TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame dell'11-09-2013

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{s^2+4}{s(s+1)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At};
3. Si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. Si calcoli la funzione di trasferimento e la risposta al gradino di un sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = e^{-2t}\cos(2t).$$

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili e una base per lo spazio degli stati inosservabili. Inoltre, si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

Problema 5. Si consideri una matrice A diagonalizzabile e nonsingolare. Utilizzando la definizione di esponenziale di matrice o la decomposizione spettrale dell'esponenziale, si dimostri l'identità

$$\int_0^T e^{A\tau}\,d\tau = A^{-1}\left(e^{AT} - I\right).$$

Problema 6. Sia dato il sistema

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - \big(x_2(t)+1\big)^2\\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)\big(x_2(t)+1\big) + k\,\big(x_2(t)+1\big)\end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, -1)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

Risolvere almeno 5 dei 6 problemi assegnati.
