OTTIMIZZAZIONE

Studente: Mario Di Ferdinando

9/11/2011

PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE $\Rightarrow \min f(x)$ CON $x \in S$

$\Downarrow$ PUO' ESSERE ANCHE max

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ FUNZ. OB.

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ INSIEME AMMISSIBILE

RISOLVERLO VUOL DIRE DETERMINARE SE ESISTE UN PUNTO $x^* \in S$ TALE CHE

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S$$

PUNTO DI MINIMO GLOBALE

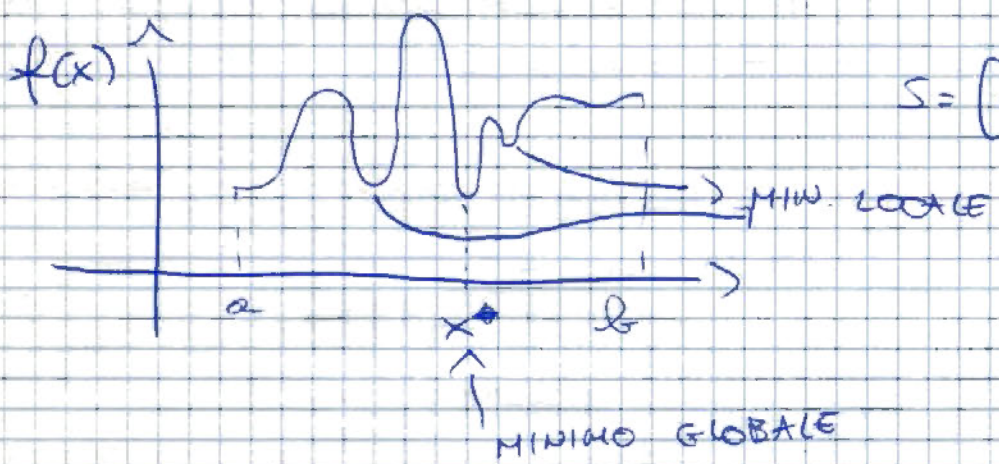
$\Downarrow$ MA BASTEREBBE CALCOLARE $\min -f(x)$

PUNTO DI MINIMO LOCALE $x^* \in S$

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \rho)$$

$\hookrightarrow$ SFERA DI RAGGIO ρ

ESEMPIO



$S = [a, b]$

TEOREMA DI WEIESTRASS

C.S. PERCHE' ESISTA ~~[illegible]~~ SOLUZIONE

SE f CONTINUA ED S (CHIUSO E LIMITATO)

$\Downarrow$

$\min f(x) \quad x \in S$ AMMETTE SOLUZIONE

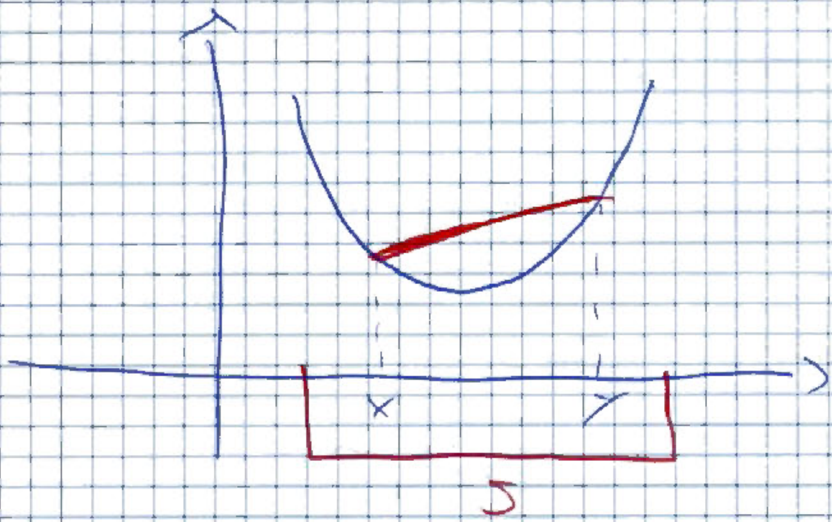
VEDIAMO ORA LE CONDIZIONI AFFINCHE' UN min LOCALE SIA ANCHE GLOBALE

- CONVESSITA' $\Rightarrow S$ SI DICE CONVESSO SE COMUNQUE PRESI DUE PUNTI LA RETTA CHE LI UNISCE FACCIA PARTE SEMPRE DELL'INSIEME

$\forall x, y \in S \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S \quad \forall \lambda \in [0,1]$

- UNA FUNZIONE f SI DICE CONVESSA SE

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



TEOREMA

SIA S CONVESSO E f CONVESSA SU S ALLORA OGNI MINIMO LOCALE È ANCHE GLOBALE

ESEMPIO CONVESSITÀ

$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Rightarrow$ SI LO È

VETTORE GRADIENTE $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

MATRICE HESSIANA $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

TEOREMA C.N.S. PER VEDERE SE f CONVESSA

f CONVESSA $\Leftrightarrow \nabla^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in S$

LA CONVESSITÀ NON CI DICE SE ESISTE O MENO SOLUZIONE PERÒ POSSIAMO DIRE CHE

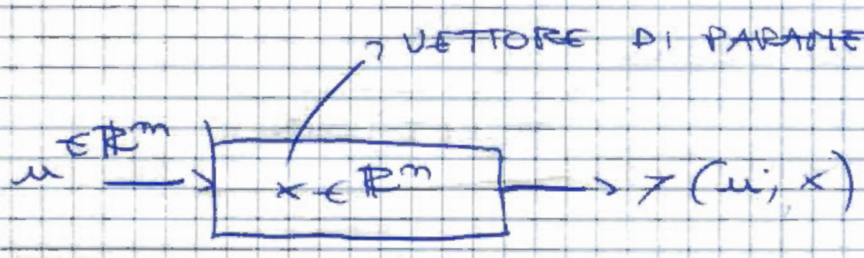
SE f È STRETTAMENTE CONVESSA E IL PROBLEMA AMMETTE SOLUZIONE $\Rightarrow$ ESSA È UNICA

- CONSIDERIAMO IL NOSTRO PROBLEMA $\min f(x)$ CON $x \in S$

SE

$$S \begin{cases} \subset \mathbb{R}^n & \text{OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA} \\ = \mathbb{R}^n & \text{" NON VINCOLATA} \end{cases}$$

ESEMPIO $\Rightarrow$ OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA



PONIAMO CHE NOI VOGLIAMO

$\Leftarrow y(u^i; x) = \bar{y}^i$

$i = 1, \ldots, H$

PER FARLO CERCO DI MINIMIZZARE L'ERRORE

$$E_i(x) = |y(u^i, x) - \bar{y}^i| \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{H} E_i(x)$$

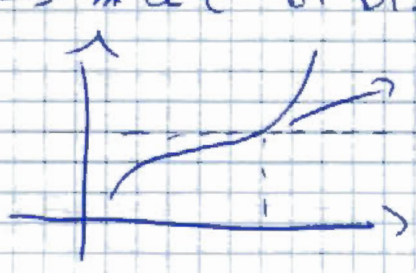
CONCETTO DI DIREZIONE DI DISCESA DI f IN PUNTO $\bar{x}$

$d \in \mathbb{R}^n$

DEF $\Rightarrow f(\bar{x} + td) < f(\bar{x}) \quad \forall t \in (0, \bar{t}]$

DER DIREZIONALE $\nabla f(\bar{x})^T d$

SE $\nabla f(\bar{x})^T d < 0 \Rightarrow d$ È DI DISCESA C. S.



CONDIZIONE NON NECESSARIA

$\Downarrow$

SE CONVESSA DIVENTA NECESSARIA

TEOREMA C.N. OTTIMALITÀ

SE $\bar{x}$ È UN MINIMO LOCALE $\Rightarrow \nexists$ UNA DIREZIONE DISCESA

CONSIDERIAMO ORA $\bar{x}: \nabla f(\bar{x}) \neq 0$
DETERMINARE UN PUNTO d DISCESA

$\Downarrow$

$$d = -\nabla f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T d = -\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x})$$
$$= -\|\nabla f(x)\|^2 < 0$$

TEOREMA C.N. PRIMO ORDINE

SE $\bar{x}$ min LOCALE $\Rightarrow \boxed{\nabla f(\bar{x}) = 0}$

$\Downarrow$

C.N.S. DI MINIMO GLOBALE
SE f CONVESSA

TEOREMA C.N. SECONDO ORDINE

SE $\bar{x}$ min LOCALE $\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$
$\nabla^2 f(\bar{x}) \geq 0$

TEOREMA C.S. SECONDO ORDINE
SE $\nabla f(\bar{x}) = 0$ E $\nabla^2 f(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ min LOCALE

CONSIDERIAMO ORA $\min f(x)$ CON $x \in \mathbb{R}^n$ (NON VINCOLA

FUNZIONE COERCIVA

$$\forall \{x^n\} \mid \|x^k\| \to \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x^k) = +\infty$$

QUINDI SE f COERCIVA $\Rightarrow$ AMMETTE SOLUZIONI $\min f(x)$ CON $x \in \mathbb{R}^n$

ALGORITMI $\min f(x)$ CON $x \in \mathbb{R}^n$

SIA $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) = 0\}$ INSIEME PUNTI STAZIONARI

SCHEMA GENERALE

$\boxed{\text{DATI}}$ $x^0 \in \mathbb{R}^n$

1 - $k = 0$ CONTATORE ITERAZIONI

2 - ~~WHILE~~ WHILE $x^k \notin \Delta$

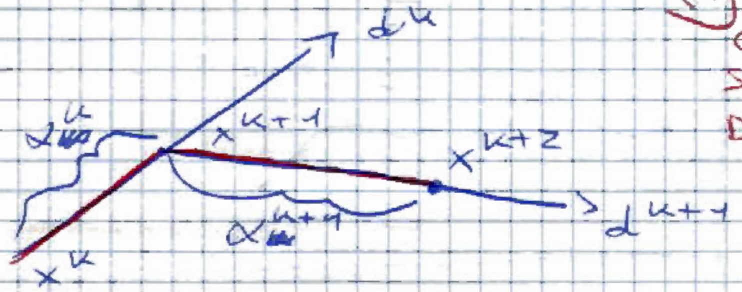
SCEGLI UNA DIREZIONE DI RICERCA d^k

SCEGLI UN PASSO $\alpha^k \in \mathbb{R}$

PONI $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

PONI $k = k+1$

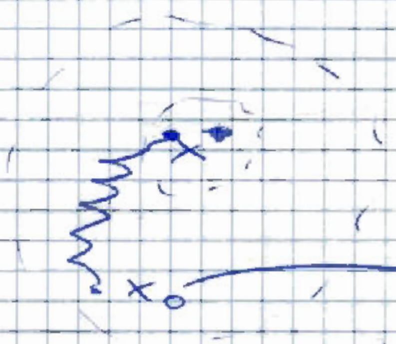
END WHILE



$\Rightarrow$ GENERA UNA SEQUENZA x^k DI PUNTI

- CONVERGENZA LOCALE

SIA $x^* \mid \nabla f(x^*) = 0$



$\rightarrow$ DEVE ESSERE IN UNA SFERA ρ

$\Downarrow$

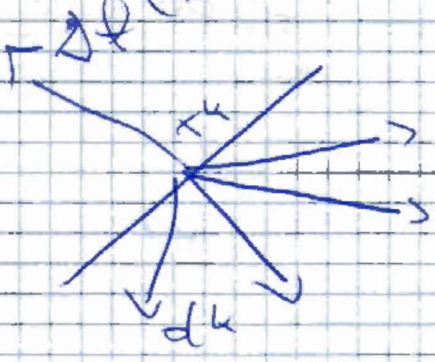
CONVERGERÀ x_0 A x^*

- CONVERGENZA GLOBALE

IL PUNTO INIZIALE PUO' ESSERE QUALSIASI

ANDIAMO A VEDERE IL REQUISITO DI d^k

1 - $d^k : \nabla f(x^k)^T d^k < 0 \Rightarrow$ DEVE ESSERE DI DISCESA



2 - d^k NON DEVE DIVENTARE ORTOGONALE A $\nabla f(x^k)^*$

SUPPONIAMO ORA DI AVER DETERMINATO UNA BUONA d^k TROVIAMO α^k

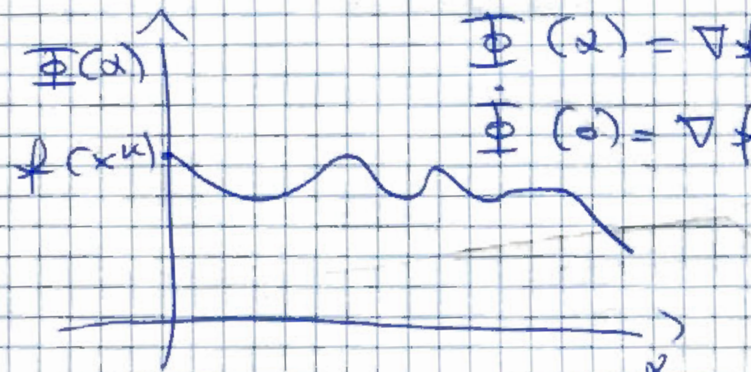
RICERCA UNIDIMENSIONALE

SIANO x^k E d^k ASSEGNATI

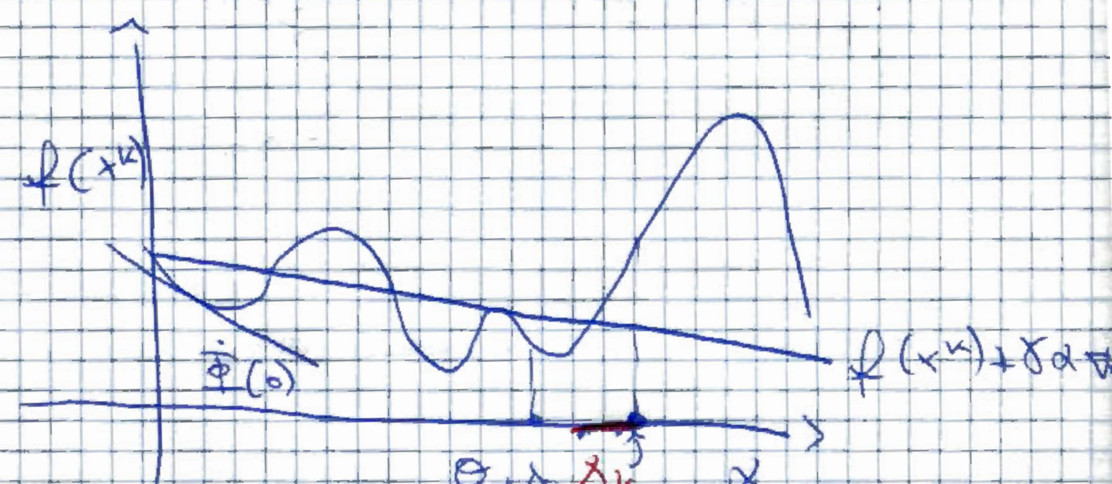
$$f(x^k + \alpha d^k) = \Phi(\alpha)$$

$$\dot{\Phi}(\alpha) = \nabla f(x^k + d^k \alpha)^T d^k$$

$$\dot{\Phi}(0) = \nabla f(x^k)^T d^k < 0$$



METODO DI ARMIJO



VEDIAMO SE $f(x^k) + \gamma \alpha \nabla f(x^k)^T d^k$ SI TROVA SOPRA O SOTTO $f(x^k + \Delta_k d^k)$ FINO A CHE NON TROVO UNA SOTTO E QUELLO SARÀ IL MIO α^k

QUINDI SE HO UNA BUONA d^k E UN α_k ~~CON~~ TROVATA CON ARMIJO $\Rightarrow x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

$\Downarrow$

$\{x^k\}$ GLOBALMENTE CONVERGENTE

METODI DI OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA

- METODI CHE UTILIZZANO $f, \nabla f$
  - METODO DEL GRADIENTE
  - METODI DELLE DIREZIONI CONIUGATE
  - METODI QUASI NEWTON

- METODI CHE UTILIZZANO $f, \nabla f, \nabla^2 f \rightarrow$ METODI TIPO NEWTON

- METODI DI ORDINE SUPERIORE $\rightarrow$ METODO MANES GERMANI

- METODI SENZA DERIVATE f

METODO DEL GRADIENTE

$d_k = -\nabla f(x_k^k)$ ANTIGRADIENTE $\Rightarrow$ RISPETTA ANCHE LA CONDIZIONE D'ANGOLO

$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$

$\downarrow$

CON ARMIJO

METODO DI NEWTON

CON TAYLOR $m(d) = f(x_k + d) \cong f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_k) d$

MINIMIZZIAMO RISPETTO A d

$\min_d m(d) \Rightarrow \nabla m(d) = \nabla f(x_k) + \underbrace{\nabla^2 f(x_k)}_{\text{SE DEF. POS}} d$

$\Downarrow$

CONVESSA $\Leftarrow$

PONENDO

$$\nabla m(d)=0 \Rightarrow d^* = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}\nabla f(x_k)$$

METODI DI NEWTON → FORMA PURE

$$x^{k+1} = x^k + d_k = x_k - [\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)]$$

SE $x^* \mid \nabla f(x^*) = 0$ $\nabla^2 f(x^*) > 0$ → CONV. LOC CON RAPID QUADRAT

METODO DI GAUSS - NEWTON

PROBLEMA DEI MINIMI QUADRATI

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} z_i^2(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} z_i^2(x) \Rightarrow \nabla f(x) = J^T(x)\, z(x)$$

CON $J(x) = \begin{bmatrix} \nabla z_1^T \\ \vdots \\ \nabla z_m^T \end{bmatrix}$

$$\nabla^2 f(x) = J^T(x) J(x) + \sum_{i=1}^{m} z_i^2$$

IN GAUSS-NEWTON SI IGNORA →

$$\nabla^2 f(x) \cong J^T(x) J(x)$$

$$x^{k+1} = x^k - [J^T(x)\, J(x)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

SE I RESIDUI $z(x^*) = 0$

⇓

CONV. LOC.

APPLICO LEVENBERG MARQUAT

$$d_k = -[J^T(x_k) J(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$ ⇒ NON SO SE RISPETTA LA CONDIZIONE ANGOLO

QUINDI CON LETTEMBER MARQUAT

$$\left[J(x_k)^T J(x_k) + \mu_k I\right] \nabla f(x_k) \quad \text{CON } \mu_k \geq 0$$