1°) $W(s) = K \dfrac{32(s+1)}{(s^2+4s+16)}$

1° ESERCIZIO 15/02/2022

$$\tilde{W}(s) = W(s)\Big|_{K=1} = \frac{32\;(s+1)}{(s^2+4s+16)} = \frac{32}{16}\;\frac{(1+s)}{\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{16}\right)} = 2\;\frac{(1+s)}{\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{16}\right)}$$

· TERMINE GUADAGNO

$K=2 \rightarrow |K|_{dB} = 20\log_{10}2 \simeq 6\,dB$

$\langle K \rangle = 0$

· TERMINE BINOMIO AL NUMERATORE

$(1+s)$, $w_n = 1 \Rightarrow +20\,dB/dec \quad w\in(1,+\infty)$

$+\pi/4\ rad/dec \quad w\in(0.1,10)$

· TERMINE TRINOMIO AL DENOMINATORE

$\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{16}\right) = \left(1+\frac{2Z\,s}{w_n}+\frac{s^2}{w_n^2}\right) \rightarrow w_n = 4$

$\frac{2\cdot Z}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow Z = 1/2$

il diagramma asintotico dei moduli è molto simile a quello reale

$-40\ dB/dec \quad w\in(4,+\infty)$

per la fase l'approssimazioni su due decadi approssima meglio nell'intorno dei punti di rottura $(0.4, 40)$.

$\rightarrow -\frac{\pi}{2}\ rad/dec \quad w\in(0.4,40)$

Altrimenti si ~~può~~ possono usare ~~...~~ altre approssimazione asintotica

· $\alpha = 5Z + \sqrt{25Z^2+1} \rightarrow \left(\frac{w_n}{\alpha}, \alpha w_n\right)$, pendenza $\frac{\pi}{2\log(\alpha)}$

oppure si può usare come diagramma asintotico la tangente nel punto $w_n = 4$.

Per l'uso che ne devo fare, analizzare la stabilità del sistema con l'uso del diagramma polare, ~~non serve avere un~~ mi basta l'approssimazione su due decadi

MODULO (parto da 6dB)

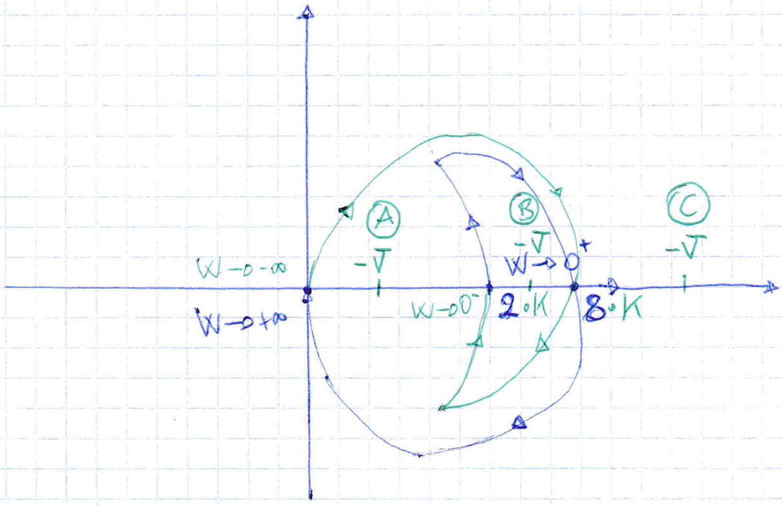
$\omega < 1$	0 dB/dec
$1 < \omega < 4$	20 dB/dec
$4 < \omega$	-20 dB/dec

FASE (parto da 0 rad)

$\omega < 0.1$	0 rad/dec
$0.1 < \omega < 0.4$	$+\frac{\pi}{4}$ rad/dec
$0.4 < \omega < 10$	$-\frac{\pi}{4}$ rad/dec
$10 < \omega < 40$	$-\frac{\pi}{2}$ rad/dec
$40 < \omega$	0 rad/dec

$$0 + \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

DIAGRAMMA POLARE



intersezione con l'asse reale

$$Im\{W(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow Im\left\{ 32 \frac{1+j\omega}{(16-\omega^2)+j4\omega} \right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Im\left\{ (1+j\omega) \cdot \frac{(16-\omega^2)-j4\omega}{\cancel{(16-\omega^2)^2+16\omega^2}} \right\} = 0 \Leftrightarrow Im\left\{ (1+j\omega)\left((16-\omega^2)-j4\omega \right) \right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega(16-\omega^2) - 4\omega = 0 \Leftrightarrow \omega(16-4-\omega^2) = 0 \Leftrightarrow \omega(12-\omega^2) = 0$$

$$\omega = 0 \to W(j0) = K = 2$$

$$12 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = 12 \Leftrightarrow |\omega| = \sqrt{12} \to \omega = \pm 2\sqrt{3}$$

$$W(j\sqrt{12}) = 32 \frac{1+j\sqrt{12}}{(16-12)+j4\sqrt{12}} = \frac{32}{4} \frac{\cancel{1+j\sqrt{12}}}{\cancel{1+j\sqrt{12}}} = 8$$

$$W_{CH}(s) = \frac{\cancel{1} \cancel{+} K\tilde{W}(s)}{1+K\tilde{W}(s)} = \frac{K \cdot \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)}}{1+K\frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)}} = \frac{K \cdot \tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)+K\tilde{N}(s)} = \frac{N_{CH}(s)}{D_{CH}(s)}$$

$$D_{CH}(s) = (s^2+4s+16) + K \cdot 32(s+1) =$$
$$= s^2+4s+16 + 32 \cdot K \cdot s + 32 \cdot K =$$
$$= s^2 + 4(1+8 \cdot K)s + 16(1+2K)$$

Il criterio di Routh per un polinomio di grado 2 si riduce al criterio di Cartesio: guardo i coefficienti del polinomio

		$-1/2$		$-1/8$	K
1	$+$		$+$		$+$
$4(1+8 \cdot K)$	$-$		$\cancel{+}\ -$		$+$
$16(1+2 \cdot K)$	$-$		$+$		$+$

per $K < -1/2$ ho 1 variazione di segno, quindi ho una radice a parte reale positiva
$\Rightarrow$ Il sistema controreazionato è instabile $(\mu_{CH}=1)$

per $K \in (-1/2, -1/8)$ ho 2 variazione di segno, ...
$\Rightarrow$ Il sistema controreazionato è instabile $(\mu_{CH}=2)$

per $K > -1/8$ non ci sono variazioni di segno quindi tutti gli autovalori del sistema sono a parte reale negativa $\Rightarrow$ Il sistema controreazionato è stabile asintoticamente $(\mu_{CH}=0)$

$K = -\frac{1}{8} \Rightarrow D_{CH}(s) = s^2 + 16\left(1-\frac{2}{8}\right) = s^2+12 = 0 \Leftrightarrow s = \pm\sqrt{-12} = \pm j\sqrt{12}$
$\Rightarrow Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0 \Rightarrow$ il sistema controreazionato è semplicemente stabile

$K = -\frac{1}{2} \Rightarrow D_{CH}(s) = s^2 + 4\left(1-\frac{8}{2}\right)s = s^2 - 12 \cdot s = s(s-12) = 0 \begin{cases} s=0 \\ s=12 \end{cases}$
$\Rightarrow$ il sistema controreazionato è instabile perché $\lambda_2 = 12 > 0$

Cerco conferma dei risultati ottenuti tramite il metodo di Nyquist

$M_{CH} = M_{AP} - \tilde{N}$, $M_{AP} = ?$

$(s^2 + 4s + 16) = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-4}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} =$

$= \underbrace{-2}_{\text{negativo}} \pm j\, 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow M_{AP} = 0 \rightarrow M_{CH} = -\tilde{N}$

per $K>0$ il punto critico non è circondato $\rightarrow \tilde{N} = 0 = M_{CH}$

per $K<0$ devo distinguere 3 casi

Ⓐ $-1 > 2 \cdot K \Rightarrow K < -\frac{1}{2} \rightarrow \tilde{N} = -1 \rightarrow M_{CH} = 1$

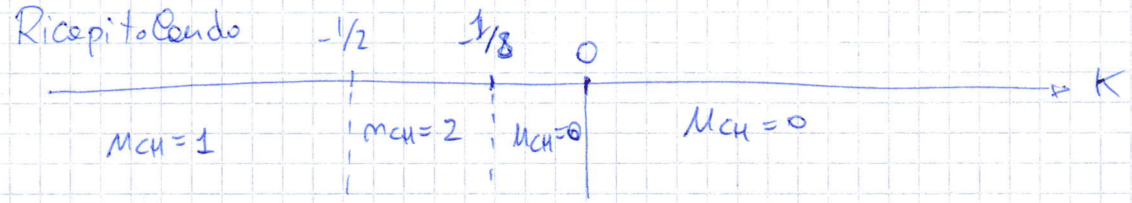
Ⓑ $\cancel{2 \cdot K < -1 < 8 \cdot K}$

$\cancel{K >}$

$$\left.\begin{array}{l} -1 < 2 \cdot K \rightarrow K > -\frac{1}{2} \\ -1 > 8 \cdot K \rightarrow K < -\frac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow K \in \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \tilde{N} = -2 \rightarrow M_{CH} = 2$$

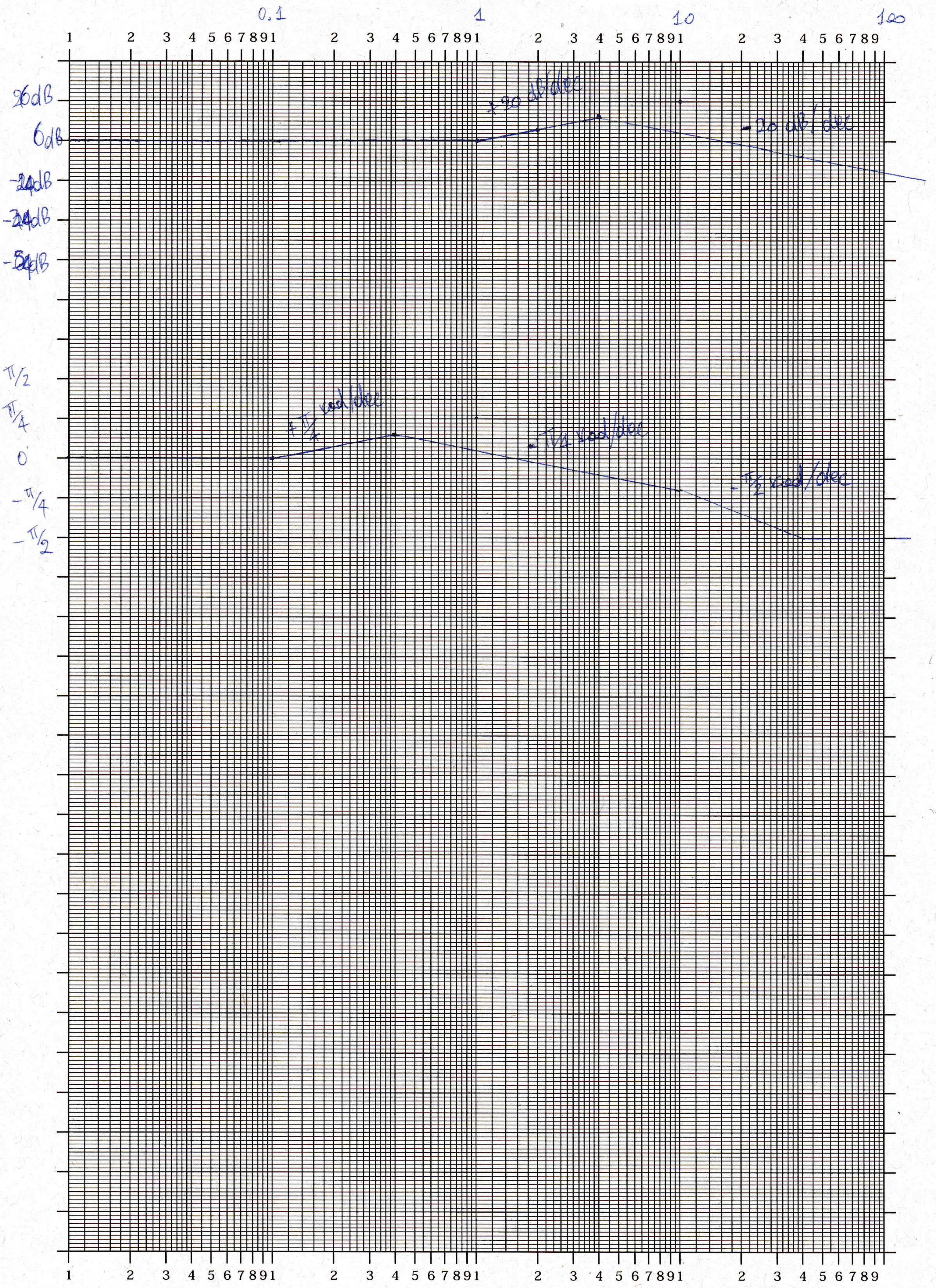
Ⓒ $-1 < 8 \cdot K \rightarrow K > -\frac{1}{8} \rightarrow \tilde{N} = 0 \rightarrow M_{CH} = 0$

Ricapitolando



Trovo conferma dei risultati ottenuti.

Il sistema controreazionato è asintoticamente stabile per $K > -\frac{1}{8}$.



0.1
1
10
100
26dB
6dB
+20 dB/dec
-20 dB/dec
π/2
π/4
0
-π/4
-π/2
+π/4 rad/dec
-π/4 rad/dec
-π/2 rad/dec