24/09/2009 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

Esercizio 1. Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+ps+25)},$$

per $p=0$ e per $p=10$. Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile K in catena aperta. Per entrambi i casi $p=0$ e $p=10$ si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in I\!R$ utilizzando il criterio di Nyquist.

Facoltativo: verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si considerino i due sistemi lineari e stazionari a tempo continuo nella forma esplicita

$$x(t) = \Phi_a(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_a(t,\tau)u(\tau)d\tau, \qquad \text{e} \qquad x(t) = \Phi_b(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_b(t,\tau)u(\tau)d\tau,$$

dove

$$\Phi_a(t,t_0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix}, \quad \Phi_b(t,t_0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix},$$

$$H_a(t,\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}, \qquad H_b(t,\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}.$$

Utilizzando le proprietà della matrice di transizione dello stato e della matrice delle risposte impulsive dello stato, individuare quale delle due formule esplicite rappresenta un sistema (e quale no), e se ne trovi una rappresentazione in forma implicita (matrici A e B).

Esercizio 3. Si studi la stabilità di **tutti** i punti di equilibrio del sistema seguante, al variare del parametro α

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^2 + (1-\alpha)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha\, x_2 + x_1 \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo, descritto dalla terna di matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolar modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;

iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;

iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano 1) e 4.i) + almeno uno tra 2) e 3).**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano 1) + 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano 3) + 4)**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 2 ORE – LIBRI CHIUSI.