TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 06-02-2013

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{s+1}{s^2(s-2)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At};
3. Si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 0.2^t - 0.5^t,$$

si calcolino la funzione di trasferimento e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos\big((\pi/2)t\big)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili e una base per lo spazio degli stati inosservabili. Inoltre, si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

Problema 5. Sia dato un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ed una funzione quadratica $V(x) = x^T P x$ con

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad P = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Si verifichi che l'origine è asintoticamente stabile e che la $V(x)$ è una funzione di Lyapunov.
(*Suggerimento: per stabilire se una matrice è definita positiva si utilizzi il criterio di Sylvester.*)

Problema 6. Sia dato il sistema

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_2(t) - \big(x_1(t) - 1\big)^3\\ \dot{x}_2(t) = \alpha\big(x_1(t) + x_2^2(t) - 1\big) - x_2(t) - \big(x_1(t) - 1\big)^3\end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (1, 0)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov.
(*Suggerimento per la funzione di Lyapunov:* $V(x) = (x_1 - x_{e,1})^4 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, con β opportuno.)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

Gli studenti del corso di Teoria dei Sistemi I (6 CFU) devono rispondere ai quesiti 1, 2 e 3.
