE

QUINDI AVREMMO CHE CI DOBBIAMO FERMARE QUANDO

$p_{des} - k(q(t)) \in N(J_k^T(q))$ E OVVIAMENTE SIAMO IN SINGOLARITÀ (CADUTA DI RANGO DI J_k^T)



NON SO COME ARRIVARE A p_{des}

⇓

OVVERO GOMITO SU O GOMITO GIÙ

DOBBIAMO MUOVERLO UN PO' CON UN ε

⇓

NON POSSIAMO USARLO COME GENERATORE DI TRAIETTORIE

PERO VOLENDO SE LA JACOBIANA E' SINGOLARE E VOGLI USARE J^{-1} INVECE CHE L'INVERSA MI VADO A PRENDE LA PSEUDO INVERSA CON CUI POSSO ANCORA LAVORARE OVVERO

$$\dot{q} = \alpha J_{\kappa}^{+}(q)\left(r_{des} - \kappa(q)\right)$$

OTTIMIZZAZIONE 9/11/2011

PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE => $\min f(x)$ con $x \in S$

⇓ (PUO' ESSERE ANCHE max)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ FUNZ. OB.

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ INSIEME AMMISSIBILE

RISOLVERLO VUOL DIRE DETERMINARE SE ESISTE UN PUNTO $x^* \in S$ TALE CHE

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S$$

PUNTO DI MINIMO GLOBALE

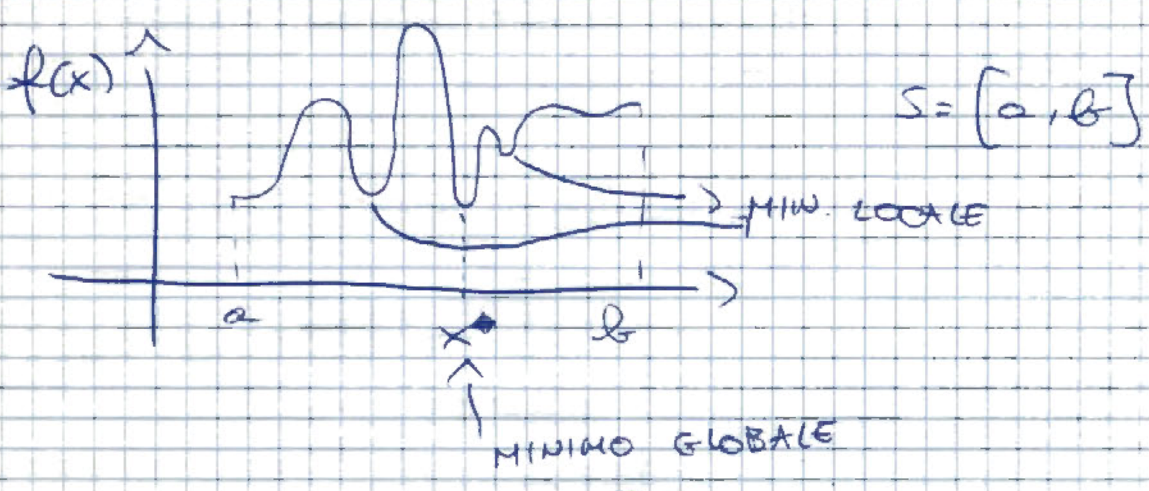
MA BASTEREBBE CALCOLARE $\min -f(x)$

PUNTO DI MINIMO LOCALE $x^* \in S$

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \rho)$$

↳ SFERA DI RAGGIO ρ

ESEMPIO



TEOREMA DI WEIESTRASS C.S. PERCHE' ESISTA ~~[illegible]~~ SOLUZIONE

SE f CONTINUA ED S (CHIUSO E LIMITATO)

⇓

$\min f(x)$ $x \in S$ AMMETTE SOLUZIONE

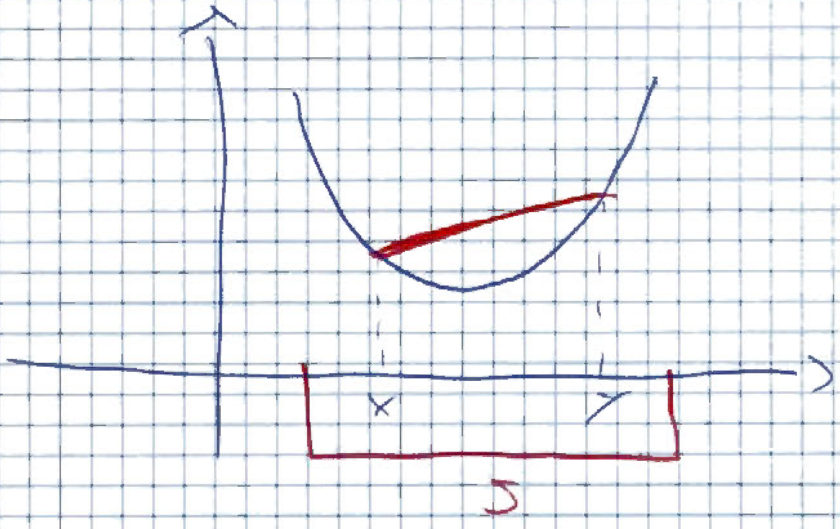
VEDIAMO ORA LE CONDIZIONI AFFINCHE' UN min LOCALE SIA ANCHE GLOBALE

- CONVESSITA' => S SI DICE CONVESSO SE COMUNQUE PRESI DUE PUNTI LA RETTA CHE LI UNISCE FACCIA PARTE SEMPRE DELL'INSIEME

$\forall x, y \in S \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S \quad \forall \lambda \in [0,1]$

- UNA FUNZIONE f SI DICE CONVESSA SE

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



TEOREMA

SIA S CONVESSO E f CONVESSA SU S ALLORA OGNI MINIMO LOCALE E' ANCHE GLOBALE

ESEMPIO CONVESSITA'

$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Rightarrow$ SI LO E'

VETTORE GRADIENTE $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

MATRICE HESSIANA $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

TEOREMA C.N.S. PER VEDERE SE f CONVESSA

f CONVESSA $\Leftrightarrow \nabla^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in S$

LA CONVESSITA' NON CI DICE SE ESISTE O MENO SOLUZIONE PERO' POSSIAMO DIRE CHE

SE f E' STRETTAMENTE CONVESSA E IL PROBLEMA AMMETTE SOLUZIONE => ESSA E' UNICA

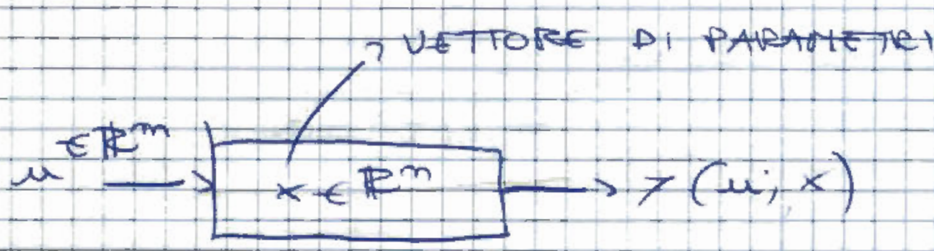
- CONSIDERIAMO IL NOSTRO PROBLEMA $\min f(x)$ CON $x \in S$

SE

$S \subset \mathbb{R}^n$ OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

$S = \mathbb{R}^n$ // NON VINCOLATA

ESEMPIO => OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA



PONIAMO CHE NOI VOGLIAMO

$\Leftarrow y(u^i;x) = \bar{y}^i$

$i = 1, \dots, M$

PER FARLO CERCO DI MINIMIZZARE L'ERRORE

$$E_i(x) = |y(u^i, x) - \bar{y}^i| \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{M} E_i(x)$$

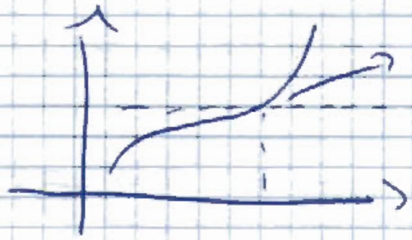
CONCETTO DI DIREZIONE DI DISCESA DI f IN PUNTO $\bar{x}$

$d \in \mathbb{R}^n$

DEF => $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x}) \quad \forall t \in (0, \bar{t}]$

DER DIREZIONALE $\nabla f(\bar{x})^T d$

SE $\nabla f(\bar{x})^T d < 0 \Rightarrow d$ E' DI DISCESA C.S.



CONDIZIONE NON NECESSARIA

$\Downarrow$

SE CONVESSA DIVENTA NECESSARIA

TEOREMA C.N. OTTIMALITÀ

SE $\bar{x}$ È UN MINIMO LOCALE $\Rightarrow \nexists$ UNA DIREZIONE DISCESA

CONSIDERIAMO ORA $\bar{x}: \nabla f(\bar{x}) \neq 0$

DETERMINARE UN PUNTO di DISCESA

$\Downarrow$

$$d = -\nabla f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T d = -\nabla f(\bar{x})^T \nabla f($$

$$= -\|\nabla f(x)\|^2 < 0$$

TEOREMA C.N. PRIMO ORDINE

SE $\bar{x}$ ~~…~~ min LOCALE $\Rightarrow \boxed{\nabla f(\bar{x}) = 0}$

$\Downarrow$

C.N.S. DI MINIMO GLOBA

SE f CONVESSA

TEOREMA C.N. SECONDO ORDINE

SE $\bar{x}$ min LOCALE $\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$

$\nabla^2 f(\bar{x}) \geq 0$

TEOREMA C.S. SECONDO ORDINE

SE $\nabla f(\bar{x}) = 0$ E $\nabla^2 f(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \bar{x}$ min LOCAL ~~GLOBALE~~

CONSIDERIAMO ORA $\min f(x)$ CON $x \in \mathbb{R}^n$ (NON VINCOLA

FUNZIONE COERCIVA

$\forall \{x^n\} \mid \|x^k\| \to \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x^k) = +\infty$

QUINDI SE f COERCIVA $\Rightarrow$ AMMETTE SOLUZIONI $\min f(x)$ CON $x \in \mathbb{R}^n$

ALGORITMI $\min f(x)$ CON $x \in \mathbb{R}^n$

SIA $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) = 0\}$ INSIEME PUNTI STAZIONARI

SCHEMA GENERALE

$\boxed{\text{DATI}}$ $x^0 \in \mathbb{R}^n$

1- $k=0$ CONTATORE ITERAZIONI

2- WHILE $x^k \notin \Delta$

SCEGLI UNA DIREZIONE DI RICERCA d^k

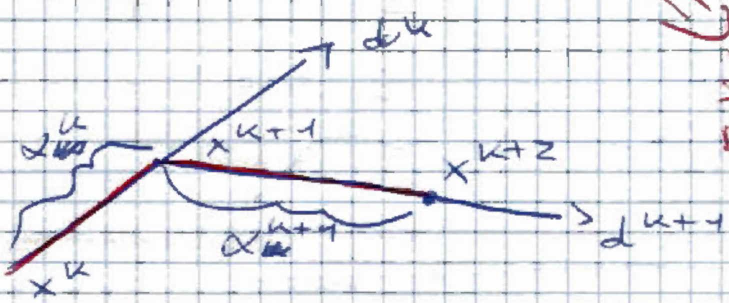
SCEGLI UN PASSO $\alpha^k \in \mathbb{R}$

PONI $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

PONI $k = k+1$

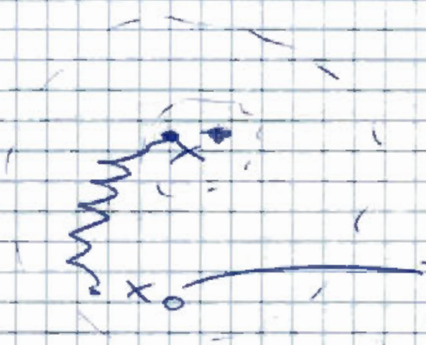
END WHILE

$\Rightarrow$ GENERA UNA SEQUENZA x^k DI PUNTI



- CONVERGENZA LOCALE

SIA $x^* \mid \nabla f(x^*) = 0$



$\Rightarrow$ DEVE ESSERE IN UNA SFERA

$\Downarrow$

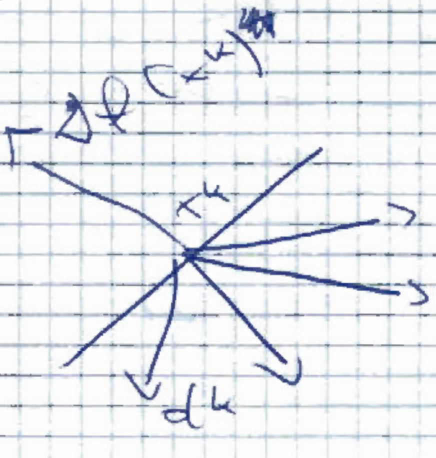
CONVERGERÀ x^0 A x^*

- CONVERGENZA GLOBALE

IL PUNTO INIZIALE PUÒ ESSERE QUALSIASI

ANDIAMO A VEDERE IL REQUISITO DI d^k

1- $d^k : \nabla f(x^k)^T d^k < 0 \Rightarrow$ DEVE ESSERE DI DISCESA



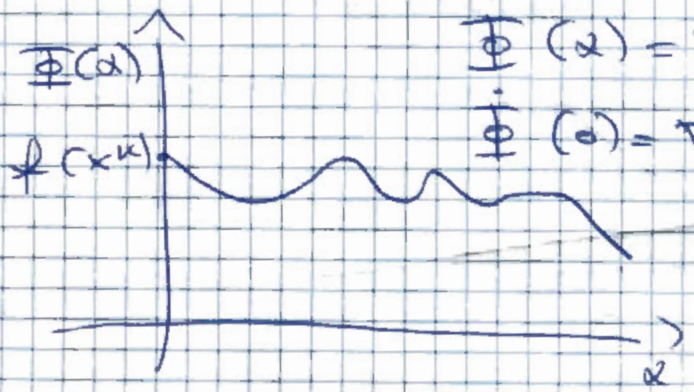
2- d^k NON DEVE DIVENTARE ORTOGONALE A $\nabla f(x^k)^T$

SUPPONIAMO ORA DI AVER DETERMINATO UNA BUONA d^k TROVIAMO α^k

RICERCA UNIDIMENSIONALE

SIANO x^k E d^k ASSEGNATI

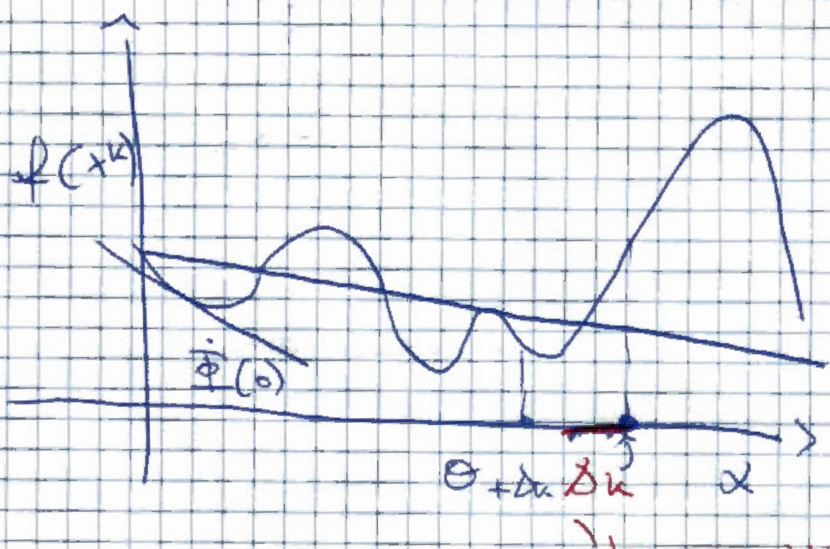
$$f(x^k + \alpha d^k) = \Phi(\alpha)$$



$$\dot{\Phi}(\alpha) = \nabla f(x^k + d^k \alpha)^T d$$

$$\dot{\Phi}(0) = \nabla f(x^k)^T d^k < 0$$

METODO DI ARMIJO



VEDIAMO SE $f(x^k) + \gamma\alpha\nabla f(x^k)^T d^k$ SI TROVA SOPRA O SOTTO $f(x^k + \Delta_k d^k)$ FINO A CHE NON TROVO UNA SOTTO E QUELLO SARÀ IL MIO α^k

QUINDI SE HO UNA BUONA d^k E UN α_k TROVATA CON ARMIJO $\Rightarrow x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

$$\Downarrow$$

$\{x^k\}$ GLOBALMENTE CONVERGENTE

METODI DI OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLAT

- METODI CHE UTILIZZANO $f, \nabla f$
  - METODO DEL GRADIENTE
  - METODI DELLE DIREZIONI CONIUGATE
  - METODI QUASI NEWTON

- METODI CHE UTILIZZANO $f, \nabla f, \nabla^2 f \rightarrow$ METODI TIPO NEWTON

- METODI DI ORDINE SUPERIORE $\rightarrow$ METODO MANES GERMANI

- METODI SENZA DERIVATE f

METODO DEL GRADIENTE

$d_k = -\nabla f(x_k^k)$ ANTIGRADIENTE $\Rightarrow$ RISPETTA ANCHE LA CONDIZIONE D'ANGOLO

$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$

α^k CON ARMIJO

METODO DI NEWTON

CON TAYLOR $m(d) = f(x_k + d) \cong f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_k) d$

MINIMIZZIAMO RISPETTO A d

$$\min_d m(d) \Rightarrow \nabla m(d) = \nabla f(x_k) + \underbrace{\nabla^2 f(x_k)}_{\text{SE DEF. POS}} d$$

$\Downarrow$ CONVESSA $\Leftarrow$ SE DEF. POS

PONENDO

$$\nabla m(d) = 0 \Rightarrow d^* = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

METODI DI NEWTON → FORMA PURE

$$x^{k+1} = x^k + d_k = x_k - [\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)]$$

SE $x^* \mid \nabla f(x^*) = 0$ $\nabla^2 f(x^*) > 0$ → CONV. LOC CON RAPID QUADRAT

METODO DI GAUSS - NEWTON

PROBLEMA DEI MINIMI QUADRATI

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} z_i^2(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} z_i^2(x) \Rightarrow \nabla f(x) = J^T(x)\, z(x)$$

CON $J(x) = \begin{bmatrix} \nabla z_1^T \\ \vdots \\ \nabla z_m^T \end{bmatrix}$

$$\nabla^2 f(x) = J^T(x) J(x) + \sum_{i=1}^{m} z_i^2$$

IN GAUSS-NEWTON SI IGNORA

$$\nabla^2 f(x) \cong J^T(x) J(x)$$

$$x^{k+1} = x^k - [J^T(x)\, J(x)]^{-1} \nabla f(x^k_k)$$

SE I RESIDUI $z(x^*) = 0$

⇓

APPLICO LEVENBERG-MARQUAT ⇐ ~~CONV~~ CONV. LOC.

$$d_k = -[J^T(x_k) J(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \Rightarrow$$ NON SO SE RISPETTA LA CONDIZIONE ANGOLO

QUINDI CON LETTEMBER MARQUAT

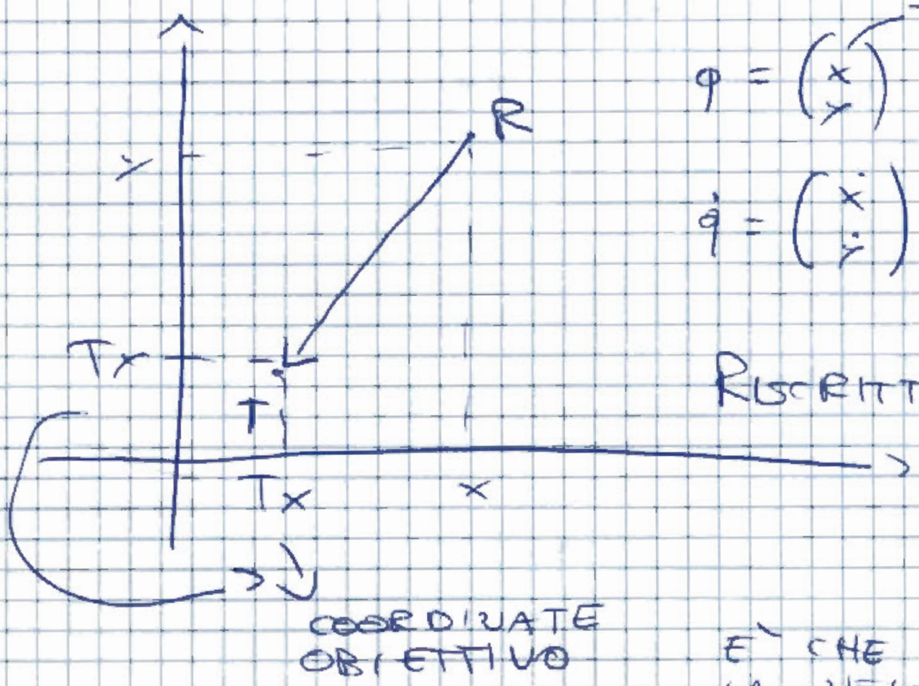
$$\left[J(x_k)^T J(x_k) + \mu_k I\right] \nabla f(x_k) \quad \text{CON } \mu_k > 0$$

APPLICAZIONE IN ROBOTICA DELL'OTTIMIZZAZIONE — 10/11/20

- GENERARE TRAIETTORIE PER ROBOT MOBILI

CASO SENZA OSTACOLI

NEL CREARE TRAIETTORIE SI VA SEMPRE A MINIMIZZ



$q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ → COORDINATE ROBOT

$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

CONSIDERANDO

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} T_x - q_1 \\ T_y - q_2 \end{bmatrix} \alpha$$

RISCRITTO IN FORMA COMPA

$$\boxed{\dot{q} = \alpha [T - q]}$$

⇓

L'UNICO PROBLE È CHE α CI PROPORZIONA LA VELOCITÀ ALLA DISTA

⇓

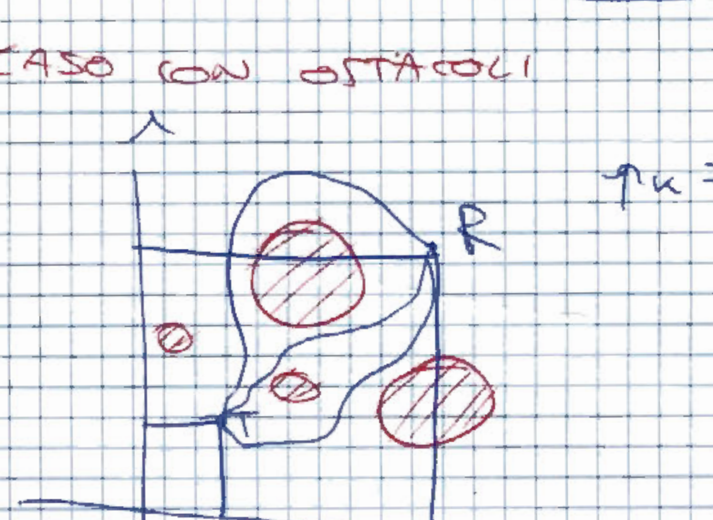
PIÙ È LONTANO E PIÙ VA VELOCE

⇓

SATURIAMO CON

$$\boxed{\dot{q} = \frac{T - q}{\|T - q\|} \alpha}$$

CASO CON OSTACOLI



$q_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ $k = 1, \ldots, m$

COORDINATE OSTACOLI

CONSIDERANDO IL MIO $\dot{q}$ COME UNA FORZA ATTRATTIVA CONSIDERO

→ IL SUO ~~POT~~ POTENZIALE FISICO ATTRATTIVO

$$U = \frac{1}{2} \alpha (\|T - q\|)^2 \Rightarrow \frac{dU}{dq} = -\alpha(T$$

CONSIDERO GLI OSTACOLI INVECE COME REPULSIVI ⇐

$$V(q)=\frac{1}{2}\alpha\|T-q\|^2+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\|q-r_k\|^2}$$

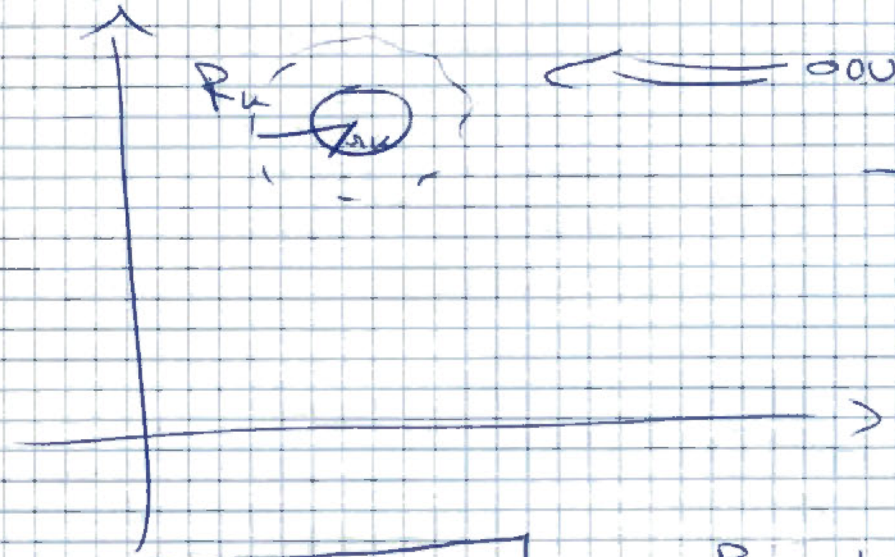
FINO AD ORA ABBIAMO MODELLATO COME SE GLI OSTACOLI FOSSERO PUNTI FERMI

$\Downarrow$

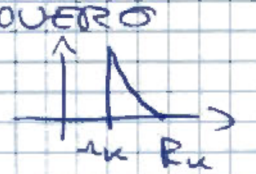
ORA LI CONSIDERIAMO COME CIRCONFERENZE => IL POTENZIALE SULLE CIRCONFERENZE LE CONSID. COSI' NON CI SBATTE

IN PRATICA SI HANNO DUE GRADIENTI

- UNO REPULSIVO E UNO ATTRATTIVO



OVVERO



CONSIDERO $\boxed{d_k=\|q-r_k\|}$ => $\dfrac{R_k-d_k}{d_k-r_k}=\tilde{V}_k(q)$

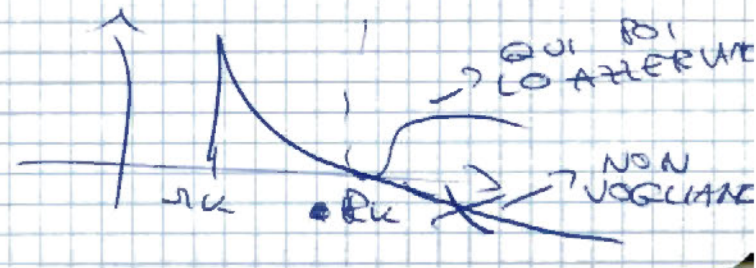
$$V_k(q)=\begin{cases}0 & \|q_k-r_k\|>R_k\\ \tilde{V}_k(q) & \|q_k-r_k\|<R_k\end{cases}$$

QUINDI

$$U_{TOT}(q)=\frac{1}{2}\alpha\|T-q\|^2+\sum_{k=1}^{m}V_k(q)$$

CONVIENE PERO' CONSIDERARE

$\tilde{V}_k(q)=\left(\dfrac{R_k-d_k}{d_k-r_k}\right)^2$ => POICHE' RISCHIAMO



GENERAZIONE DI TRAIETTORIE SENZA OSTACOLI

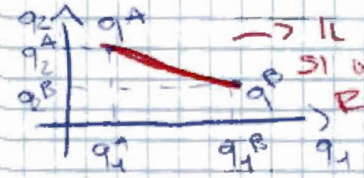
15/11/201

IL ROBOT SI MUOVE PER PUNTI INFATTI I COMANDI VENGONO DATI CON

Move to P001 → HO MOSSO IL ROBOT IN QUESTO PUNTO E QUINDI SALVO LA POSIZIONE IN CUI DEVE ~~[illegible]~~ ARRIVARE OVVERO PROPRIO QUESTO PUNTO

IL SALVATAGGIO PUO' ESSERE O ATTRAVERSO VAR. DI GIUNTO OPPURE POSIZIONE CARTESIANA ⇐

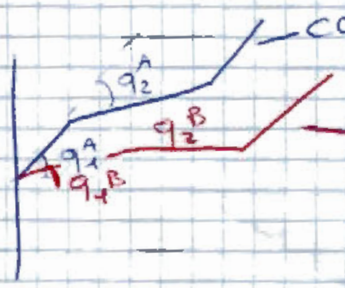
⇒ INFATTI SI SCRIVE DI SOLITO NON COME SOPRA MA



→ IL ROBOT SI MUOVE RETTILINEO

Move linear to P001
Joint

IMMAGINIAMO



⇒ I GIUNTI q_1^A, q_2^A DOVRANNO DIVENTARE q_1^B, q_2^B

- TRAIETTORIA RETTILINEA SUI GIUNTI

$$\boxed{q(\lambda) = q^A + \lambda(q^B - q^A)}$$

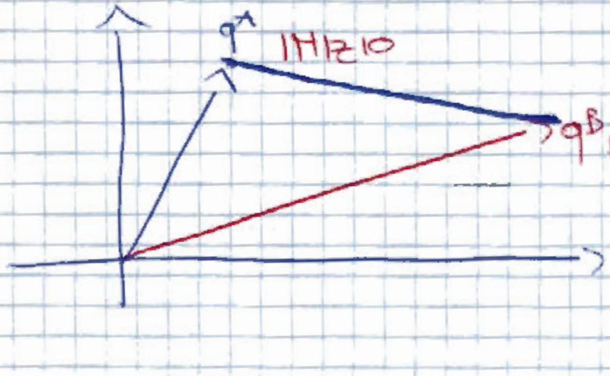
EQ. PAR. DI UN SEGMENTO

DOVE PER

$\lambda = 0 \Rightarrow q(0) = q^A$

$\lambda = 1 \Rightarrow q(1) = q^B$

$\lambda \in (0,1)$

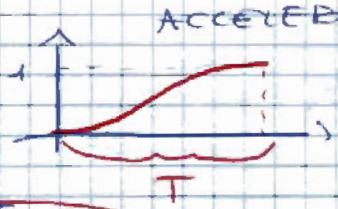


IN QUESTO CASO SIAMO IN UNA COMBINAZIONE CONVESSA OVVERO ESSE UNA COMBINAZIONE LINEA SI HA CHE

$\alpha q^A + \beta q^B$ SE $\alpha + \beta = 1$ $\alpha \geq 0$
⇓
CONVES

ORA DAL PERCORSO GEOMETRICO DOBBIAMO TROVARE COME PERCORRERLA OVVERO CERCHIAMO $s(t)$ => OVVERO VELOCITÀ E ACCELERAZIONI.

SI DEVE AVERE $\dot{s}(t) \geq 0$



⇓

CI PIANIFICO LA VELOCITÀ E ACC.

QUINDI DERIVANDO OVVERO CERCANDO VEL. E ACC. SI HA CHE

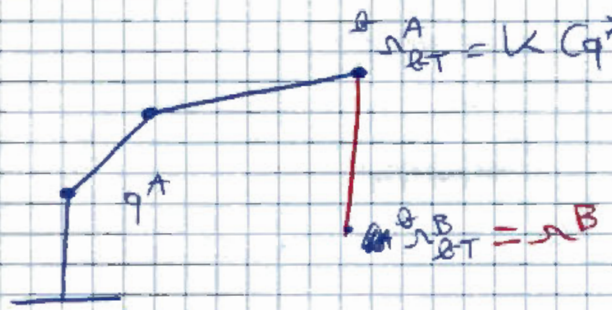
$\dot{q}(s) = \dot{s}(q^B - q^A)$ $\quad \ddot{q} = \ddot{s}(q^B - q^A)$ => DOPO QUESTO STUDIO AVREMO $q(s(t))$ => QUESTO ANDRÀ IN PASTO AL CONTROLLORE

MA TORNANDO ALLA TRAIETTORIA GEOMETRICA CHE CI SERVE PER TROVARE IL PERCORSO CHE FA OVVERO ORA CERCHIAMO L'ALTRA RAPPR. GEOMETRICA

- TRAIETTORIA RETTILINEA SULLO SPAZIO CARTESIANO

IN QUESTO CASO NON ABBIAMO UNA FUNZIONE ANALITICA $q(s)$ MA AVRÒ UN INSIEME DI PUNTI CHE DESCR. LE TRAIETTORIE CI SONO PIÙ CASI

1- NON CONSIDERO GLI ORIENTAMENTI $(m=3)$



POTREI RISOLVERE LA CIN. INV. ~~...~~ E POI ANDARE IN COORD. GIUNTO

⇓

NON MI CONVIENE

$$r(s) = r^A + s(r^B - r^A)$$

DOVE PER

$s = 0 \Rightarrow r(0) = r^A$

$s = 1 \Rightarrow r(1) = r^B$

LA NOSTRA VELOCITÀ SARÀ

$\frac{dr}{ds} = r^B - r^A$ => VETTORE GEOM. VELOCITÀ

E RICORDANDO

$\dot{r} = \frac{dr}{ds}\dot{s} = \underbrace{\dot{s}\,(r^B - r^A)}$ -> LA VELOCITÀ È PESATA DA $\dot{s}$

IO CERCO QUINDI

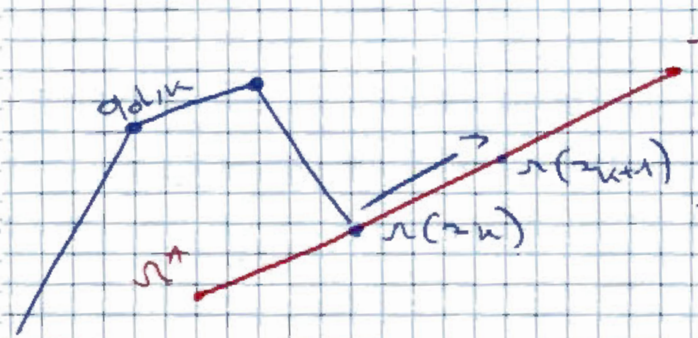
$$q_d(s) = k^{-1}(r(s))$$

MA DOVENDO POI DISCRETIZZARE NON VADO A CERCARE q_d PER TUTTI GLI ISTANTI s MA CERCHIAMO SOLO GLI s_k

CAMPIONATI (OVVERO QUELLO CHE CI VIENE FUORI DA
IL CAMPIONAMENTO DI $q_d(s)$) QUINDI CERCHIAMO

$$q_d(s_k) = q_{d,k} \qquad \text{DOVE } s_k = s(t_k) \quad k=0,\dots$$

RIDISEGNAMO



NOI VOGLIAMO ASSOCIARE

$p(s_k) \Rightarrow q_{d,k}$
LO CONOSCIAMO

$$p(s_k) = p^A + s_k(p^B - p^A)$$

QUINDI POSSO SCRIVERE CON TAYLOR

$$p(s) \cong p(s_k) + \left.\frac{dp}{ds}\right|_{s_k}(s_{k+1} - s_k)$$

MA SCRIVIAMO COSÌ

$$p(s) = K(q_{d,k}) + \left.\frac{dK}{dq}\right|_{q_{d,k}}(q - q_{d,k}) = p_{k+1} \Rightarrow$$

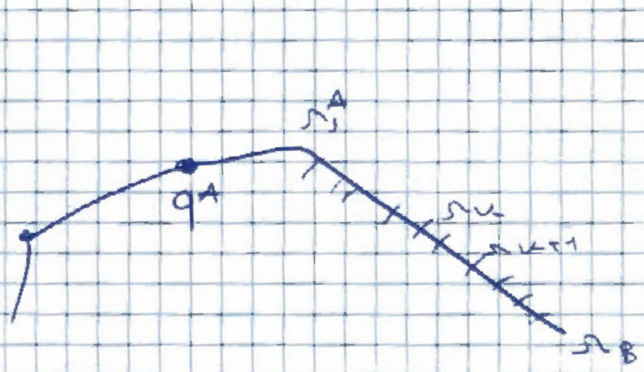
SE QUESTA È GIUSTA BASTA PORRE
$K(q_{d,k+1}) = K(q$

QUINDI IL NOSTRO PROBLEMA È DATO q^A ARRIVARE A p^B OVVERO CALCOLO

$$p^A = K(q^A) \Rightarrow p(s) = p^A + s(p^B - p^A)$$

CONOSCO $t_k \Rightarrow s_k \quad s_0 = 0 \quad s_n = 1 \quad k = 0, \dots n$
QUINDI

$p_k = p(s_k)$



DOBBIAMO TROVARE $q_{d,k}$

$p_k = K(q_{d,k})$ SAPENDO ANCHE CHE $q_{d,0} = q^A$

MA RICORDANDO CHE

$$\underbrace{k(q_{d,k})}_{r_k} + \left.\frac{dk}{dq}\right|_{q_{d,k}} (q - q_{d,k}) = r_{k+1}$$

IO VOGLIO RISOLVERE $r_{k+1} = k(q)$ E LA SUA SOLUZIONE SARÀ $q_{d,k+1}$ MA INVECE DI RISOLVERE QUESTA SOPRA

$$\tilde{q} = q_{d,k} + \overbrace{\left(\frac{dk}{dq}\right)^{-1}_{q_{d,k}}}^{J^{-1}(q_{d,k})} \left(r_{k+1} - k(q_{d,k})\right) \Rightarrow \text{È DOVE ARRIVA IL ROBOT}$$

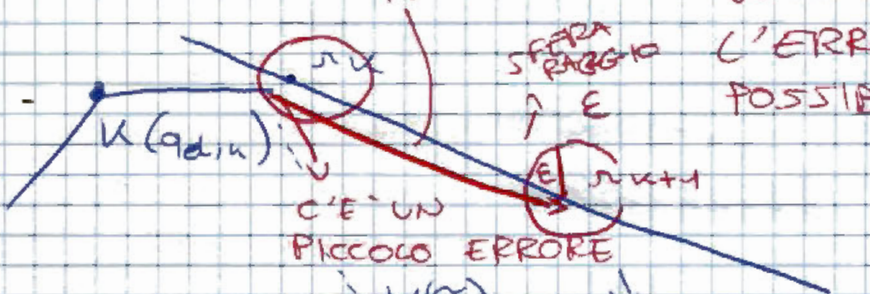
VORREI FOSSE r_{k+1} MA NON È COSÌ

È UN APPROSSIMAZIONE

QUINDI

RICONSIDERIAMO UN IMMAGINE INGRANDITA

QUESTO VETTORE È $r_{k+1} - k(q_{d,k})$



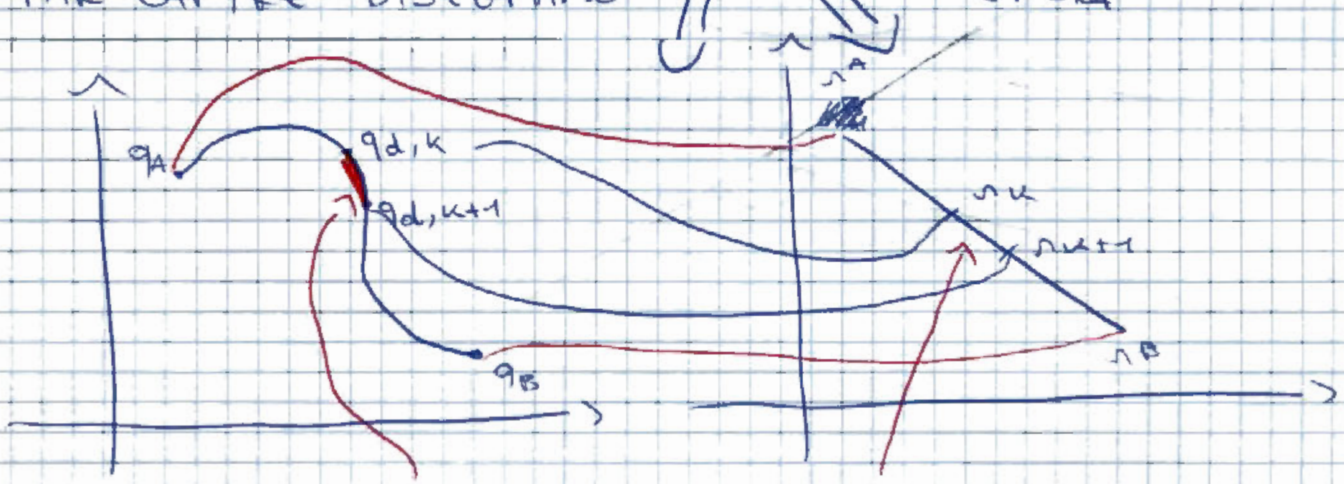
VORREMMO CHE FOSSE ZERO L'ERRORE MA NON È POSSIBILE

CI BASTEREBBE

$$\| r_k - k(q_{d,k}) \| < \varepsilon \text{ PICCOLO}$$

$\cdot k(\tilde{q}) \to$ REITERO FINO FINO A CHE L'ERRORE NON ENTRA IN $\varepsilon \Rightarrow$ CIOÈ NELLA SFERA

PER FAR CAPIRE DISEGNAMO



$J^{-1}(q_{d,k})(r_{k+1} - k(q_{d,k}))$ È IL MIO PASSO

ARRIVERÒ PERÒ AD UNA $k(\tilde{q})$ CHE NON SARÀ $q_{d,k+1}$ DESIDERATO

- DEVO REITERARE IL CALCOLO DANDO STA VOLTA

$$\tilde{q} = \tilde{q} + J^{-1}(\tilde{q})(r_{k+1} - k(\tilde{q}))$$

IN PRATICA STIAMO APPLICANDO NEWTON

$\Downarrow$

REITERIAMO FINO A QUANDO L'ERRORE NON SARÀ

$$\|r_{k+1}-K(\tilde{q})\|<\varepsilon$$

↳ PICCOLO

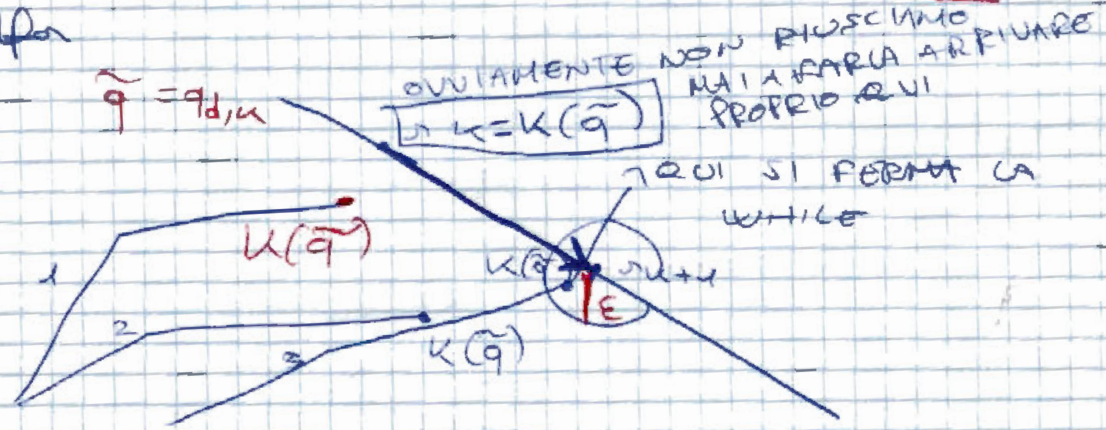
CONSIDERIAMO QUINDI

$k=0 \quad q_{d,k}=q^A \quad t_k \Rightarrow r_k \quad r(t), t_k$

CONSIDERIAMO r_k DATA E SCRIVO L'ALGORITMO

```
for k=0:N-1
    q~ = q_{d,k}      r_{k+1} = r(r_{k+1}) = r^A + r_{k+1}(r^B - r^A)
    while ||r_{k+1} - K(q~)|| > ε
        q~ = q~ + J^{-1}(q~) (r_{k+1} - K(q~))
    endwhile
    q_{d,k+1} = q~
endfor
```

QUESTO È TUTTO QU CHE DEVE FARE PER ARRIVARE r_{k+1}



IN FORMA PIÙ EFFICENTE

```
for k=0:N-1
    q~ = q_{d,k}      r_{k+1} = r(r_{k+1})
    d_k = r_{k+1} - K(q~)
        if ||d_k|| < ε    ESCI
        else
        d~_k = solve (J(q~) d~_k = d_k)
                                          q~ = q~ + d~_k
                                          endif
```

2 - CONSIDERO GLI ORIENTAMENTI

CONSIDERIAMO

$$q^A \rightarrow k(q^A) = \begin{bmatrix} r^A \\ \hline \Theta^A \end{bmatrix} \quad \text{E CHIAMANDO } p^B = \begin{bmatrix} r^B \\ \hline \Theta^B \end{bmatrix}$$

$\Theta^A \rightarrow$ ORIENTAMENTO

QUINDI

$$p(s) = p^A + s(p^B - p^A)$$

NEL CASO CONSIDERASSI GLI ORIENTAMENTI SOLTANTO

$$\Theta(s) = \Theta^A + s(\Theta^B - \Theta^A) \Rightarrow$$ ANDREBBE BENE PERO' NON SO COME CI ARRIVA

↓

POTREBBE FARE UNO STRANO PERCORSO

PERO' GARANTISCE L'ORIENTAMENTO

QUINDI L'ALGORITMO SARA'

for $k = 0 : N-1$

$$\bar{q} = q_{d,k} \quad p_{k+1} = p(s_{k+1}) = p^A + s_{k+1}(p^B - p^A)$$

while $\left[(\| r_{k+1} - k_r(\bar{q}) \|) > \varepsilon_r \right]$ OR $\left[(\| \Theta_{k+1} - k_R(\bar{q}) \|) > \varepsilon_R \right]$

$$\bar{q} = \bar{q} + J_k^{-1}(\bar{q}) \underbrace{(p_{k+1} - k(\bar{q}))}_{d_k}$$

$J_k \rightarrow$ ALGEBRICO

end while

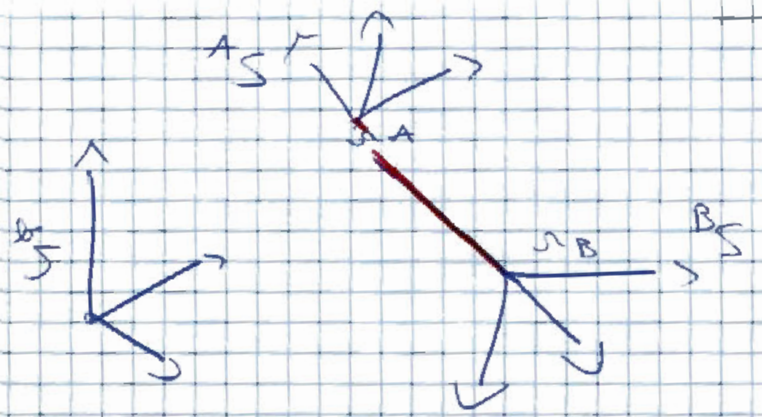
$q_{d,k+1} = \bar{q}$

end for

MA CERCHIAMO DI FARE CIO' CHE ABBIAMO FATTO PER r AGLI ORIENTAMENTI Θ

SAPPIAMO CHE PRIMA NELLO SPAZIO DELLE SOLE POSIZIONI ERA COSTANTE IL VERSO DELLA VELOCITA'

- STA VOLTA CONSIDERIAMO LA VELOCITA' ANGOLARE



OVVERO CERCHIAMO UNA RELAZIONE CHE CI P...
DATA $^{b}R_T^{A}$, E LA POS. $^{b}r_{BT}^{A}$ AD ARRIVARE A $^{b}R_T^{B}$ E
POS. DI ARRIVO $^{b}r_{BT}^{B}$

- LI CHIAMO $^{b}R_A$, $^{b}r^{A}$ => $^{b}R_B$ $^{b}r^{B}$

CON GLI ASSI E GLI ANGOLI DI EULERO GIRO ^{A}S IN ^{B}...
OVVERO TROVO COME GIRARLO (ORIEN...

QUINDI PER TROVARMI $R(\tau)$
DEVO CONOSCERE COME A VA IN
B OVVERO

CON
$R(0) = {^{b}R_A}$

$R(1) = {^{b}R_B}$

$^{A}R_B = {^{A}R_b}\,{^{b}R_B} = {^{b}R_A^{T}}\,{^{b}R_B}$

$\dot{R}R^{T} = [\omega\times]$

$\Downarrow$

$\frac{dR}{d\tau}R^{T} = [\overline{\omega}\times]$

QUESTA MATRICE APPLICANDO
RODRIGUEZ PUO' RESTITUIRCI
LA POS. E L'ANGOLO
VISTI DA A QUINDI

$^{A}n_{AB}$ $^{A}\varphi_{AB}$

RODRIGUEZ

$\boxed{\mathcal{R}(n,\varphi) = nn^{T} + (I_3 - \dots \\ [n\times \dots}$

QUINDI SCRIVO $R(\tau)$

$$^{A}R(\tau) = \mathcal{R}(^{A}n_{AB}\ \ \varphi_{AB}\ \tau)$$

$$^{A}R(0) = I \qquad ^{A}R(1) = {^{A}R_B}$$

PERO' A NOI INTERESSA TORNARE ALLA BASE b

$$^{b}R(\tau) = {^{b}R_A}\,{^{A}R(\tau)} = {^{b}R_A}\,\mathcal{R}(^{A}n_{AB}\ \ \varphi_{AB}\ \tau)$$

VEDENDO CHE LA MIA ${}^{b}R(\lambda)$ MI RISPETTA LE PROPRIETÀ

$$\frac{dR}{d\lambda} R^T(\lambda) = [\bar{\omega} \times] = [{}^{b}m_{AB} \times] \rho_{AB}$$

QUINDI COME PRIMA $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ CI DAVA LA DIREZIONE ORA C'È LA DA

$$\boxed{\rho_{AB}\, {}^{b}m_{AB}}$$

PER DIMOSTRARE UNA COSA CI SERVE

PROPRIETÀ

$$[m\times]^2 = \begin{bmatrix} 0 & -m_z & m_y \\ m_z & 0 & -m_x \\ -m_y & m_x & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -(m_z^2+m_y^2) & m_x m_y & m_x m_z \\ m_x m_y & -(m_x^2+m_z^2) & m_y m_z \\ m_x m_z & m_y m_z & -(m_y^2+m_x^2) \end{bmatrix} \qquad m m^T = \begin{bmatrix} m_x^2 & m_x m_y & m_x m_z \\ m_x m_y & m_y^2 & m_y m_z \\ m_x m_z & m_y m_z & m_z^2 \end{bmatrix}$$

NOTO ESSERE UGUALE AD

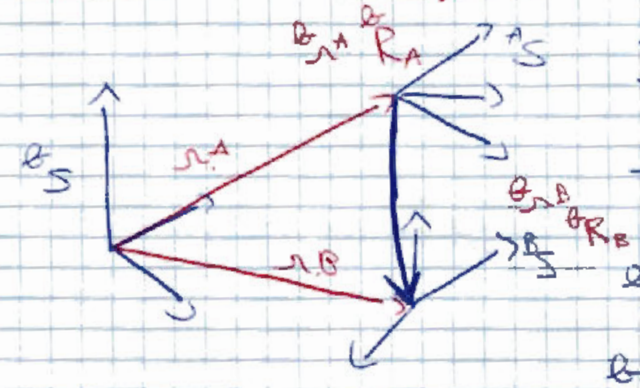
$$m^T m = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$$

$$[m\times]^2 = m m^T - m^T m I$$

ORA QUINDI POSSIAMO DIMOSTRIAMO CHE

$$\frac{dR(m, \rho\lambda)}{d\lambda} R^T(m, \rho\lambda) = [m\times]\rho$$

RICONSIDERIAMO   16/11/2…



SAPPIAMO CHE

$$\frac{d\,{}^b r}{ds} = r^B - r^A \qquad \frac{d\,{}^bR}{ds}{}^bR^T = [{}^b n_{A} \ldots$$

$${}^b r(s) = r^A + s(r^B - r^A) \quad s \in [0,1]$$

$${}^bR(s) = {}^bR_A \, \mathbb{R}({}^A n_{AB}, \theta_{AB}\, s)$$

DOVE

$$({}^A n_{AB}, \theta_{AB}) = \text{asseangolo}({}^bR_A^T \, {}^bR_B)$$

VERIFICANDO $\frac{d\,{}^bR}{ds}{}^bR^T$ SI HA CHE PER RODRIGUEZ

$$R = \underbrace{nn^T}_{\downarrow} + \underbrace{(I - nn^T)}_{\text{PROIETTORE ORTOGONALE DI } n}\cos s\theta + [n\times]\sin s\theta$$

PROIEZIONE DI r LUNGO n OVVERO $\Rightarrow nn^T r$

INIZIAMO CON

$$\frac{dR}{ds} = -(I - nn^T)\sin(s\theta)\cdot\theta + [n\times]\cos(s\theta)\cdot\theta$$

MOLTIPLICANDO ORA PER R^T

$$R^T = nn^T + (I - nn^T)\cos(s\theta) - [n\times]\sin(s\theta)$$

$$\frac{dR}{ds} = -(I - nn^T)\sin(s\theta)\cos(s\theta)\,\theta + [n\times]\sin^2(s\theta)\cdot\theta\, +$$

$$+ [n\times]\cos^2(s\theta)\,\theta - [n\times]^2\cos(s\theta)\sin(s\theta)\,\theta$$

$$\frac{dR}{ds}R^T = [n\times]\,\theta\underbrace{(\cos^2 s\theta + \sin^2 s\theta)}_{=1} - \sin\theta\cos\theta\,(\theta)\underbrace{[I - nn^T + [n\times]^2]}_{=0}$$

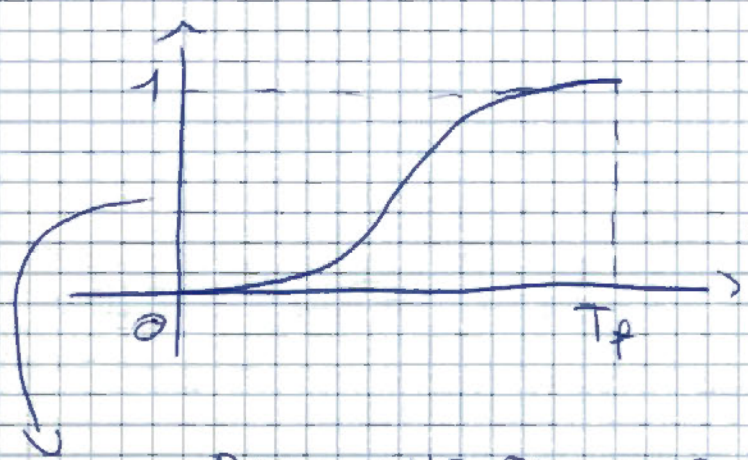
$$= [n\times]\,\theta$$

VEDIAMO ORA TROVARE IN FORMA CARTESIANA IL PERCORSO DI NOSTRO INTERESSE (TROVIAMO I GIUNTI)

COMINCIAMO CON LA LEGGE DI MOTO $s(t)$

$s(t) \to t_k \Rightarrow s_k = s(t_k)$ CON ${}^b r_{s_k} = {}^b r_s(s_k)$

${}^b R_k = {}^b R(s_k)$ $\quad k = 0 \dots N$

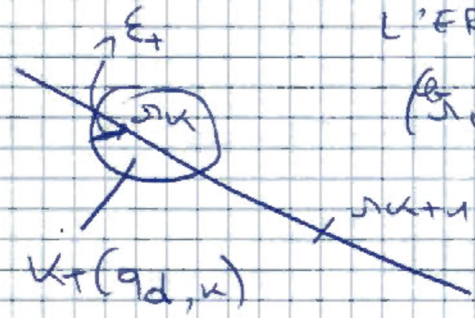


$\Rightarrow N = \frac{T_f}{t_k}$ → TEMPO TOTALE

↳ CAMPIONAMENTO

VUOL DIRE CHE FA TUTTO IL PERCORSO

ANALIZZIAMO ORA LA TRASLAZIONE



L'ERRORE E' DATO DA

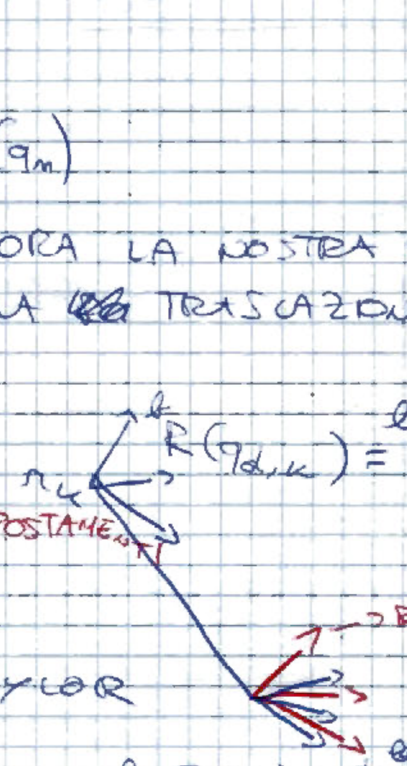
$({}^b r_{k+1} - K_T(q_{d,k}))$

CHIAMANDO ORA LA CONFIGURAZIONE ANGOLARE $q_{d,k}$ AVREMO CHE

$${}^bR(q_{d,k}) = {}^bR_0\, {}^0R_1(q_1) \cdots {}^{n-1}R_n(q_n)$$

PER VEDERE COME DIFFERISCE ORA LA NOSTRA ROTAZIONE OVVERO COME FATTO PRIMA PER LA TRASLAZIONE SI HA CHE

$${}^bR^T(q_{d,k})\, {}^bR_{k+1}$$



RICORDANDO CHE PER PICCOLI SPOSTAMENTI

$${}^bR^T(s_k)\, {}^bR(s_k + \tilde{s}) =$$

INCREMENTO

TAYLOR

SAPENDO $n_{AB} = \tilde{n}_{AB}$

$(\phi_{AB}\ \tilde{n}_{AB}$

$$= {}^bR^T(s_k)\left[{}^bR(s_k) + \frac{d\,{}^bR}{ds}\Big|\ \tilde{s}\right] = I_3 + {}^bR^T(s_k)\, \frac{d\,{}^bR}{ds}\Big|_{s_k} \tilde{s} = I_3 + [\tilde{\phi}_{AB}]_\times$$

~~RICORDANDO QUESTA~~

PONENDO $\tilde{s} = s_{k+1} - s_k$

$\Downarrow$

$${}^{b}R^{T}(s_k)\,{}^{b}R(s_k+\tilde{s}) = {}^{b}R^{T}_{s_k}\,{}^{b}R(s_{k+1}) = I_3 + [\,{}^{k}n_{AB}\times\,]\,f_{AB}$$

QUESTO VUOL DIRE APPLICARE UNA VELOCITA' DEL TIPO

$$\underbrace{\omega = n_{AB}}_{\text{DIREZIONE}}\frac{s_{k+1}-s_k}{t_{k+1}-t_k} \Rightarrow$$ IN OGNI INTERVALLO DI TEMPO FACCIO UNA PICCOLA ROTAZIONE

RICORDANDO ORA LO JACOBIANO GEOMETRICO OU

$$J_R(q)\,\dot{q}\,dt = {}^{b}\omega\,dt \qquad t_{k+1} - t_k = dt$$

$$\boxed{J_R(q_k)\,(q_{k+1}-q_k) = {}^{b}n_{AB}\,(s_{k+1}-s_k)\,f_{AB}}$$

QUINDI SIAMO ARRIVATI A DIRE CHE

$J_T(q_k)(q_{k+1}-q_k) = r_{k+1} - r_k$ TRASLAZIONE

$J_R(q_k)(q_{k+1}-q_k) = {}^{b}n_{AB}\,(s_{k+1}-s_k)\,f_{AB}$ ROTAZ

DA QUESTI CERCHIAMO QUINDI LA SEQUENZA q_k

CONSIDERIAMO POSIZIONI ED ORIENTAMENTI

$${}^{b}r_k,\ {}^{b}R_k \Rightarrow {}^{b}r_{k+1} - {}^{b}r_k = (r^B - r^A)(s_{k+1}-s_k)$$

$${}^{b}R_k^{T}\,{}^{b}R_{k+1} = R\left({}^{A}n_{AB},\ f_{AB}(s_{k+1}-s_k)\right)$$

DA QUESTA CONSIDERIAMO

${}^{A}n_{AB}\, \rho_{AB}(x_{k+1} - x_k) = \text{arcangolo } 2\left({}^{b}R_k^T\, {}^{b}R_{k+1}\right)$

PER APPLICARLO DOBBIAMO TRADURRE TUTTO NELLE COORD. DI ~~B~~ b

$$J_R(q_k)(q_{k+1} - q_k) = {}^{b}R_A\left({}^{A}n_{AB}\, \rho_{AB}(x_{k+1} - x_k)\right)$$

QUINDI POTREI TROVARE q_{k+1} OVVERO DALLO JACOBIANO TOTALE

$$J(q_k)(q_{k+1} - q_k) = \begin{cases} J_T(q_k)(q_{k+1} - q_k) \\ J_R(q_k)(q_{k+1} - q_k) \end{cases} \quad {}^{b}x_{k+1} - K(q_{d,k})$$

SPOSTAMENTO

$$q_{k+1} \cancel{-q_k} - q_k = J^{-1}(q_k) \begin{bmatrix} ({}^{b}x^{B} - {}^{b}x^{A})(x_{k+1} - x_k) \\ {}^{b}n_{AB}\, \rho_{AB}(x_{k+1} - x_k) \end{bmatrix}$$

DA QUI RICAVO q_{k+1} PORTANDO q_k DI LA

ANGOLO DI ROTAZIONE

ANDIAMO A VEDERE COME FACCIAMO PER L'ERRORE DI ROTAZIONE OVVERO COME FATTO IERI PER QUELLO DI TRASLAZIONE (NON ARRIVIAMO ALLA ROTAZIONE PERFETTA MA AD UN TOT) => COME IERI CHE POTEVA STARE DENTRO UN ε

CHIAMANDO QUINDI ASSEANG2 $({}^{b}R_k^T\, {}^{b}R_{k+1}) = \tilde{\rho}\,({}^{b}R_k^T\, {}^{b}R_{k+1})$ ED APPLICHIAMOLA AD

$${}^{k}\tilde{\rho}\left(\underbrace{{}^{b}R^T(q_{d,k})}_{\text{DOVE SONO ARRIVATO IN EFFETI}}\ \underbrace{{}^{b}R_{k+1}}_{\text{DOVE VOGLIO ARRIVARE}}\right)$$

QUINDI

$${}^{b}R(q_{d,k})\, \tilde{\rho}\left({}^{b}R^T(q_k)\, {}^{b}R_{k+1}\right)$$

ε_T mm $\qquad \varepsilon_R$ rad

CERCHIAMO

NOI VORREMMO FOSSE ZERO

$$q_k \quad \| {}^b r_{k+1} - k_T(q_{d,k}) \| < \varepsilon_T$$

$$\| \tilde{p}\left({}^bR^T(q_{d,k})\, {}^bR_{k+1}\right) \| < \varepsilon_R$$

VORREMMO FOSSE ZERO

QUINDI PARTIAMO DA

$$q_0 = q^A \qquad k = 0$$

$$\tilde{q} = q_k$$

$$\tilde{\eta}_T = r_{k+1} - k(\tilde{q})$$

$$\tilde{\eta}_R = \tilde{p}\left({}^bR^T(\tilde{q})\, {}^bR_{k+1}\right)$$

GLI ERRORI

QUINDI

while $(\| \tilde{\eta}_T \| > \varepsilon_T)$ OR $(\| \tilde{\eta}_R \| > \varepsilon_R)$

$$\tilde{q} = \tilde{q} + J^{-1}(\tilde{q}) \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_T \\ {}^bR(\tilde{q})\,\tilde{\eta}_R \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\eta}_T = r_{k+1} - k(\tilde{q})$$

$$\tilde{\eta}_R = \tilde{p}\left({}^bR^T(\tilde{q})\, {}^bR_{k+1}\right)$$

end

$$q(k+1) = \tilde{q}$$

DOBBIAMO ORA ARRIVARE ALLA 12/11/2011

$s(t)$

RICORDANDO CHE

$$q_d(s) = q^A + s(q^B - q^A) \quad s \in [0;1]$$

ABBIAMO LA VELOCITA'

$$q_d(t) = q_d(s(t)) \Rightarrow \dot{q}_d(t) = \frac{dq_d}{ds}\dot{s} = \dot{s}(t)(q^B - q^A)$$

$$\ddot{q}_d(t) = \ddot{s}(t)(q^B - q^A)$$

CI SONO DEI VINCOLI PERO'

$$q_{v,i} \geq |\dot{q}_{d,i}(t)| \qquad q_{a,i} \geq |\ddot{q}_{d,i}(t)| \qquad \forall t \in [0;T]$$

VINCOLO VELOCITA' VINCOLO ACCELERAZIONE $i = 1, \ldots n$

ALLORA SI HA CHE ⇒ VELOCITA'

LA VELOCITA' NON DEVE SUPERARE IL VINCOLO

$$|\dot{q}_{d,i}(t)| = |\dot{s}(t)||q_i^B - q_i^A| \leq q_{v,i} \Rightarrow |\dot{s}(t)| \leq \frac{q_{v,i}}{|q_i^B - q_i^A|} \quad i = 1, \ldots n$$

PERO' ~~CONSIDERIAMO~~ QUINDI

$$S_v = \min_{i=1,\ldots n} \frac{q_{v,i}}{|q_i^B - q_i^A|} \Rightarrow |\dot{s}(t)| \leq S_v \leq \frac{q_{v,i}}{|q_i^B - q_i^A|} \quad \forall i = 1, \ldots n$$

SPAZIO CHE DEVE PERCORRERE IL GIUNTO i

MENTRE PER L'ACCELERAZIONE

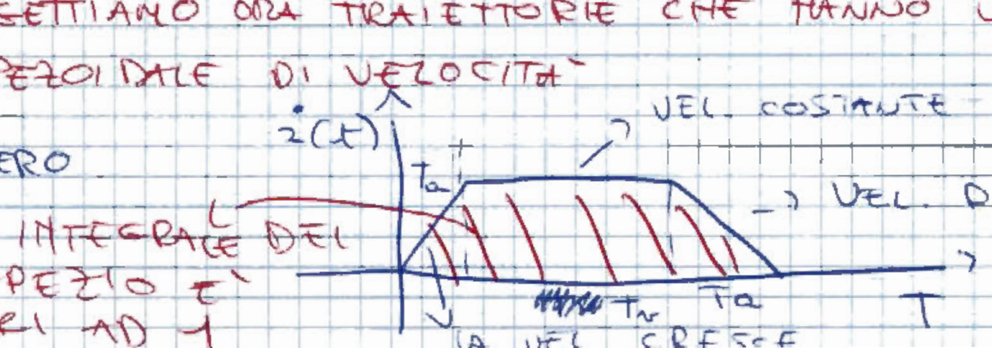
$$|\ddot{q}_{d,i}| = |\ddot{s}(t)||q_i^B - q_i^A| \leq q_{a,i} \Rightarrow |\ddot{s}(t)| \leq \frac{q_{a,i}}{|q_i^B - q_i^A|} \quad i = 1, \ldots n$$

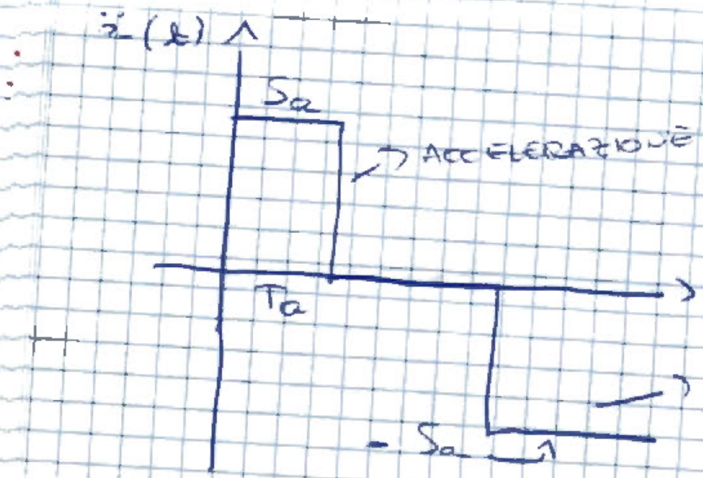
L'ACCELERAZIONE NON DEVE SUPERARE IL VINCOLO

$$S_a = \min_{i=1,\ldots n} \frac{q_{a,i}}{|q_i^B - q_i^A|}$$

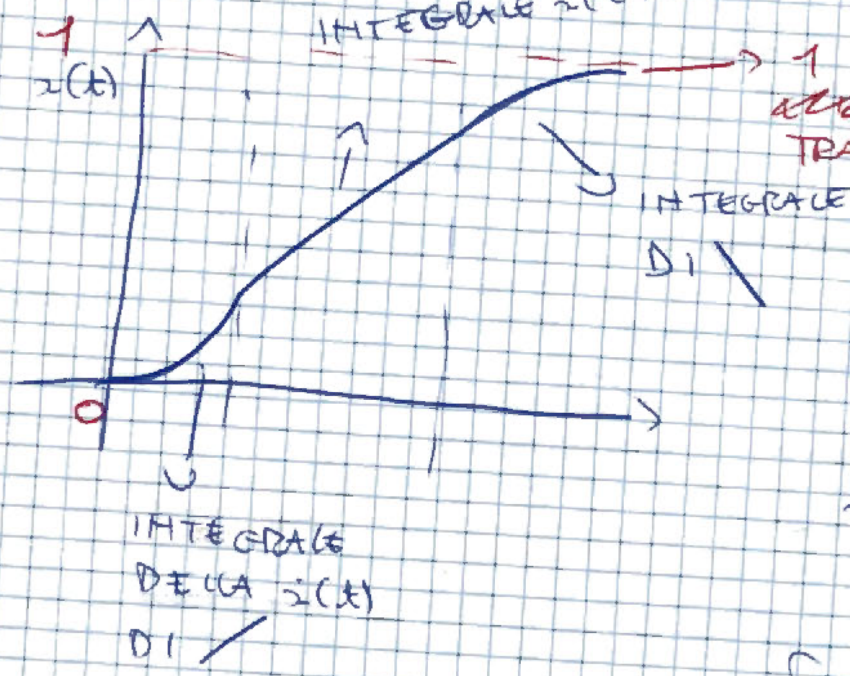
PROGETTIAMO ORA TRAIETTORIE CHE HANNO UNA FORMA TRAPEZOIDALE DI VELOCITA'

OVVERO





$$T = 2T_a + T_v$$



SAPENDO CHE

$$\dot{x}(t) = S_a t$$

$$\Downarrow$$

$$\int \dot{x}(t) = \frac{1}{2} S_a t^2$$

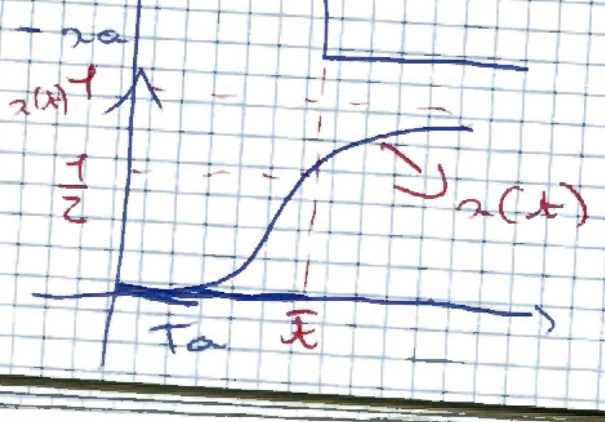
STUDIAMO PRIMA PERO' IL PROFILO TRIANGOLARE

~~QUELLO~~

CASO 1 -> ARRIVO A META' TRAIETTORIA ESATTAMENTE A VELOCITA' MASSIMA ($T_v = 0$)

$$\frac{1}{2} S_a \bar{t}^2 = \frac{1}{2}$$

$$S_a \bar{t} \leq S_v$$



QUINDI NON ABBIAMO IL TRATTO CON VELOCITA' COSTANTE

$$\Downarrow$$

SI ACCELERA E SI DECELERA

SI HA CHE

$$\frac{1}{2}\ddot{S}_a T_a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow T_a^2 = \frac{1}{\ddot{S}_a} \Rightarrow \boxed{T_a = \frac{1}{\sqrt{\ddot{S}_a}} \quad \ddot{S}_a T_a \leq S_v}$$

DA QUESTE SI HA CHE

$$\ddot{S}_a \frac{1}{\sqrt{\ddot{S}_a}} \leq S_v \Rightarrow \sqrt{\ddot{S}_a} \leq S_v \Rightarrow \boxed{S_a \leq S_v^2}$$

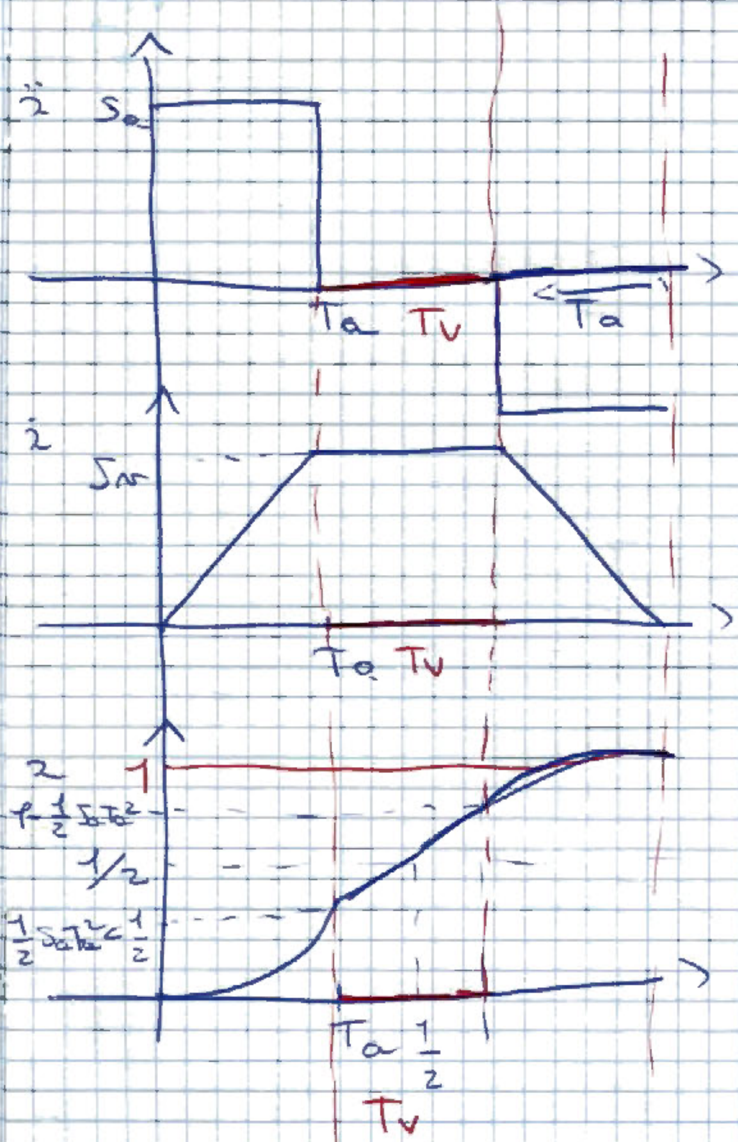
$\dot{z}$ HA UN PROFILO TRIANGOLARE DI VELOCITA' MASSIMA

PASSIAMO AL TRAPEZIO

CASO 2 -> ~~ALBERAL BOLO SOTTO~~ ~~ALCOBE AL~~ ARRIVO A VEL ~~MAX~~ PRIMA DELLA METÀ (TRAPEZIO)

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} S_a T_a^2 < \frac{1}{2}$$



SVOLGENDO I CALCOLI

$$T_a : \dot{z}(T_a) = S_a T_a = S_v$$

$$T_a = \frac{S_v}{S_a}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} S_a T_a^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow S_a T_a^2 < 1$$

$$S_a \frac{S_v^2}{S_a^2} < 1 \Rightarrow \frac{S_v^2}{S_a} < 1$$

$$\boxed{S_v^2 < S_a}$$

ORA QUINDI CI SARÀ UNA FASE DI VEL. COSTAN
PRIMA DI INIZIARE A DECELERARE

QUINDI SI HA CHE

$$T_a S_v + T_v S_v = 1 \Rightarrow (T_a + T_v) S_v = 1$$

$$T_v = \frac{1}{S_v}\left(1 - T_a S_v\right) \Rightarrow \boxed{T_v = \frac{1}{S_v} - T_a}$$

$$T_v = \frac{1}{S_v} - \frac{S_v}{S_a} \Rightarrow \boxed{T_v = \frac{S_a - S_v^2}{S_a \cdot S_v}}$$

INOLTRE SCRIVENDO I PROFILI DELLE TRAIETTORIE DI
NEI GRAFICI

$$\ddot{x}(t) = \begin{cases} S_a & t \in [0; T_a] \\ 0 & t \in [T_a, T_a + T_v] \\ -S_a & t \in [T_a + T_v; T_v + 2T_a] \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} S_a t & t \in [0; T_a] \\ S_a T_a & t \in [T_a, T_a + T_v] \\ S_a (T_a + T_v - t) + S_a T_a & t \in [T_a + T_v; T_v + 2T_a] \end{cases}$$

$$\| $$

$$S_a (2T_a + T_v - t)$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} S_a t^2 & t \in [0; T_a] \\ S_v (t - T_a) + \frac{1}{2} S_a T_a^2 & t \in [T_a; T_a + T_v] \\ 1 - \frac{1}{2} S_a (t - (T_v + 2T_a))^2 & t \in [T_a + T_v, \ldots \end{cases}$$

UNA VOLTA QUI CONOSCENDO ORA IL CAMPIONAMENTO t_k
CALCOLO $s(t_k)$

FATTO ORA RICONSIDERIAMO

$$^b r_t(\underset{\boxed{s(t)}}{s}) = {}^b r^B + s\left(r^B - r^A\right)$$

$$\Downarrow$$

$$^b \dot r(s(t)) = \dot s(t)\left(r^B - r^A\right)$$

$$^b \ddot r(s(t)) = \ddot s(t)\left(r^B - r^A\right)$$

$\Rightarrow$ ~~DOVE IN MODULO DEVONO~~ ESSERE MINORI DI UNA VEL. CART. DATA E AC. DATA OVVERO

$$\|{}^b \dot r(s(t))\| \le \bar v$$

$$\|{}^b \ddot r(s(t))\| \le \bar a$$

$$\Downarrow$$

$$|\dot s(t)| \le \frac{\bar v}{\|r^B - r^A\|} = S_v \quad \Leftarrow$$

$$|\ddot s(t)| \le \frac{\bar a}{\|r^B - r^A\|} = S_a$$