4°) L.T.I. , T.D.
15/02/2022

$$\begin{cases} x(t+1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$P_4 = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(P_4) = 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0} - \left(1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \right) =$$

$$= (2-3) - (1-2) = -1+1 = 0$$

$\neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{ran}(P_4) = 3 = \dim(\mathcal{P})$

$$\mathcal{P} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

✓

- OSSERVABILITÀ

$\neq 0$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Downarrow$

$\operatorname{rank}(Q_K) = 3$

sono uguali la 1° e 4° colonne

$\dim(Q) = n - \text{rank}(Q_4) = 4 - 3 = 1$

$$Q = \cancel{\text{span}}\ \mathcal{N}(Q_4) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$X_1 = P \cap Q = Q = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$X_2 : X_1 \oplus X_2 = P \Rightarrow X_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$X_3 = \emptyset$$

$$X_4 : X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 = \mathbb{R}^4 \rightarrow X_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

verifica

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&1&0&0\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&1&0\end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

<u>OK</u>

$$\mathbb{R}^4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$e_1 \in X_4 \rightarrow$ irraggiungibile e osservabile

$e_2 \in X_2 \rightarrow$ raggiungibile e osservabile

$e_3 \rightarrow$ OSS $(Q_4 \cdot e_3 \neq 0)$, NON RAGG. $\text{Im}(P) \not\ni e_3$ (la combinazione lineare dei vett dello spazio dei raggiungibili non genera e_3)

e_4 stesse cose di e_3

5°)

5° ESERCIZIO
15/02/2022

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2 \cdot x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \end{cases}$$

è un sistema lineare, con $x_e = (0,0)$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

si nota facilmente che il sistema è A.S. essendo $\underset{-2}{\overset{\shortparallel}{Re(\lambda_1)}} < 0$, $\underset{-1}{\overset{\shortparallel}{Re(\lambda_2)}} < 0$

- $V(x) = 2 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2 = x^T \cdot Q \cdot x$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 2 > 0 \text{ OK} \\ 4 - \alpha^2 > 0 \Rightarrow 4 > \alpha^2 \Rightarrow 2 > |\alpha| \end{array}$$

$$\Rightarrow |\alpha| < 2 \rightarrow \alpha \in (-2, 2) \Rightarrow Q > 0 \Rightarrow V(x) > 0$$

$$\dot{V}(x) = \left[4 \cdot x_1 + 2\alpha x_2 \; \vdots \; 4 \cdot x_2 + 2\alpha \cdot x_1 \right] \begin{bmatrix} -2 \cdot x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -8 x_1^2 - 4\alpha x_1 x_2 - 4 x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2 =$$

$$= -8 x_1^2 - 4 x_2^2 - \underbrace{6\alpha x_1 x_2}_{\leq 0} \Rightarrow \alpha = 0$$

$\dot{V}(x) = -8 x_1^2 - 4 x_2^2 < 0$ definita negativa

$\Rightarrow x_e$ è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile (GAS)

perché le funzioni quadratiche sono radialmente illimitate ($V(x)$)