SCRITTO D'ESAME DI TEORIA DEI SISTEMI del 10 gennaio 2017

Soluzioni a cura di Vittorio De Iuliis vittorio.deiuliis@graduate.univaq.it

Problema 1

Disegnare i diagrammi di Bode e polare di $W(s) = K \cdot \dfrac{2(s+5)}{s(s-1)^2}$ per $K=1$

Scriviamo $\tilde{W}(s) = W(s)\big|_{K=1} = \dfrac{2(s+5)}{s(s-1)^2} = \dfrac{2\cdot 5\left(1+\frac{s}{5}\right)}{s\,(-1)(1-s)(-1)(1-s)} = 10\,\dfrac{\left(1+\frac{s}{5}\right)}{(1-s)^2}$

Riconosciamo i seguenti termini (in forma di Bode):

• guadagno $K_{\tilde{W}} = 10$
- MODULO $K_{\tilde{W}\,dB} = 20\log_{10}|K_{\tilde{W}}| = 20\log_{10}(10) = 20\,dB$
- FASE $\angle K_{\tilde{W}} = \angle 10 = 0$ (numero reale positivo)

• termine binomio al numeratore

$\left(1+\frac{s}{5}\right)\Big|_{s=j\omega} = \left(1+\frac{j\omega}{5}\right) \rightarrow \omega_2 = 5\,rad/s$ pulsazione di taglio.

contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di $+20dB/dec$ in $[5,+\infty)$
e al diagramma delle fasi con una pendenza di $+\frac{\pi}{4}\,rad/dec$ in $[0.5, 50]$

• termine monomio al denominatore $s = j\omega$

contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di $-20dB/dec$ in $(0,+\infty)$
e al diagramma delle fasi con uno spostamento globale di $-\frac{\pi}{2}\,rad$.

• termine binomio (doppio) al denominatore

$(1-s)^2 \longrightarrow \omega_1 = 1\,rad/s$ pulsazione di taglio

contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di $+40dB/dec$ in $[1,+\infty)$
e al diagramma delle fasi con una pendenza di $+\frac{\pi}{2}\,rad/dec$ in $[0.1, 10]$

NOTA: la pendenza nel diagramma delle fasi sarebbe negativa in quanto il termine è al denominatore, ma si noti che la parte immaginaria ha segno negativo $(1-s)^2 = (1-j\omega)^2$ e dunque il termine binomio ha fase negativa: $-\left(-\frac{\pi}{2}\,rad/dec\right) = +\frac{\pi}{2}\,rad/dec$.

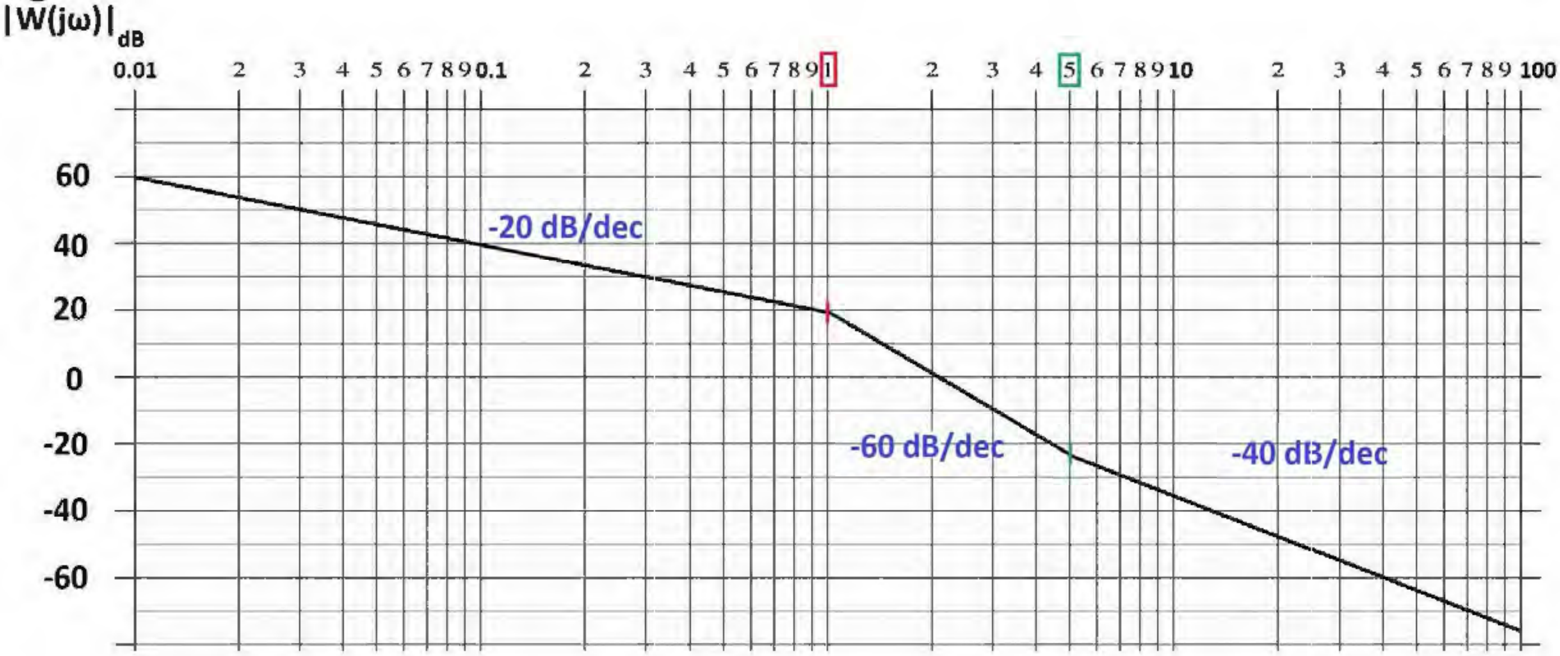
Tali contributi sono riassunti nelle tabelle che seguono.
Si noti che il diagramma (asintotico), per effetto del guadagno $K_{\tilde{W}}$, deve passare per il punto $(\omega, |\cdot|_{dB}) = (1, 20dB)$.

Diagramma dei moduli

INTERVALLO	PENDENZA
$\omega < 1 \frac{rad}{s}$	$-20\ dB/dec$
$1 < \omega < 5 \frac{rad}{s}$	$-60\ dB/dec$
$5 < \omega$	$-40\ dB/dec$

Diagramma delle fasi

INTERVALLO	PENDENZA
$\omega < 0.1\ rad/s$	$0\ rad/dec$
$0.1 < \omega < 0.5\ rad/s$	$+\pi/2\ rad/dec$
$0.5 < \omega < 10\ rad/s$	$+\frac{3}{4}\pi\ rad/dec$
$10 < \omega < 50\ rad/s$	$+\pi/4\ rad/dec$
$50 < \omega$	$0\ rad/dec$



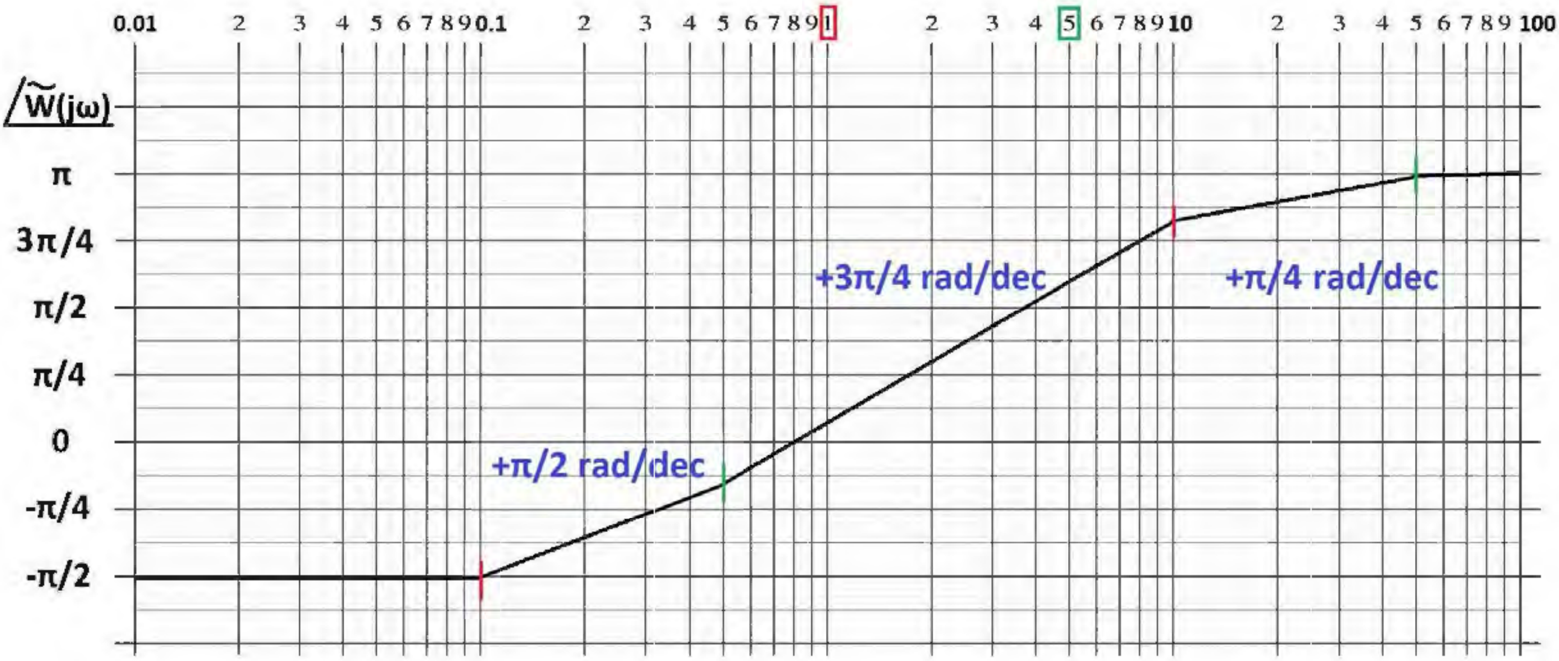


Diagramma polare di $\tilde{W}(j\omega)$ $\left(= W(j\omega) \text{ per } K = 1\right)$

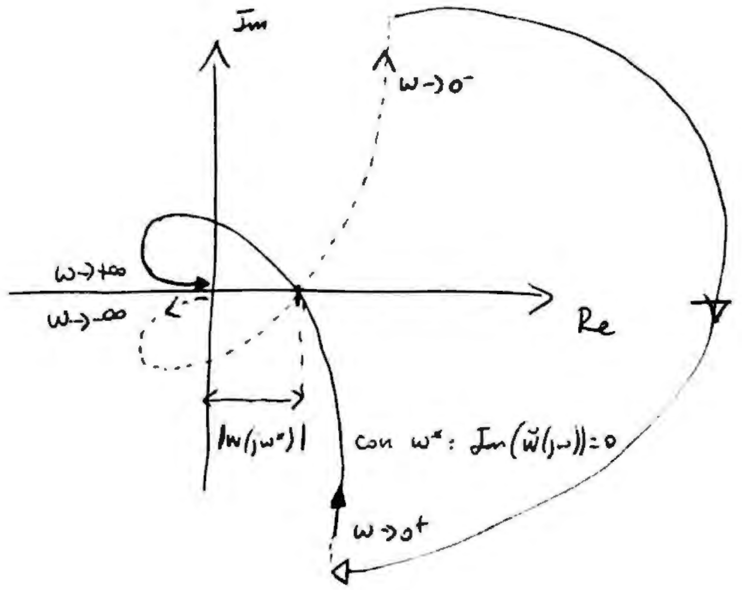
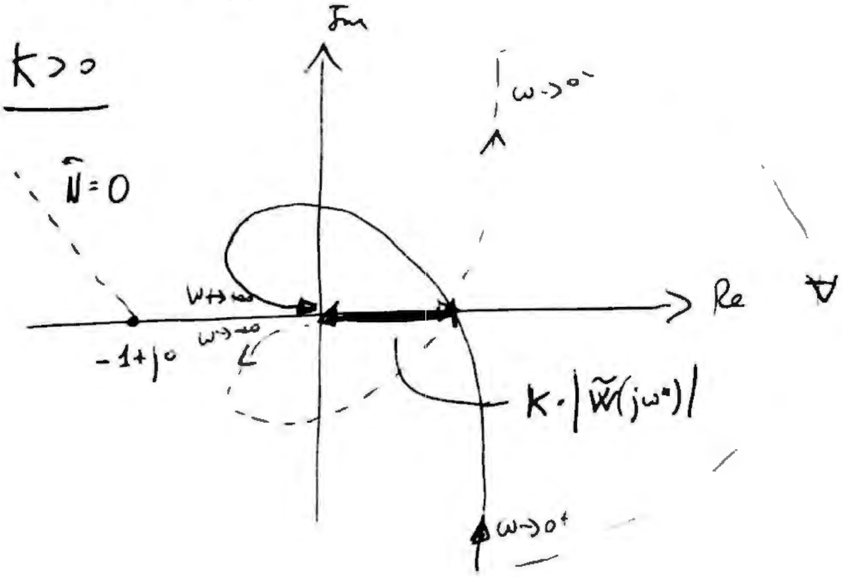


Diagramma polare di $W(j\omega)$ al variare di $K \in \mathbb{R}$ e cenni sul criterio di Nyquist.

K>0

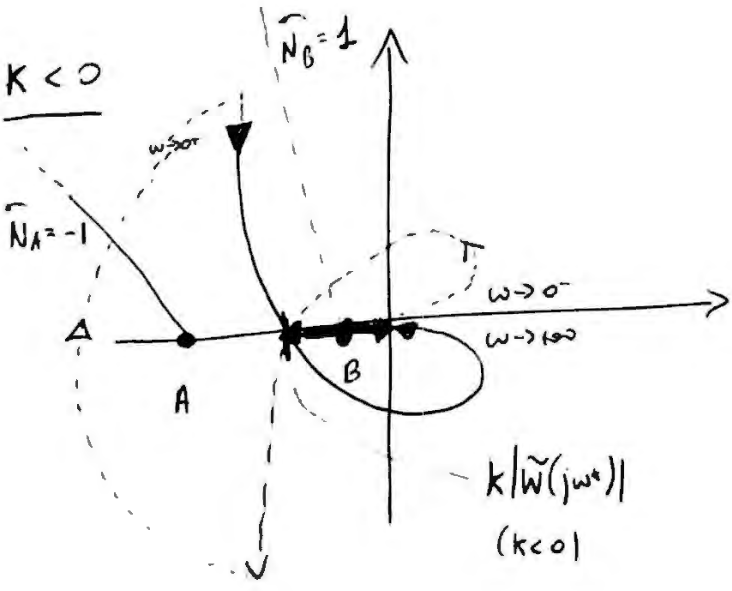


$P_{AP} = 2$

$P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N} = 2$

↳ W_{CH} (sistema a ciclo chiuso) ha 2 poli a parte reale positiva $\forall K>0$ ⇒ È INSTABILE $\forall K>0$

K<0



$P_{AP} = 2$ $\quad \tilde{N}$ varia al variare di $K<0$, infatti il punto critico $-1+j0$ può essere in A se $K|\tilde{W}(j\omega^*)| < 1$ o in B se $K|\tilde{W}(j\omega^*)| > 1$

Ⓐ: $P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_A = 2-(-1) = 1$

Ⓑ: $P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_B = 3$

In entrambi i casi il sistema a ciclo chiuso è instabile. Calcoli dettagliati su ω^*, $|\tilde{W}(j\omega^*)|$ necessari per stabilire gli intervalli esatti.

Prima di completare l'applicazione del criterio di Nyquist calcolando ω^* e $|\tilde{W}(j\omega^*)|$, completiamo il punto 2 del problema, calcolando il denominatore della f.d.t. a ciclo chiuso:

$$W_{CH}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{N(s)/D(s)}{1+N(s)/D(s)} = \frac{N(s)}{D(s)+N(s)} \Rightarrow D_{CH}(s) = D(s) + N(s)$$

dove $N(s)$ dipende da K!

Si ha
$$D_{CH}(s) = s(s-1)^2 + 2K(s+5) = s(s^2-2s+1) + 2Ks + 10K$$
$$= s^3 - 2s^2 + (2K+1)s + 10K = D_{CH}(s).$$

A questo polinomio applichiamo il criterio di Routh, che permette dunque di studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ (ciò è realizzato studiando il segno dei poli di $W_{CH}(s)$, ovvero delle radici di $D_{CH}(s)$).

$$D_{CH}(s) = s^3 - 2s^2 + (2K+1)s + 10K$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K+1 \\ 2 & -2 & 10K \\ 1 & \frac{10K+4K+2}{2} & \\ 0 & 10K & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K+1 \\ 2 & -2 & 10K \\ 1 & 7K+1 & \\ 0 & K & \end{array}$$

studio del segno della prima colonna:

		$-1/7$		0	
1	$+$		$+$		$+$
-2	$-$		$-$		$-$
$7K+1$	$-$		$+$		$+$
K	$-$		$-$		$+$
	1V		3V		2V

se $K < -\frac{1}{7}$ una variazione di segno
↦ $P_{CH} = 1$, sistema a ciclo chiuso INSTABILE

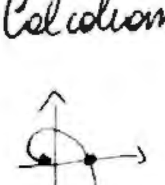
se $K \in (-\frac{1}{7}, 0)$ tre variazioni di segno ↦ $P_{CH} = 3$, sistema a ciclo chiuso INSTABILE

se $K > 0$ due variazioni di segno ↦ $P_{CH} = 2$ sistema a ciclo chiuso INSTABILE

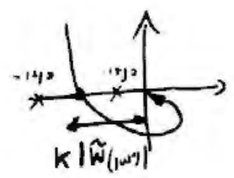
Dunque il sistema a ciclo chiuso è instabile $\forall K \in \mathbb{R}$ ③

Cerchiamo conferma di ciò completando l'applicazione del criterio di Nyquist.

Calcoliamo dapprima l'intersezione del diagramma di $\tilde{W}(j\omega)$ con l'asse reale



$\Leftrightarrow$ Per $K<0$



$$\omega^* \text{ è t.c. } Im(\tilde{W}(j\omega))=0 \Leftrightarrow Im\left\{\frac{(j\omega+5)}{j\omega(j\omega-1)^2}\right\}=0 \Leftrightarrow \left\{\frac{(j\omega+5)}{-j\omega^3+2\omega^2+j\omega}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow Im\left\{\frac{(j\omega+5)}{2\omega^2+j(\omega-\omega^3)}\right\}=0 \Leftrightarrow Im\left\{\frac{(j\omega+5)\cdot[2\omega^2-j(\omega-\omega^3)]}{\underbrace{[2\omega^2+j(\omega-\omega^3)][2\omega^2-j(\omega-\omega^3)]}_{\text{reale!}}}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow Im\left\{(j\omega+5)[2\omega^2-j(\omega-\omega^3)]\right\}=0 \Leftrightarrow 2\omega^3-5(\omega-\omega^3)=0$$

$$7\omega^3-5\omega=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=0 \text{ (banale)}\\ \omega^*_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{7}}\ \frac{rad}{s}\end{cases}$$

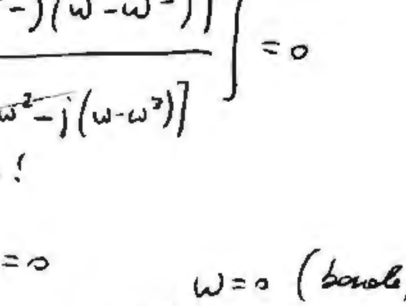
otteniamo sia la pulsazione positiva che quella negativa (ovviamente).

Sarà sufficiente calcolare $|\tilde{W}(j\omega^*)|$ per solo una delle due (es. la positiva) in quanto $|\tilde{W}(j\omega_1^*)|=|W(j\omega_2^*)|$ (basta vedere il grafico!)

$W(j\omega)$ per $K<0$

$$|W(j\omega_1^*)| = \left|\frac{2(j\sqrt{\frac{5}{7}}+5)}{j\sqrt{\frac{5}{7}}(j\sqrt{\frac{5}{7}}-1)^2}\right| = \frac{2\sqrt{\frac{5}{7}+25}}{\sqrt{\frac{5}{7}}\left(\frac{5}{7}+1\right)} = 7.$$

Dunque



Segue subito che se $7K<-1 \Leftrightarrow K<-\frac{1}{7}$ allora il punto critico, in riferimento alla discussione svolta a pagina 3, è in B (e dunque per $K<-\frac{1}{7}$ $P_{CH}=3$) altrimenti, se $7K>-1$, il punto critico è in A (e dunque per $K\in(-\frac{1}{7},0)$ $P_{CH}=1$)

Ciò conferma pienamente l'analisi di stabilità fatta con Routh:

$K>0 \rightarrow P_{CH}=2$ INSTABILITÀ a ciclo chiuso

$K\in(-\frac{1}{7},0) \rightarrow P_{CH}=1$ INSTABILITÀ a ciclo chiuso

$K<-1/7 \rightarrow P_{CH}=3$ INSTABILITÀ a ciclo chiuso.

PROBLEMA 2 Sistema a tempo continuo con $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Iniziamo dalla dinamica dei modi naturali del sistema:

$$p(\lambda) : \det(\lambda I - A) = \left\| \begin{matrix} \lambda+2 & -4 \\ -3 & \lambda-2 \end{matrix} \right\| = 0 \iff (\lambda-2)(\lambda+2) - 12 = 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 4 & Re(\lambda_1) > 0 \quad \text{MODO INSTABILE} \\ \lambda_2 = -4 & Re(\lambda_2) < 0 \quad \text{MODO ASINTOTICAMENTE STABILE} \end{cases}$$

Per discutere l'osservabilità e l'eccitabilità dei modi è necessario completare la decomposizione spettrale di A (utile anche per il calcolo di e^{At}).

Autovettori destri di A:

$$u_1 \text{ è t.c. } (\lambda_1 I - A) u_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 6x - 4y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3} y$$

u_1, allora, avrà la seguente struttura: $u_1 = \begin{pmatrix} 2/3\, y \\ y \end{pmatrix}$ e per $y = \frac{3}{2} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

$$u_2 \text{ è t.c. } (\lambda_2 I - A) = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -3x - 6y = 0 \end{cases} \iff x = -2y$$

u_2 allora ha la struttura: $u_2 = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$ e per $y = -1 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Decomposizione spettrale di A:

$$A = U \Lambda V \quad \text{con} \quad U = [u_1 \mid u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$V = U^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1/4 & 1/2 \\ 3/8 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1^T \\ v_2^T \end{array}$$

Osservabilità dei modi associati a λ_1 e λ_2:

$C \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ il 1° modo è osservabile in uscita.

$C \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +2 \\ -1 \end{bmatrix} = +2 \neq 0 \Rightarrow$ il 2° modo è osservabile in uscita

Eccitabilità per impulsi in ingresso:

$v_1^T \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$ il 1° modo NON è eccitabile per ingressi impulsivi.

$v_2^T \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{6}{8} - \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ il 2° modo è eccitabile per ingressi impulsivi.

Calcolo della funzione di transizione dello stato $\phi(t) = e^{At}$.

Sfruttando la decomposizione spettrale è possibile calcolare $e^{At} = U e^{\Lambda t} V = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T$

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/8 & -1/4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{4t} & 2e^{-4t} \\ \frac{3}{2} e^{4t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/8 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{3}{4} e^{-4t} & \frac{1}{2} e^{4t} - \frac{1}{2} e^{-4t} \\ \frac{3}{8} e^{4t} - \frac{3}{8} e^{-4t} & \frac{3}{4} e^{4t} + \frac{1}{4} e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$\parallel (*)$

è facile verificare che $e^{At}\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Calcolo della risposta impulsiva:

$$w(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = Ce^{At}B = [1 \quad 0][*]\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{4} e^{4t} + \frac{3}{4} e^{-4t} \;\; \frac{1}{2} e^{4t} - \frac{1}{2} e^{-4t}\right] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -2e^{-4t}$$

Si ha facilmente che la funzione di trasferimento del sistema è $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$

$\hookrightarrow W(s) = \mathcal{L}\{-2e^{-4t}\} = -\frac{2}{s+4}$

Sia la risposta impulsiva che la funzione di trasferimento, che rappresentano tutta l'informazione disponibile sul legame ingresso-uscita del sistema, contengono unicamente informazioni sull'autovalore $\lambda_1 = -4$ (asintoticamente stabile). Infatti, essendo il modo naturale instabile NON ECCITABILE per ingressi impulsivi, il polo ad esso associato non compare in $W(s)$ (e ovviamente il modo naturale non compare in $w(t)$). Dunque nel passaggio dalla rappresentazione con lo spazio di stato (matrici A, B, C, D) a quella ingresso-uscita ($w(t), W(s)$), si ha perdita d'informazione sulla presenza di un modo naturale INSTABILE.

Calcoliamo ora la risposta forzata (dell'uscita) all'ingresso $u(t) = e^t \sin(t)$

Sfruttiamo il dominio di Laplace, nel quale $Y_f(s) = W(s)\,U(s)$.

Occorre calcolare $U(s) = \mathcal{L}\left(u(t)\right) = \mathcal{L}\left(e^t \sin(t)\right)$

Si ha che, in generale, $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\sin(\omega t)\right\} = \dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$ e dunque per $\begin{cases}\alpha=1\\ \omega=1\end{cases}$

si ha $U(s) = \mathcal{L}\left\{e^t \sin(t)\right\} = \dfrac{1}{(s-1)^2+1} = \dfrac{1}{s^2-2s+2} = \dfrac{1}{(s-1-j)(s-1+j)}$

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) = -\frac{2}{(s+4)(s-1-j)(s-1+j)} = \frac{R_1}{s+4} + \frac{R_2}{s-1-j} + \frac{R_2^*}{s-1+j}$$

$$R_1 = \lim_{s\to -4} Y_f(s)(s+4) = \lim_{s\to -4} -\frac{2}{s^2-2s+2} = -\frac{2}{26} = -\frac{1}{13}$$

$$R_2 = \lim_{s\to 1+j} Y_f(s)(s-1-j) = \lim_{s\to 1+j}\left(-\frac{2}{s+4}\cdot\frac{1}{s-1+j}\right) = -\frac{2}{5+j}\cdot\frac{1}{2j} = -\frac{2}{10j-2} =$$

$$= -\frac{2(-2-10j)}{(-2+10j)(-2-10j)} = \frac{4+20j}{4+100} = \frac{1}{26} + j\frac{5}{26} \implies R_2^* = 1/26 - j\,5/26$$

NOTA: $R_1 + R_2 + R_2^* = 0$ ✓

$$\implies Y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{13}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{26}\left[\frac{1}{s-1-j} + \frac{1}{s-1+j}\right] + \frac{5}{j26}\left[\frac{1}{s-1+j} - \frac{1}{s-1-j}\right]\right\}$$

$$\implies y_f(t) = -\frac{1}{13}e^{-4t} + \frac{1}{26}\left[e^{(1+j)t} + e^{(1-j)t}\right] + \frac{5}{j26}\left[e^{(1-j)t} - e^{(1+j)t}\right]$$

con $e^{(1+j)t} = e^t e^{jt}$, $e^{(1-j)t} = e^t e^{-jt}$ si ha:

$$y_f(t) = -\frac{1}{13}e^{-4t} + \frac{1}{13}e^t\left[\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\right] - \frac{5}{13}e^t\left[\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right]$$

$$= -\frac{1}{13}e^{-4t} + \frac{1}{13}e^t\cos(t) - \frac{5}{13}e^t\sin(t).$$

PROBLEMA 3

La risposta impulsiva del sistema a T.D. in esame è $w(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t - \left(\frac{2}{3}\right)^t$

La funzione di trasferimento si ottiene semplicemente calcolando la trasformata $\mathcal{Z}$ di $w(t)$: $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = \mathcal{Z}\{\left(\frac{1}{3}\right)^t\} - \mathcal{Z}\{\left(\frac{2}{3}\right)^t\} = \frac{z}{z-1/3} - \frac{z}{z-\frac{2}{3}} =$

$$= \frac{z\left(z-\frac{2}{3}\right) - z\left(z-\frac{1}{3}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{z}{3\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)}$$

La risposta al gradino unitario $\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$ si calcola passando per il dominio delle frequenze:

$$Y_g(z) = W(z)\,U(z) \quad \text{con} \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{z}{z-1}$$

$\Rightarrow Y_g(z) = \frac{-\frac{1}{3} z^2}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)(z-1)}$ occorre tornare al dominio del tempo, sviluppando in fratti semplici $\frac{Y_g(z)}{z}$ e calcolando $y_g(t) = \mathcal{Z}\{Y_g(z)\}$

$$\frac{Y_g(z)}{z} = \frac{-\frac{1}{3} z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)(z-1)} = \frac{R_1}{z-1/3} + \frac{R_2}{z-2/3} + \frac{R_3}{z-1}$$

$$R_1 = \lim_{z\to\frac{1}{3}} \frac{-\frac{1}{3} z}{\left(z-\frac{2}{3}\right)(z-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$R_2 = \lim_{z\to\frac{2}{3}} \frac{-1/3 \cdot z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1)} = 2$$

$R_1+R_2+R_3=0$

$$R_3 = \lim_{z\to 1} \frac{-1/3\, z}{\left(z-1/3\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow Y_g(z) = \frac{R_1 z}{z-1/3} + \frac{R_2 z}{z-2/3} + \frac{R_3 z}{z-1} \Rightarrow y_g(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_g(z)\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t + 2\left(\frac{2}{3}\right)^t - \frac{3}{2}\delta_{-1}(t).$

La risposta armonica esiste in quanto gli autovalori (osservabili ed eccitabili) del sistema, che compaiono nella risposta impulsiva, sono asintoticamente stabili $\begin{cases} |1/3| < 1 \\ |2/3| < 1 \end{cases}$.

$u(t) = \sin(\pi t)$ $\begin{cases} M = 1 \\ \omega = \pi \text{ rad/s} \\ \varphi = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow y_{om}(t) = |W(e^{j\omega})| \sin\left(\omega t + \angle W(e^{j\omega})\right)\Big|_{\omega=\pi}$

$$|W(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi} = |W(-1)| = \left|\frac{1/3}{\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}\right| = \frac{1/3}{20/9} = \frac{3}{20}$$

$\angle W(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \angle W(-1) = \angle \frac{1/3}{20/9} = 0$ (reale positivo)

$\Rightarrow y_{om}(t) = \frac{3}{20} \sin(\pi t).$

PROBLEMA 4

Dato il sistema a T.D. con $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$

calcoliamo le basi per $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$. Occorre innanzitutto calcolare la matrice di raggiungibilità del sistema e la matrice di osservabilità.

$$R = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ che ha rango } 2 \implies \dim(\mathcal{R}) = 2$$

La base più immediata per $\mathcal{R}$ è data dalle prime due colonne di R (che sono l.i.). $\implies \mathcal{R} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

È però semplice semplificare questa base sostituendo a b_2 il vettore $\frac{b_2 + b_1}{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_2'$ e in seguito a b_1 il vettore $b_1 - b_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si ha dunque $\mathcal{R} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Matrice di osservabilità:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \implies \text{rank}(Q) = 3 \implies \dim(\mathcal{N}(Q)) = 1$$

Si vede chiaramente che il nullo di Q è l'insieme dei vettori $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ infatti $Q \cdot v = 0$. $\implies \mathcal{I} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Quattro sottospazi della decomposizione di Kalman:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}$ (spazio degli stati raggiungibili e inosservabili)

$\mathcal{X}_2$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \implies \mathcal{X}_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (spazio degli stati raggiungibili e osservabili)

$\mathcal{X}_3$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \implies \mathcal{X}_3 = \{0\}$ (spazio degli stati non raggiungibili e non osservabili)

$\mathcal{X}_4$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \implies \mathcal{X}_4 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (spazio degli stati non ragg. e oss.)

È facile verificare che $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_4 \begin{pmatrix} \text{NON RAGG} \\ \text{e} \\ \text{OSS} \end{pmatrix}$ e $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_2 \begin{pmatrix} \text{RAGG} \\ \text{e} \\ \text{OSS} \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 5

Studiamo la stabilità dell'origine del sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = -K x_1^3 + (1-K) x_1 + 3 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -K x_1^2 x_2 - x_1 x_2 \end{cases}$ (*)

L'origine è d'equilibrio, infatti sostituendo $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ in (*) si verifica che $f_1(x)\big|_{x=(0,0)} = 0$ e $f_2(x)\big|_{x=(0,0)} = 0$.

Studiamo la stabilità di $x_e = (0,0)$ con il metodo indiretto (linearizzazione).

$$J(x)\Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} -3Kx_1^2 + (1-K) & 6x_2 \\ -2Kx_1x_2 - x_2 & -Kx_1^2 - x_1 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1-K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di $J(x)\big|_{x_e}$ sono chiaramente $\begin{cases} \lambda_1 = 1-K \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Sono allora possibili due casi:

- se $1-K > 0 \iff K < 1$ allora $J(x_e)$ ha un autovalore positivo

  Lo x_e è INSTABILE

- se $1-K \leq 0 \iff K \geq 1$ allora $J(x_e)$ ha (comunque scelto $K \geq 1$) almeno un autovalore nullo $\Rightarrow$ CASO CRITICO (nulla può concludersi sulla stabilità di x_e)

Studiamo il caso critico con il metodo diretto di Lyapunov, scegliendo la candidata quadratica $V(x) = \frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ con $\alpha > 0$ (affinché $V(x) > 0$)

Si ha $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K x_1^3 + (1-K) x_1 + 3 x_2^2 \\ -K x_1^2 x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) = \underline{-\alpha K x_1^4} + \underline{\alpha(1-K) x_1^2} + \underline{\underline{3\alpha x_1 x_2^2}} - \underline{K x_1^2 x_2^2} - \underline{\underline{x_1 x_2^2}}$$

i termini — sono sempre negativi in quanto $\alpha > 0$ e $K \geq 1$ (sono tutti termini di grado pari)

i termini = non sono necessariamente negativi, ma posso annullarli scegliendo $\alpha = 1/3$

Lo per $\alpha = \frac{1}{3}$, con $V(x) = \frac{1}{6} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 > 0$ si ha $\dot{V}(x) = -\frac{1}{3} K x_1^4 + \frac{1}{3}(1-K) x_1^2 - K x_1^2 x_2^2$

e $\dot{V}(x) \leq 0$ in quanto è sempre negativa ad eccezione che negli infiniti punti $(x_1, x_2) = (0, \gamma)$ con $\gamma \in \mathbb{R}$, nei quali è nulla. $\Rightarrow \begin{cases} K < 1 \Rightarrow x_e \text{ INSTABILE} \\ K \geq 1 \Rightarrow x_e \text{ SEMPLICEMENTE STABILE} \end{cases}$