TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 15-07-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato da una delle seguenti funzioni di trasferimento (f.d.t.) in catena diretta

$$W_1(s) = K\frac{s^2+4}{s(s+10)^2}, \qquad W_2(s) = K\frac{(s+10)^2}{s(s^2+4)}$$

1. Si disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$ di **una** a scelta delle due f.d.t.;
2. si calcoli la pulsazione ω in cui si annulla la parte immaginaria della f.d.t. scelta;
3. si calcoli il denominatore della f.d.t. a ciclo chiuso;
4. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della f.d.t. a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato un sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ ed un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ caratterizzati dalla stessa matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, che ha una coppia di autovalori complessi coniugati: $\lambda_1 = 0.5 + j\,0.5$, $\lambda_2 = 0.5 - j\,0.5$. L'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro ℓ_1 associati all'autovalore λ_1 siano, rispettivamente:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+j \end{bmatrix} \qquad \ell_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+j}{2} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix}$$

1. Si calcolino la matrice A, e le matrici di transizione A^t e e^{At} dei due sistemi;
2. Si discuta la stabilità dei modi naturali dei due sistemi.

Problema 3. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $x(t)$ e $u(t)$ sono scalari:

$$x(t+1) = 0.4\,x(t) + u(t)$$

1. Si calcoli la risposta forzata dello stato al gradino unitario ($u(t) = 1$ per $t \geq 0$);
2. Si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\,\sin\big((\pi/2)t\big)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = y(2) = 1$, $y(1) = y(3) = -1$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha - 1)\,x_1(t) + x_2(t) - \alpha\,x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2\alpha\,x_1(t) - 3\alpha\,x_2(t)\,x_1^2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle in modo esplicito.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
