TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 27-06-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{s-10}{s(s+2)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. a titolo di verifica, si calcolino il modulo e la fase della $W(s)$ per $s = j\,2$ e $s = j\,10$ (per $K = 1$);
3. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
4. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcolino la matrice di transizione dello stato A^t, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita;
3. A titolo di verifica, si calcolino A^2 e A^3 mediante moltiplicazioni successive, e si confronti il risultato con quello ottenuto dalla formula A^t.

Problema 3. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $x(t)$ e $u(t)$ sono scalari:

$$x(t+1) = 0.9\,x(t) + 0.9\,u(t)$$

- Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica dello stato all'ingresso $u(t) = \cos\big((\pi/2)t\big)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 3$, $y(1) = y(2) = y(3) = 2$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha\, x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (1-\alpha)\, x_1(t) - x_2^2(t) \end{cases}$$

Si trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle in modo esplicito.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
