TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 13-06-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{8(s+2)}{(s^2+64)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcolino la matrice di transizione dello stato e^{At}, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $x(t)$ e $u(t)$ sono scalari:

$$x(t+1) = 0.2\,x(t) + 0.5\,u(t)$$

- Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica dello stato all'ingresso $u(t) = \sin\big((\pi/2)t\big)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^3$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ e $y(2) = 2$. Si calcoli inoltre $y(3)$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\big(\alpha(x_2(t)-1)^2 - 1\big)(1 + x_1^2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha\big(1 - x_2(t)\big)\big(1 + x_1^2(t) + \big(1 - x_2(t)\big)^2\big) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 1)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando sia il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, sia il metodo di Lyapunov (si utilizzi una funzione quadratica).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
