SCRITTO DI TEORIA DEI SISTEMI del 14/07/2016 (1)

Problema 1 Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \cdot \frac{36\,(s-10)}{(s^2+36)}$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$.
2. Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso.
3. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

SOLUZIONE

$$W(s)\Big|_{K=1} = \widetilde{W}(s) = \frac{36\,(s-10)}{(s^2+36)} = 36\,\frac{(-10)\left(1-\frac{s}{10}\right)}{36\left(1+\frac{s^2}{36}\right)} = -10\,\frac{\left(1-s/10\right)}{\left(1+s^2/36\right)}$$

Lo guadagno $K_{\widetilde{W}} = -10$

- MODULO: $|K_W|_{dB} = 20\log_{10}|{-10}| = 20\log_{10} 10 = 20\ dB$
- FASE: $\angle K_W = \angle{-10} = \pm\pi$.

Termine binomio al numeratore: $1 - s/10 \;\mapsto\; \omega_z = 10$ rad/s

nei moduli provoca pendenza di $+20$ dB/dec in $[10, +\infty)$ rad/s

nelle fasi provoca pendenza di $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec in $[1, 100]$ rad/s

Termine trinomio al denominatore: $1 + \frac{s^2}{36} \;\mapsto\; \omega_n = 6$ rad/s, $\zeta = 0$ (nessuno smorzamento)

nei moduli: pendenza di -40 dB/dec in $[6, +\infty)$ rad/s

nelle fasi è approssimabile (essendo $\zeta=0$) con uno spostamento istantaneo di $-\pi$ rad in corrispondenza di $\omega_n = 6$ rad/s.

NOTA: picco di AMPLIFICAZIONE infinito in corrispondenza di $\omega_n = 6$ rad/s NEI MODULI.

DIAGRAMMA DEI MODULI

intervallo	pendenza
$\omega < 6$ rad/s	0 dB/dec
$6 < \omega < 10$ rad/s	-40 dB/dec
$10 < \omega$	-20 dB/dec

DIAGRAMMA DELLE FASI

intervallo	pendenza
$\omega < 1$ rad/s	0 rad/dec
$1 < \omega < 100$ rad/s	$-\frac{\pi}{4}$ rad/dec
$100 < \omega$	0 rad/dec

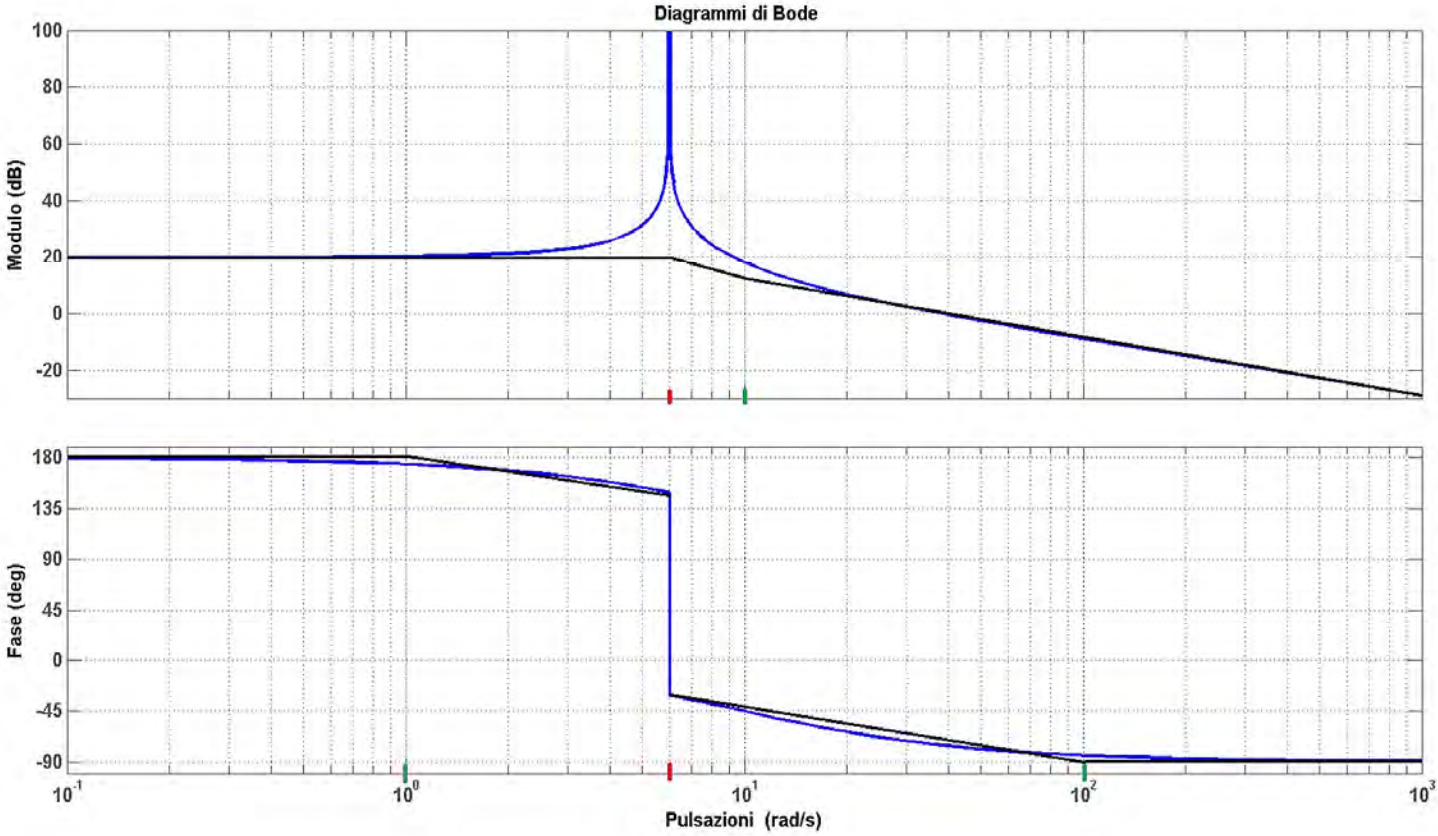
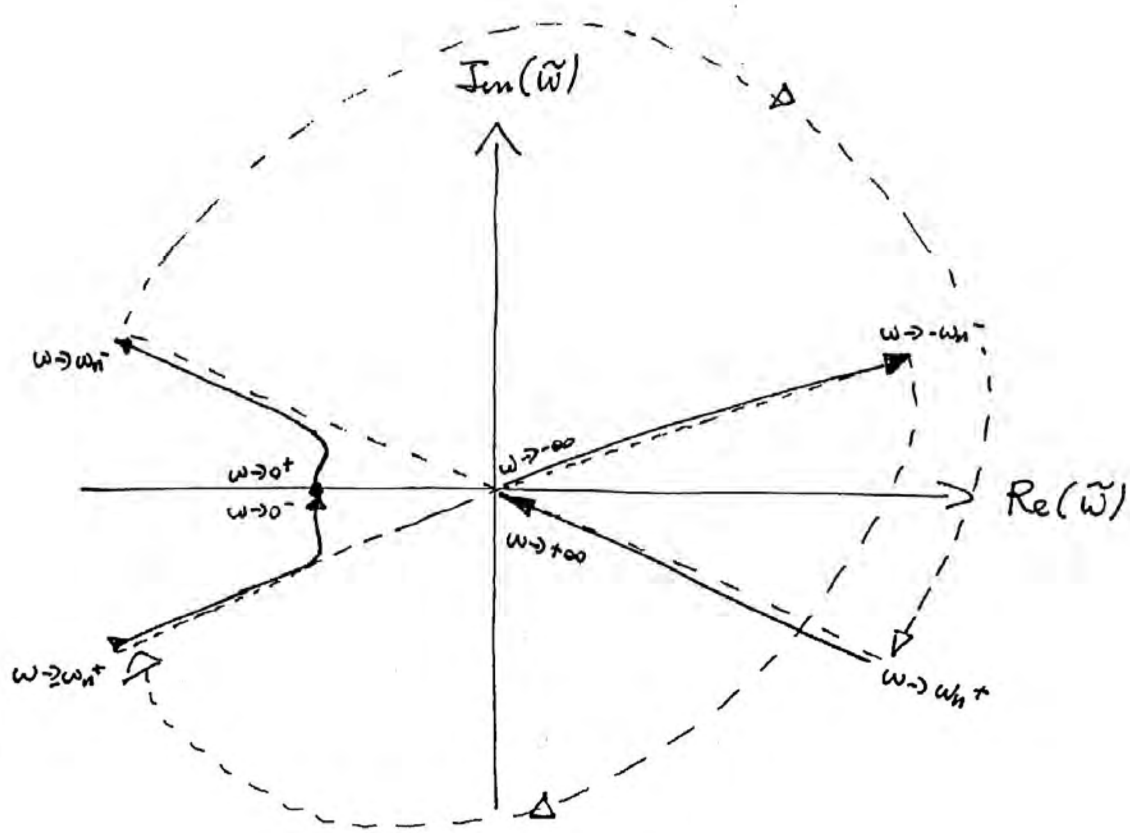


Diagramma polare (o di Nyquist) di $\tilde{W}(s) = W(s)\big|_{K=1}$



Calcolo del denominatore della f.d.t. a ciclo chiuso

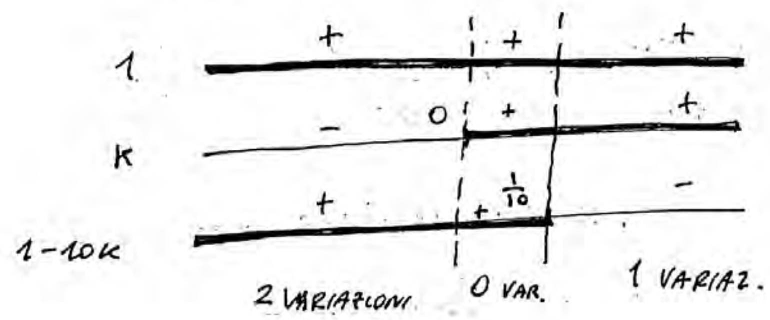
$$W_{CH} = \frac{KW(s)}{1+KW(s)} = \frac{N_{CH}(s)}{D_{CH}(s)} = \frac{\frac{K36(s-10)}{(s^2+36)}}{1+\frac{K36(s-10)}{(s^2+36)}} = \frac{\frac{K36(s-10)}{\cancel{(s^2+36)}}\cancel{(s^2+36)}}{(s^2+36)+K\cdot 36(s-10)}$$

$\Rightarrow D_{CH}(s) = s^2+36+36K(s-10) = s^2+36Ks+36-360K = s^2+36Ks+36(1-10K).$

Discuto la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare di K applicando il criterio di Cartesio (criterio di Routh per polinomi di 2° grado) a $D_{CH}(s)$

$s^2+36Ks+36(1-10K)$ ha unicamente radici a parte reale negativa se i coefficienti hanno tutti segno concorde

$1 \quad 36K \quad 36(1-10K)$



$1-10K>0 \iff K<\frac{1}{10}$

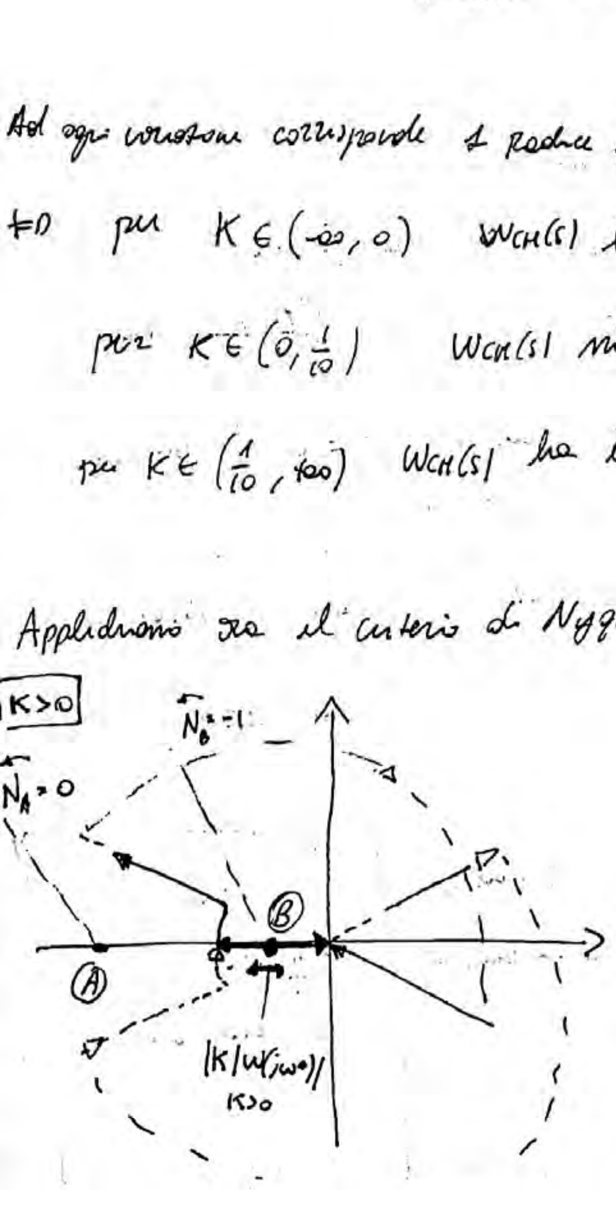
Ad ogni variazione corrisponde 1 radice a parte reale positiva in $D_{CH}(s)=0$.

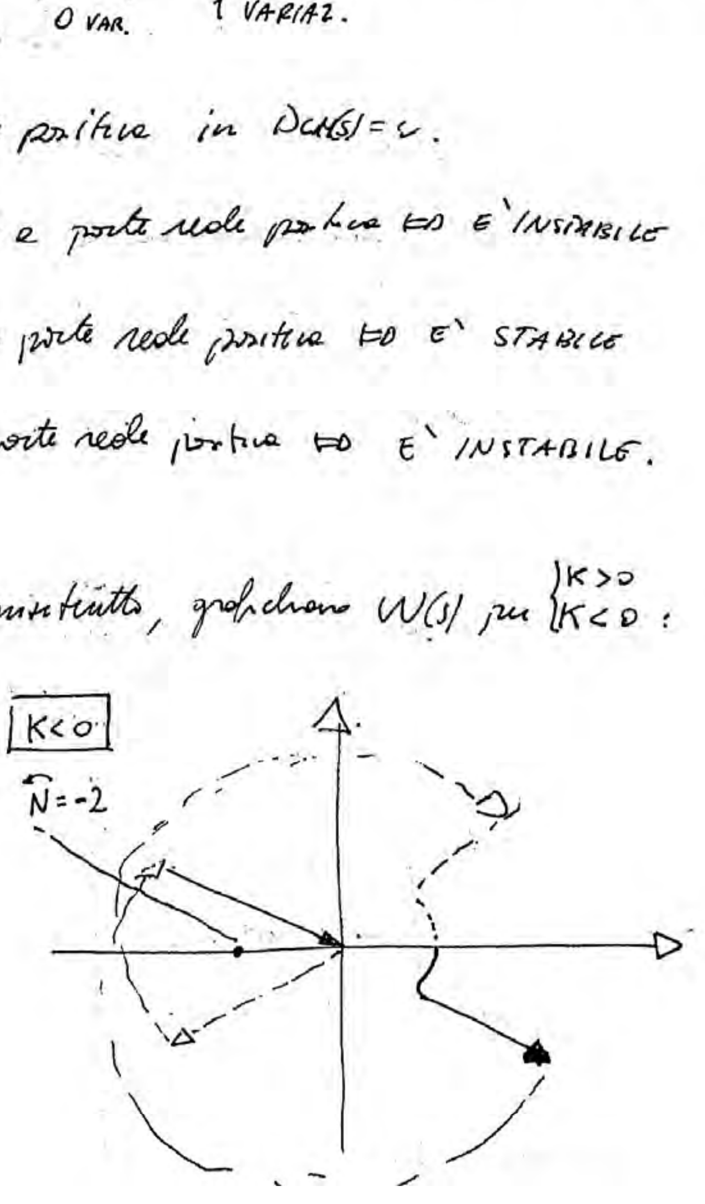
$\Rightarrow$ per $K\in(-\infty,0)$ $W_{CH}(s)$ ha due poli a parte reale positiva $\Rightarrow$ È INSTABILE

per $K\in(0,\frac{1}{10})$ $W_{CH}(s)$ non ha poli a parte reale positiva $\Rightarrow$ È STABILE

per $K\in(\frac{1}{10},+\infty)$ $W_{CH}(s)$ ha un polo a parte reale positiva $\Rightarrow$ È INSTABILE.

Applichiamo ora il criterio di Nyquist. Innanzitutto, graficchiamo $W(s)$ per $\begin{cases}K>0\\K<0\end{cases}$:





Dai diagrammi polari per $K>0$, $K<0$ è evidente che nel caso $K<0$ il valore (in modulo) di K non influisce sulla stabilità a ciclo chiuso: $\tilde{N} = -2 \quad \forall K<0$. ②

Dunque per $K<0$ $\quad P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N} = 0-(-2) = 2$, il sistema a ciclo chiuso è INSTABILE.

Per $K>0$ occorre calcolare la pulsazione di attraversamento dell'asse reale ω^* e discutere $|KW(j\omega^*)|$ al variare di $K>0$. Se $|KW(j\omega^*)|>1$ allora $-1+j0$ è sempre all'interno del diagramma (CASO B in figura) e $\tilde{N}_B = -1$.
Se invece $|KW(j\omega^*)|<1$ allora $-1+j0$ è esterno al diagramma (ovviamente interno rispetto alle chiusure all'infinito) e dunque $\tilde{N}_A = 0$, e siamo nel CASO A.

Calcolo di ω^* t.c. $\operatorname{Im}\{\tilde{W}(j\omega)\}=0$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{W}(j\omega)\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{36(s-10)}{(s^2+36)}\right\}\Bigg|_{s=j\omega} = \operatorname{Im}\Bigg\{\frac{j\omega-10}{\underbrace{(-\omega^2+36)}_{\text{reale}}}\Bigg\} = 0 \iff \operatorname{Im}\{j\omega-10\}=0 \iff \omega^*=0$$

In effetti, per trovare $\omega=\omega^*$ è sufficiente osservare che l'attraversamento desiderato si ha proprio per $\omega \to 0^+$ ($e\ \omega\to 0^-$) e dunque per $\omega^*=0$.
È dunque banale verificare che $|W(j\omega^*)| = |W(j0)| = |W(0)| = |K_W| = \left|\frac{-10\,(\cancel{36})}{\cancel{36}}\right| = 10$

$\Rightarrow$ per $K=-1$ il diagramma passa per il punto $(-10,0)$ e al variare di $K>0$ esso passa per $(-10K, 0)$.
Si ha dunque il CASO A (punto esterno) per $\quad |K|W(j\omega^*)|| < 1$
$\iff +10K < 1 \iff K < \frac{1}{10}$
al contrario si ha il CASO B (punto interno) per $|KW(j\omega^*)|>1 \iff K > \frac{1}{10}$

RIASSUMENDO:

$K<0 \Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N} = 2$ $\quad W_{CH}$ INSTABILE

$K \in (0, \frac{1}{10}) \Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_A = 0$ $\quad W_{CH}$ STABILE

$K > \frac{1}{10} \Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_B = 1$ $\quad W_{CH}$ INSTABILE

i risultati confermano l'analisi condotta in precedenza con il CRITERIO di ROUTH (CARTESIO).

Problema 2

Si consideri il sistema a tempo continuo descritto da:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{dove } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali del sistema
2. Si calcolino la matrice di transizione dello stato e la risposta impulsiva.
3. Si calcoli la risposta al gradino unitario e la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^{-2t}$.

SVOLGIMENTO

Calcoliamo autovettori e autovalori della matrice A:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{Vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{Vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovettori destri:

$$u_1 \text{ è t.c. } (\lambda_1 I - A)u_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff u_{1y} = -\frac{1}{2} u_{1x}$$

scegliendo $u_{1x} = 2$ allora $u_{1y} = -1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$u_2 \text{ è t.c. } (\lambda_2 I - A)u_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff u_{2y} = u_{2x}$$

scegliendo $u_{2x} = 1$ allora $u_{2y} = 1 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = (u_1\, u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$V = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} \text{ è t.c. } V = U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1^T = \left[\frac{1}{3} \;\; -\frac{1}{3}\right] \\ v_2^T = \left[\frac{1}{3} \;\; \frac{2}{3}\right] \end{matrix}$$

Proprietà dei modi naturali

Il modo associato a $\lambda_1 = -1$ è asintoticamente stabile ($Re(\lambda_1) < 0$).

Il modo associato a $\lambda_2 = 2$ è instabile ($Re(\lambda_2) > 0$)

Il modo associato a $\lambda_1 = -1$ è: $C \cdot u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ INOSSERVABILE in uscita

$v_1^T \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{2}{3}$ ECCITABILE per impulsi in ingresso.

Il modo associato a $\lambda_2 = 2$ è: $C \cdot u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$ OSSERVABILE IN USCITA

$v_2^T \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}$ ECCITABILE per impulsi in ingresso.

③

Per calcolare $\Phi(t) = e^{At}$ si può procedere nel dominio del tempo utilizzando

$e^{At} = U e^{\Lambda t} V = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} v_i u_i$, oppure in frequenza, ricordando che

$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

Per esercizio, procediamo nel dominio di Laplace:

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2-s-2}\begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} & \frac{2}{(s+1)(s-2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s-2)} & \frac{s}{(s+1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} & \frac{2}{(s+1)(s-2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s-2)} & \frac{s}{(s+1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

Scritto: $(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s-2} & \frac{R_3}{s+1} + \frac{R_4}{s-2} \\ \frac{R_5}{s+1} + \frac{R_6}{s-2} & \frac{R_7}{s+1} + \frac{R_8}{s-2} \end{bmatrix}$

$R_1 = \lim_{s\to -1} \frac{s-1}{s-2} = \frac{2}{3}$, $R_2 = \lim_{s\to 2} \frac{s-1}{s+1} = +\frac{1}{3}$

con $R_3 = \lim_{s\to -1} \frac{2}{s-2} = -\frac{2}{3}$; $R_4 = \lim_{s\to 2} \frac{2}{s+1} = \frac{2}{3}$

$R_5 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{s-2} = -\frac{1}{3}$; $R_5 = \lim_{s\to 2} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{3}$

$R_6 = \lim_{s\to -1} \frac{s}{s-2} = \frac{1}{3}$; $R_6 = \lim_{s\to 2} \frac{s}{s+1} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} \end{bmatrix}$ e si noti che, correttamente, $e^{At}|_{t=0} = I_2$

A questo punto calcoliamo $w(t) = Ce^{At}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} \\ \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} \end{bmatrix} = \cancel{-\frac{2}{3}e^{-t}} + \frac{2}{3}e^{2t} + \cancel{\frac{2}{3}e^{-t}} + \frac{4}{3}e^{2t} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}}e^{2t} = 2e^{2t}$

Si noti che la cancellazione del termine contenente il modo associato a $\lambda_1 = -1$ era prevedibile, in quanto i modi INOSSERVABILI non compaiono nella risposta impulsiva del sistema.

Si ha inoltre facilmente che $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{2}{s-2}$

Risposta al gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$

$Y_{grad}(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s-2}$ con $R_1 = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s-2} = -1$, $R_2 = \lim_{s\to 2} \frac{2}{s} = 1$

allora $y_{grad}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{grad}(s)\} = -1\,\delta_{-1}(t) + 1\,e^{2t}$

Non resta che calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^{-2t}$

$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y_{for}(s) = W(s)U(s) = \frac{2}{(s-2)(s+2)}$

Si ha $Y_{for}(s) = \frac{2}{(s-2)(s+2)} = \frac{R_1}{s-2} + \frac{R_2}{s+2}$ con $R_1 = \lim_{s \to 2} Y_{for}(s)(s-2) = +\frac{1}{2}$

$R_2 = \lim_{s \to -2} Y_{for}(s)(s+2) = -\frac{1}{2}$

Allora $y_{for}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{for}(s)\} = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

PROBLEMA 3:

Sia dato un sistema a tempo discreto ad un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva: $w(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{t-1} + \left(\frac{1}{8}\right)^{t-1}$, $w(0) = 0$. Utilizzando la trasformata Z si calcoli la risposta al gradino e la risposta armonica all'ingresso $u(t) =$

SOLUZIONE

$$W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = \frac{\mathcal{Z}\{(\frac{1}{4})^t\}}{z} + \frac{\mathcal{Z}\{(\frac{1}{8})^t\}}{z} = \frac{1}{z-\frac{1}{4}} + \frac{1}{z-\frac{1}{8}} = \frac{2z-\frac{3}{8}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{8})}$$

Risposta al gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow \mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{z}{z-1} = U(z)$

$$Y_{grad}(z) = W(z) \cdot U(z) = \frac{(2z-\frac{3}{8})z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{8})(z-1)}$$

$$\frac{Y_{grad}(z)}{z} = \frac{2z-\frac{3}{8}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{8})(z-1)} = \frac{R_1}{z-\frac{1}{4}} + \frac{R_2}{z-\frac{1}{8}} + \frac{R_3}{z-1}$$

$R_1 = \lim_{z \to \frac{1}{4}} \frac{2z-\frac{3}{8}}{(z-\frac{1}{8})(z-1)} = \frac{+\frac{1}{8}}{(\frac{1}{8})(-\frac{3}{4})} = -\frac{4}{3}$

$R_2 = \lim_{z \to \frac{1}{8}} \frac{2z-\frac{3}{8}}{(z-\frac{1}{4})(z-1)} = \frac{-\frac{1}{8}}{(-\frac{1}{8})(-\frac{7}{8})} = -\frac{8}{7}$

$R_3 = \lim_{z \to 1} \frac{2z-\frac{3}{8}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{8})} = \frac{\frac{13}{8}}{(\frac{3}{4})(\frac{7}{8})} = \frac{52}{21}$

nota: $R_1 + R_2 + R_3 = 0$ utile verifica nel caso $D = 0$.

dunque calcolo $y_{grad}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{R_1 z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{R_2 z}{z-\frac{1}{8}} + \frac{R_3 z}{z-1}\right\} =$

$$= -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^t - \frac{8}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^t + \frac{52}{21}\delta_{-1}(t).$$

Risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ $\quad M = 2,\ \omega = \frac{\pi}{2},\ \varphi = 0$

$$|W(z)|\Big|_{z=e^{j\omega}}\Big|_{\omega=\frac{\pi}{2}} = |W(j)| = \left|\frac{2j-3/8}{(j-\frac{1}{4})(j-\frac{1}{8})}\right| = \frac{\sqrt{\frac{9}{64}+4}}{\sqrt{\frac{1}{16}+1}\sqrt{\frac{1}{64}+1}} \cong 1,96$$

$$\angle W(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}\Big|_{\omega=\frac{\pi}{2}} = \angle W(j) = \angle\left(2j-\tfrac{3}{8}\right) - \angle\left(j-\tfrac{1}{4}\right) - \angle\left(j-\tfrac{1}{8}\right) =$$

$$= +\mathrm{arctg}\left(\frac{-16}{3}\right) + \pi - \mathrm{arctg}(-4) - \pi - \mathrm{arctg}(-8) - \pi =$$

$$= -\pi + \mathrm{arctg}\left(-\frac{16}{3}\right) - \mathrm{arctg}(-4) - \mathrm{arctg}(-8) \simeq -1.75$$

$\Rightarrow y_{arm}(t) = M|W(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{2}} \cos(\omega t + \angle W(e^{j\omega})) \cong +3.92\cos\left(\frac{\pi}{2}t - 1.75\right)$

Problema 4 :

Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati - inosservabili.
2. Si individuino i 4 sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Fornire una sequenza di ingressi tali che, a partire dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, portino lo stato del sistema in $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

SOLUZIONE

Iniziamo dal calcolo di $R = [B \; AB \; A^2B]$, $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$, matrici di raggiungibilità e controllabilità.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

È facile verificare che $\text{rank}(R) = 2$, in quanto, ad esempio, la terza colonna è ottenuta sommando le prime due e cambiando di segno il vettore risultante.

Dunque $\mathcal{R} = \text{Im}(R) = \text{span}\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} = \text{span}\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_1+v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

Anche Q ha rango 2 (prima colonna = − terza) $\Rightarrow \dim(\mathcal{N}(Q)) = 1$

Dunque $\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \{w : Q\,w = 0\}$ e' t.c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{I} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

I sottospazi:

$X_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ in quanto il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è generabile da $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

X_2 e' t.c. $X_1 \oplus X_2 = \mathcal{R} \Rightarrow X_2 = \mathcal{R}$ sottospazio degli stati ragg. e oss.

X_3 e' t.c. $X_1 \oplus X_3 = \mathcal{I} \Rightarrow X_3 = \mathcal{I}$ sottospazio degli stati non ragg. e inoss.

X_4 e' t.c. $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 = \mathbb{R}^3$ essendo $X_2 \cap X_3 = \{0\} \Rightarrow X_2 \oplus X_3 = \mathbb{R}^3 \Rightarrow X_4 = \{0\}$.

Per risolvere il terzo punto basta scrivere $x(1) = Ax(0) + Bu(0)$ ed essendo $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x(1) = Bu(0)$ da cui per $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ si ha $x(1) = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(0) \\ 0 \end{bmatrix}$, che comunque scelto $u(0)$ non permette di ottenere $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

All'istante $t=2$ si ha $x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(1) = \begin{bmatrix} -u(0) \\ u(0) \\ u(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(1) \\ u(1) \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x(2) = \begin{bmatrix} -u(0) + u(1) \\ u(0) + u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ se $\begin{cases} u(0) = 1 \\ u(1) = 1 \end{cases}$.

Problema 5 Sia dato il sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = (\gamma-4)x_1 - (x_2+1) \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + (\gamma-4)(x_2+1)^3 \end{cases}$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0,-1)$ al variare del parametro γ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica).

SOLUZIONE:

Iniziamo con l'analisi mediante il metodo indiretto ("della linearizzazione").

$$J(x)\Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} \gamma-4 & -1 \\ 2 & 3(\gamma-4)(x_2+1)^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} \gamma-4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Studio del segno della parte reale degli autovalori di $J(x_e)$:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - J) = (\lambda - (\gamma-4))\cdot\lambda + 2 = \lambda^2 - (\gamma-4)\lambda + 2 = \lambda^2 + (4-\gamma)\lambda + 2$$

secondo il criterio di Cartesio, se non vi sono variazioni di segno tra i coefficienti di $p(\lambda)$, esso ha tutti autovalori a parte reale negativa

Ciò è vero se $4-\gamma > 0$, ovvero se $\boxed{\gamma < 4}$ $\Rightarrow$ x_e è localmente asint. stabile

Se invece $\gamma > 4$ avremo 2 variazioni di segno $\Rightarrow$ due autovalori a parte reale positiva

$\Rightarrow$ x_e è INSTABILE

E infine per $\gamma = 4$ $J(x_e)$ ha due autovalori a parte reale nulla $\Rightarrow$ CASO CRITICO, nulla si può concludere sulla natura di x_e.

Studiamo il caso critico ($\gamma = 4$) con il metodo diretto di Lyapunov

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_2+1) \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \end{cases}$$

(si noti che essendo questo un sistema lineare, non è necessario utilizzare il metodo diretto, basterebbe osservare che definendo $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2+1$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = 2\xi_1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{autovalori} \begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{2} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{2} \end{cases} \quad x_e \text{ semplicemente stabile}$$
)

Utilizzo $V(x) = \frac{\alpha}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2+1)^2$ con $\alpha > 0$

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & (x_2+1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -(x_2+1) \\ 2x_1 \end{bmatrix} = -\alpha x_1(x_2+1) + 2x_1(x_2+1)$$

e chiaramente per $\alpha = 2 > 0$ si ha $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_e SEMPLICEMENTE STABILE

RIASSUMENDO:

$$\begin{cases} \gamma > 4 \Rightarrow x_e \text{ INSTABILE} \\ \gamma = 4 \Rightarrow x_e \text{ SEMPLICEMENTE STABILE} \\ \gamma < 4 \Rightarrow x_e \text{ LOC. ASINT. STABILE.} \end{cases}$$