TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 16-02-2016

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{8\,(s-5)}{(s+1)(s^2+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (6 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera dello stato è $x_{lib}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$.
3. calcolare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso–uscita.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.5)^{t-1}, \quad w(0) = 0.$$

1. Calcolare la risposta forzata al gradino unitario;
2. calcolare, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica alla sequenza d'ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} -2 \text{ per } t \text{ pari} \\ \ \ 2 \text{ per } t \text{ dispari} \end{cases} \qquad \text{per } t \geq 0, \quad u(t) = 0 \text{ per } t \leq 0$$

   opportunamente riscritta in forma armonica.

Problema 4. (5+2 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si completi la decomposizione strutturale individuando la matrice di cambio di base T^{-1} e le matrici $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ nella forma canonica di Kalman (*facoltativo*).

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3\,x_1(t) - \big(x_2(t) - 1\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = \big(\gamma - 1\big)\big(x_2(t) - 1\big) + 2\,x_1(t)\big(x_2(t) - 1\big) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0, 1)$ al variare del parametro $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
