TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 19-02-2015

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\,\frac{32(s-1)}{s(s^2+4\,s+16)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calcolino:

1. le proprietà dei modi naturali;
2. la matrice di transizione dello stato;
3. la risposta impulsiva ingresso-uscita;
4. la risposta forzata dell'uscita al gradino unitario;
5. la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin\big((\pi/2)\,t\big)$.

Problema 3. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia identicamente pari a 3 ($y(0) = y(1) = y(2) = y(3) = 3$).

Problema 4. Svolgere nell'ordine i seguenti due problemi:

4.1 Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{2}x_1(t) - \dfrac{3}{2}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + \dfrac{1}{2}x_2(t). \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = 2\,x_1^2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_1\,x_2$.

4.2 Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + (\alpha-1)x_2(t) + (2\alpha+1)x_1(t)\sin x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + (\alpha+1)x_2(t) + (2\alpha+1)x_2^2(t). \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov.,

---

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
