SCRITTO D'ESAME DI TEORIA DEI SISTEMI del 14/02/2017

Soluzioni a cura di Vittorio De Iuliis - vittorio.deiuliis@graduate.univaq.it

PROBLEMA 1 : Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{8(s-1)}{s^2+4s+4}$$

1) Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$

2) Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento di ciclo chiuso

3) Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento di ciclo chiuso al variare di $K\in(-\infty,+\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

SOLUZIONE : Per $K=1$ si ottiene $\tilde{W}(s) = W(s)\big|_{K=1} = \dfrac{8(s-1)}{s^2+4s+4} = \dfrac{-8}{4}\,\dfrac{\left(1-\frac{s}{1}\right)}{\left(1+\frac{4s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)}$

$\mapsto \tilde{W}(s) = -2\,\dfrac{(1-s)}{\left(1+s+\frac{s^2}{4}\right)}$ nella quale riconosciamo i seguenti termini:

• GUADAGNO $K_{\tilde{W}}$: $K_{\tilde{W}} = -2$ — MODULO $|K_{\tilde{W}}|_{dB} = 20\log_{10}|-2| = 20\log_{10}2 = 6\,dB$; FASE $\angle K_{\tilde{W}} = \pm\pi$ (numero reale negativo)

• TERMINE BINOMIO al numeratore: $(s-1) = -\left(1-\frac{s}{1}\right) \mapsto \omega_\tau = 1\,rad/s$ pulsazione di taglio

Contribuisce nel diagramma asintotico dei moduli con una pendenza di $+20\,dB/dec$ da $1\,\frac{rad}{s}$ in poi e nel diagramma delle fasi con una pendenza di $-\pi/4\,\frac{rad}{dec}$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{10}\omega_\tau, 10\omega_\tau\right] = [0.1, 10]$

• TERMINE TRINOMIO al denominatore : $(s^2+4s+4) = 4\left(1+\frac{4s}{4}+\frac{s^2}{4}\right) = 4\left(1+s+\frac{s^2}{4}\right) = 4\left(1+\frac{2\xi s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)$

se e solo se $\omega_n = 2\,rad/s$ e $\xi = 1 \mapsto$ smorzamento unitario dunque il termine in esame è un "finto" trinomio, ovvero un binomio doppio, infatti $s^2+4s+4 = (s+2)^2$

Tale termine contribuisce al diagramma dei moduli con la pendenza $-40\,dB/dec$ da $\omega_n=2$ in poi e a quello delle fasi con la pendenza $-\pi/2\,rad/dec$ nell'intervallo $[0.1\omega_n, 10\omega_n] = [0.2, 20]\,\frac{rad}{s}$

NOTA : Non essendoci termini monomi, per $\omega\to 0^+$ il diagramma dei moduli è orizzontale sull'ampiezza di $|K_{\tilde{W}}|_{dB} = 6\,dB = |W(j0)|_{dB}$ e ciò ci dà anche l'informazione su una delle (molteplici) pulsazioni di attraversamento dell'asse reale del diagramma polare ($\omega=0$). Inoltre, il diagramma delle fasi partirà da $+\pi\,rad/s$ e terminerà in $-\frac{\pi}{2}\,\frac{rad}{s}$ (asintoticamente), infatti $\angle W(j\omega)\big|_{\omega\gg1} \approx \angle\frac{j\omega}{(j\omega)^2} = -\pi/2\,rad/s$

Quanto visto fin qui può essere riassunto nelle seguenti tabelle:

MODULI

intervallo	pendenza
$\omega < 1$ rad/s	0 dB/dec
$1 < \omega < 2$ rad/s	+20 dB/dec
$2 < \omega$	-20 dB/dec

FASI

intervallo	pendenza
$\omega < 0.1$ rad/s	0 rad/dec
$0.1 < \omega < 0.2$ rad/s	$-\pi/4$ rad/dec
$0.2 < \omega < 10$ rad/s	$-\frac{3}{4}\pi$ rad/dec
$10 < \omega < 20$ rad/s	$-\pi/2$ rad/dec
$20 < \omega$	0 rad/dec

Si noti che per $\xi = 1$ il cosiddetto metodo degli α per approssimare il termine trinomio ricade esattamente nell'approssimazione ottenuta su due decadi, infatti

$$\alpha = 5\xi + \sqrt{25\xi^2+1} \simeq 10 \Rightarrow \frac{\omega_n}{\alpha} \simeq \frac{1}{10}\omega_n, \quad \alpha\omega_n \simeq 10\omega_n \quad e \quad \frac{\pi}{2\log(10)} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/dec}$$

Si ottengono i seguenti diagrammi di Bode:

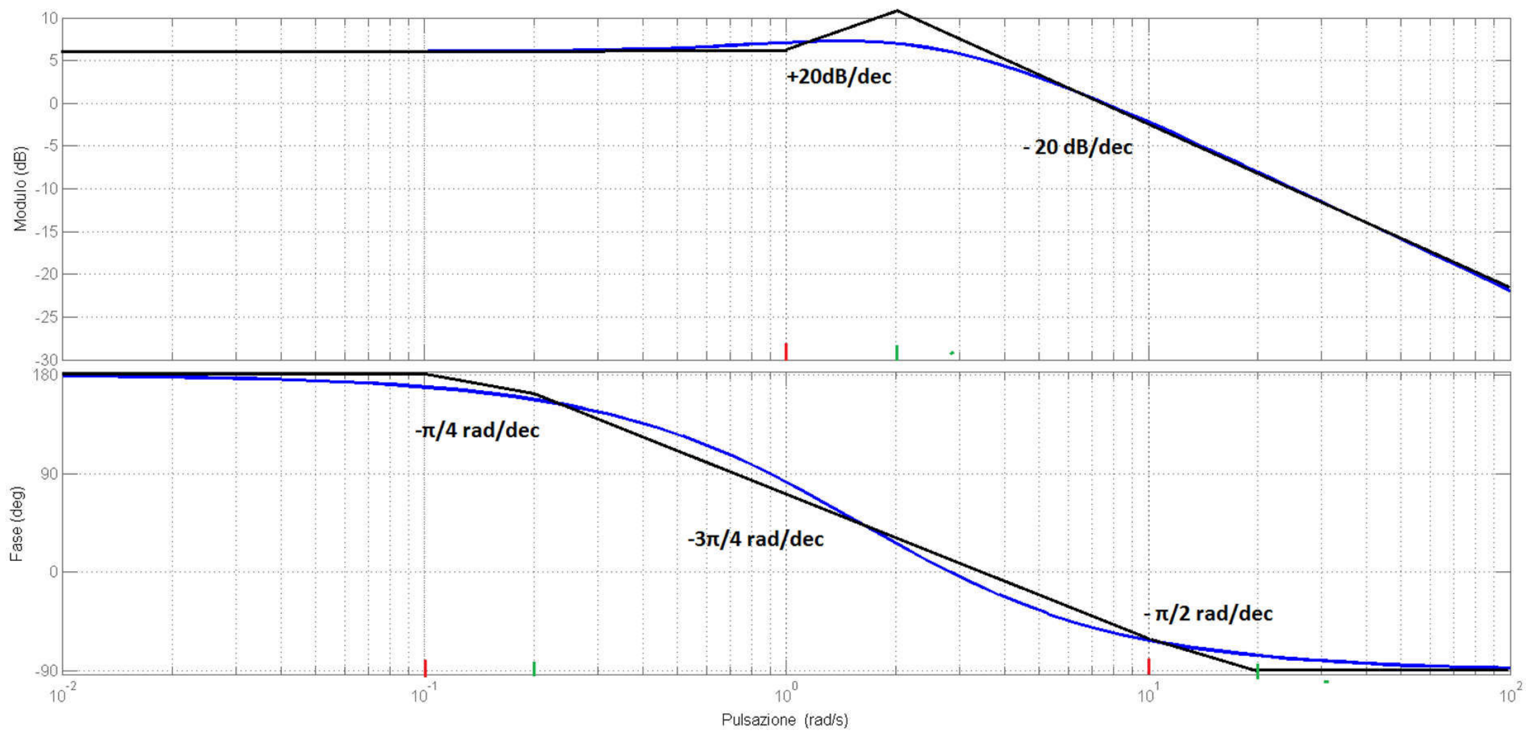
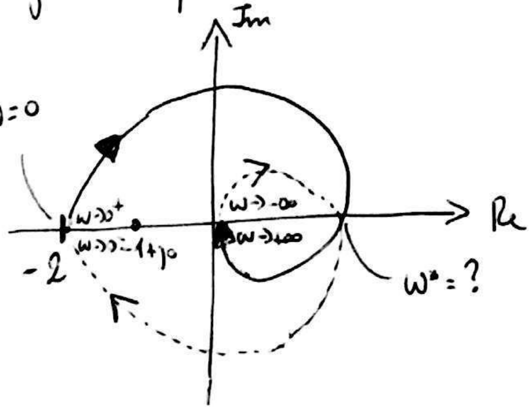


Diagramma polare di $\tilde{W}(j\omega)$



Calcolo della funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$W_{CH}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{K\tilde{W}(s)}{1+K\tilde{W}(s)} = \frac{8K\frac{(s-1)}{s^2+4s+4}}{1+8K\frac{(s-1)}{s^2+4s+4}} = \frac{8K(s-1)}{s^2+4s+4+8K(s-1)} = \frac{N_{CH}(s)}{D_{CH}(s)}$$

Al variare di K, le radici di $D_{CH}(s)$ sono i poli del sistema a ciclo chiuso.

$$D_{CH}(s) = s^2+4s+4+8K(s-1) = s^2+4(1+2K)s+4(1-2K)$$

si tratta di un polinomio di secondo grado: per studiare il segno delle radici della equazione associata è sufficiente utilizzare il CRITERIO DI CARTESIO.

$D_{CH}(s)$ ha tante radici a parte reale positiva tante quante sono le variazioni di segno tra i coefficienti dell'equazione associata ⇒ se $\begin{cases} 1+2K>0 \\ 1-2K>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K>-1/2 \\ K<1/2 \end{cases} \Leftrightarrow K\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$D_{CH}(s)$ ha solo radici a parte reale negativa ⇒ il SISTEMA CONTROREAZIONATO è ASINT. STABILE

Al di fuori di tale intervallo, ovvero per $K\in\left\{\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\right\}$ $D_{CH}(s)$ ha una/due radici positive ⇒ $W_{CH}(s)$ INSTABILE (una se $K>1/2$, due se $K<-1/2$)

Al medesimo risultato si giunge con il CRITERIO DI NYQUIST: determiniamo innanzitutto la pulsazione di attraversamento dell'asse reale $\omega^*\neq 0$ e il corrispondente valore $|W(j\omega^*)|$ da cui ricavare $K|W(j\omega^*)|$ al variare di $K\in(-\infty,+\infty)$.

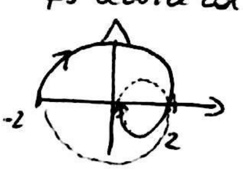
Si noti che essendo $s^2+4s+4=(s+2)^2$, $P_{AP}=0$

ω^* è t.c. $Im\{\tilde{W}(j\omega^*)\}=0 \Rightarrow Im\{\tilde{W}(j\omega)\}=0 \Leftrightarrow Im\left\{\frac{j\omega-1}{-\omega^2+4j\omega+4}\right\}=0$

$\Leftrightarrow Im\left\{\frac{(j\omega-1)(-\omega^2+4-j\omega)}{\underbrace{(-\omega^2+4+4j\omega)(-\omega^2+4-4j\omega)}_{reale}}\right\}=0 \Leftrightarrow Im\{(j\omega-1)(-\omega^2+4+4j\omega)\}=0 \Leftrightarrow -\omega^3+4\omega-4\omega=0$

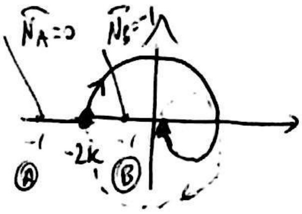
da cui $\omega(8-\omega^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=0 \text{ rad/s, già nota} \\ \omega=\pm\sqrt{8} \text{ rad/s} \end{cases}$ ⇒ occorre calcolare $|\tilde{W}(j\sqrt{8})|$

$$|\tilde{W}(j\sqrt{8})| = \frac{8|j\sqrt{8}-1|}{|-8+4+j4\sqrt{8}|} = \frac{8\sqrt{8+1}}{\sqrt{16+128}} = \frac{24}{12} = 2 \rightarrow$$



I due attraversamenti dell'asse reale di $\tilde{W}(j\omega)$ hanno entrambi ampiezza $|\tilde{W}(j\omega)|=2$ ⇒ gli attraversamenti di $K|\tilde{W}(j\omega)|$ avranno ampiezza K2.

Due casi: $\boxed{K>0}$ con diagramma:



Ⓐ se $-1<-2K \Leftrightarrow K<1/2$ $(K>0)$

$P_{CH}=P_{AP}-\tilde{N}_A=0$

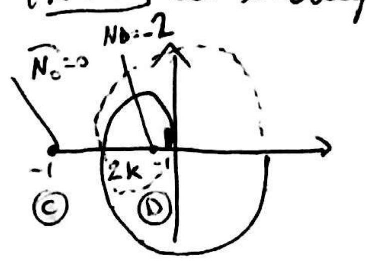
Stabilità asintotica a ciclo chiuso

Ⓑ se $-1>-2K \Leftrightarrow K>1/2$

$P_{CH}=P_{AP}-\tilde{N}_B=1$

instabilità a ciclo chiuso

$\boxed{K<0}$ con il diagramma:



Ⓒ se $-1<2K \Leftrightarrow K>-1/2$ $(K<0)$

$P_{CH}=P_{AP}-\tilde{N}_C=0$ ⇒ stabilità a ciclo chiuso

Ⓓ se $-1>2K \Leftrightarrow K<-1/2$

$P_{CH}=P_{AP}-\tilde{N}_D=2$ ⇒ instabilità a ciclo chiuso

RISULTATI CONFERMANO L'ANALISI PRECEDENTE.

PROBLEMA 2

Dato il sistema a tempo continuo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ 1]$

Sapendo che $\lambda_1 = 1+3j$ e $\pi_1 = \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}$

1) Si calcolino la matrice A e la matrice di transizione dello stato e^{At}

2) Si discutano la stabilità, l'osservabilità e l'eccitabilità dei modi naturali del sistema

3) Si calcolino la risposta impulsiva $W(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.

4) Calcolare la risposta forzata al gradino unitario

SOLUZIONE

Innanzitutto, poiché A è reale, $\lambda_2 = \lambda_1^* = 1-3j$ e $\pi_2 = \pi_1^* = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ciò permette di calcolare A sfruttando la decomposizione spettrale: $A = R \Lambda L$

ove $R = [\pi_1 \vdots \pi_2] = \begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3j & 0 \\ 0 & 1-3j \end{bmatrix}$, $L = R^{-1} = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -1 & j \end{bmatrix}$

$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} l_1^T = [-\frac{1}{2}j \ \ \frac{1}{2}] \\ l_2^T = [\frac{1}{2}j \ \ \frac{1}{2}] \end{matrix}$ $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+3j & 0 \\ 0 & 1-3j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

La matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At} = \begin{cases} Re^{\Lambda t}L \\ \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\pi_i l_i^T = 2\,\mathrm{Re}\{e^{\lambda_1 t}\pi_1 l_1^T\} \end{cases}$

Calcoliamo facilmente $e^{At} = 2\,\mathrm{Re}\{e^{\lambda_1 t}\pi_1 l_1^T\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{e^{(1+3j)t}\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right\}$

$\Rightarrow e^{At} = \mathrm{Re}\left\{e^{t}e^{3jt}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Utilizzando la formula di Eulero $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ si ha:

$$e^{At} = \left\{e^{t}\left[\cos(3t) + j\sin(3t)\right]\begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}\right\} = e^{t}\begin{bmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix}$$

E si verifica facilmente che $e^{A0} = I_2$.

I modi naturali sono entrambi instabili, in quanto $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 1 > 0$.

Eccitabilità: $l_1^T \cdot B = [-\frac{1}{2}j \ \ \frac{1}{2}]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}j \neq 0$ (analogamente $l_2^T \cdot B \neq 0$)

Osservabilità: $C \cdot \pi_1 = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + j \neq 0$ (analogamente $C \cdot \pi_2 \neq 0$)

Avendo trovato che $\begin{cases} l_i^T \cdot B \neq 0 \\ C \cdot \pi_i \neq 0 \end{cases} \ \forall i = 1,2$ $\Rightarrow$ entrambi i modi sono eccitabili e osservabili

Calcolo della risposta impulsiva e della funzione di trasferimento: (3)

$$w(t) = Ce^{At}B + D\Big|_{D=0} = Ce^{At}B = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t}\cos(3t) & -e^{t}\sin(3t) \\ e^{t}\sin(3t) & e^{t}\cos(3t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = e^{t}\left(\sin(3t)+\cos(3t)\right).$$

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \mathcal{L}\{e^{t}\sin(3t)\} + \mathcal{L}\{e^{t}\cos(3t)\}.$$

Ricordando che a) $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(s-\alpha)$

b) $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

si ottiene: $$W(s) = \frac{3}{(s-1)^2+9} + \frac{(s-1)}{(s-1)^2+9} = \frac{s+2}{(s-1)^2+9} = \frac{s+2}{s^2-2s+10}$$

Risposta al gradino $u(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_{grad}(s) = W(s)U(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{s+2}{s(s^2-2s+10)} = \frac{s+2}{s(s-1-3j)(s-1+3j)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s-1-3j} + \frac{R_2^*}{s-1+3j}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} \frac{Y_{grad}(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{s^2-2s+10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$R_2 = \lim_{s\to 1+3j} \frac{Y_{grad}(s)}{(s-1-3j)} = \lim_{s\to 1+3j} \frac{s+2}{s(s-1+3j)} = \frac{3+3j}{(1+3j)(6j)} = \frac{\cancel{3}+\cancel{3}j}{\cancel{18}j - \cancel{18}} = \frac{1+j}{-6+2j}$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{1+j\cdot(-6-2j)}{-6+2j\cdot(-6-2j)} = \frac{-6-2j-6j+2}{40} = \frac{-4-8j}{40} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}j$$

$$\Rightarrow R_3 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}j = R_2^*$$

NOTA: $R_1 + R_2 + R_3 = 0$ (corretto, si ricordi che vale solo se $D=0$).

$$\Rightarrow Y_{grad}(s) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}j\right)\frac{1}{s-1-3j} - \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}j\right)\frac{1}{s-1+3j}$$

$$y_{grad}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{grad}(s)\} = \frac{1}{5}\delta_{-1}(t) - \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5j}\right)e^{(1+3j)t} - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5j}\right)e^{(1-3j)t}$$

$$= \frac{1}{5}\delta_{-1}(t) - \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5j}\right)e^{t}e^{3jt} - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5j}\right)e^{t}e^{-3jt}$$

$$= \frac{1}{5}\delta_{-1}(t) - e^{t}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{e^{3jt}+e^{-3jt}}{2}\right) + e^{t}\frac{2}{5}\left(\frac{e^{3jt}-e^{-3jt}}{2j}\right)$$

$$\Rightarrow y_{grad}(t) = \frac{1}{5}\delta_{-1}(t) - \frac{1}{5}e^{+t}\cos(3t) + \frac{2}{5}e^{t}\sin(3t)$$

PROBLEMA 3

Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva: $w(t) = \begin{cases} (0.4)^{t-1} & t>0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$

1) Calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = (0.2)^t$

2) Calcolare la risposta armonica alla sequenza di ingresso $u(t) = \begin{cases} 3 & t \text{ pari} \\ -3 & t \text{ dispari} \end{cases}$ per $t \geq 0$

$u(t) = 0$ per $t = 0$.

SOLUZIONE

Iniziamo scrivendo $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = \dfrac{\mathcal{Z}\{0.4^t\}}{z} = \dfrac{1}{z-0.4}$

Allora $Y_{fr}(z) = W(z) \cdot U(z)$ con $U(z) = \mathcal{Z}\{(0.2)^t\} = \dfrac{z}{z-0.2}$

$\Rightarrow Y_{fr}(z) = \dfrac{z}{(z-0.2)(z-0.4)}$ e sviluppiamo in fratti semplici $\dfrac{Y_{fr}(z)}{z}$

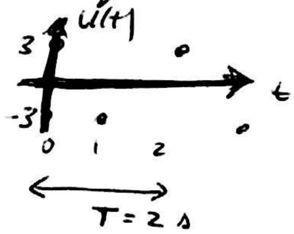
$R_1 = \lim_{z \to 0.2} \dfrac{1}{z-0.4} = -\dfrac{1}{0.2} = -\dfrac{10}{2} = -5$

ottenendo $\dfrac{Y_{fr}(z)}{z} = \dfrac{R_1}{(z-0.2)} + \dfrac{R_2}{(z-0.4)}$ con $R_2 = \lim_{z \to 0.4} \dfrac{1}{z-0.2} = \dfrac{1}{0.2} = \dfrac{10}{2} = 5$

da cui $Y_{fr}(z) = R_1 \dfrac{z}{z-0.2} + R_2 \dfrac{z}{z-0.4} \Rightarrow y_{fr}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{fr}(z)\} = 5(0.4)^t - 5(0.2)^t$.

Per quanto concerne la risposta armonica, si osservi innanzitutto che essa esiste, in quanto l'autovalore osservabile ed eccitabile che compare nella risposta impulsiva del sistema, $\lambda = 0.4$, è asintoticamente stabile ($|0.4| < 1$).

La sequenza d'ingresso sotto esame è il campionamento di un segnale cosinusoidale di periodo $T = 2$ s e ampiezza 3, infatti



$u(t) = M\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$ con $M = 3$, $T = 2$ diviene $u(t) = 3\cos(\pi t)$

Scriviamo dunque: $y_{arm}(t) = \underbrace{M}_{M=3} |W(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} \cos\left(\omega t + \angle W(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} + \varphi\right)$ con $\begin{cases} M = 3 \\ \omega = \pi \text{ rad/s} \\ \varphi = 0 \end{cases}$

$|W(e^{j\pi})| = |W(-1)| = \left|\dfrac{1}{-1-0.4}\right| = \dfrac{1}{1.4} = \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{7}$

$\angle W(e^{j\pi}) = \angle W(-1) = \angle \dfrac{1}{-1-0.4} = \angle -\dfrac{5}{7} = -\pi$ (numero reale negativo)

$\Rightarrow y_{arm}(t) = \dfrac{15}{7}\cos(\pi t - \pi) = \dfrac{15}{7}\cos(\pi(t-1))$.

PROBLEMA 4

Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \; -1 \; 0 \; 1]$$

1) Si individuino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;

2) si individuino i 4 sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman

3) si discutano le proprietà degli stati $x_1 = [2 \; 0 \; 1 \; 0]^T$ e $x_2 = (0 \; -1 \; 0 \; 0)^T$

SOLUZIONE

Matrice di raggiungibilità: $R = [B \; AB \; A^2B \; A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango 2 (due righe nulle e le restanti due l.i.)

$\Rightarrow \dim(\mathcal{R}) = 2$. Base per $\mathcal{R}$: $\mathcal{R} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Matrice di osservabilità: $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2 (due colonne nulle e le restanti due l.i.)

$\Rightarrow \dim(\mathcal{I}) = \dim(\mathcal{N}(Q)) = n - \text{rank}(Q) = 2$.

$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \{v : Q \cdot v = 0\}$ Basta osservare che, essendo la 3ª colonna e la 1ª l.i., l'unico modo per realizzare una combinazione lineare nulla delle colonne di Q è scegliere $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Q \cdot v = 0$. oppure risolvere il sistema associato $Q \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0$.

$\Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

4 sottospazi:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ sottospazio degli stati ragg. e inosservabili.

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{X}_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sottospazio degli stati ragg. e osservabili.

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ sottospazio degli stati non ragg. e inosservabili.

$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ sottospazio degli stati non ragg. e osservabili.

Il vettore $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è non ragg. ($x_1 \notin \mathcal{R}$) e non osservabile ($x_1 \in \mathcal{I}$)

Il vettore $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è non ragg. e osservabile ($x_2 \in \mathcal{X}_4$).

PROBLEMA 5

Sia dato il sistema
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - (x_2-2)^2 \\ \dot{x}_2 = x_1(x_2-2) + \gamma(x_2-2) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che il punto $x_e = (0,2)$ sia d'equilibrio per il sistema, se ne studi la stabilità al variare di $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al pto d'equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov

SOLUZIONE

Iniziamo dallo studio della stabilità locale del punto d'equilibrio $x_e = (0,2)$ (che è d'equilibrio in quanto annulla il sistema di equazioni algebriche $\begin{cases} f_1(x(t)) = 0 \\ f_2(x(t)) = 0 \end{cases}$).

$$J(x)\Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} -1 & -2(x_2-2) \\ (x_2-2) & x_1+\gamma \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e=(0,2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$J(x_e)$ ha i seguenti autovalori: $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ ASINTOTICAMENTE STABILE (modo)} \\ \lambda_2 = \gamma \text{ il cui segno va desunto al variare di } \gamma. \end{cases}$

TRE CASI POSSIBILI:

- $\gamma < 0$ $\Rightarrow$ x_e localmente a. stabile ($J(x_e)$ ha tutti autovalori a parte reale neg.)
- $\gamma = 0$ $\Rightarrow$ CASO CRITICO ($J(x_e)$ ha autovalori A. STABILI ad eccezione di uno a parte reale nulla)
- $\gamma > 0$ $\Rightarrow$ x_e INSTABILE ($J(x_e)$ ha almeno un autovalore a parte reale positiva)

Discutiamo il caso critico $\gamma = 0$, sostituendo tale valore nelle equazioni del sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - (x_2-2)^2 \\ \dot{x}_2 = x_1(x_2-2) \end{cases} \qquad V(x) = \frac{\alpha}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2-2)^2 > 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & (x_2-2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x_1-(x_2-2)^2 \\ x_1(x_2-2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) = -\alpha x_1^2 - \alpha x_1(x_2-2)^2 + x_1(x_2-2)^2$$

scegliendo $\alpha = 1$ si ottiene $\begin{cases} V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2-2)^2 > 0 \\ \dot{V}(x) = -x_1^2 \leq 0 \quad \left(\text{si annulla in ogni stato } x = (0,\beta)\ \forall \beta \in \mathbb{R}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow$ x_e è t.c. $\begin{cases} x_e \text{ INSTABILE se } \gamma > 0 \\ x_e \text{ semplicemente stabile se } \gamma = 0 \\ x_e \text{ ASINTOTICAMENTE STABILE (localmente) se } \gamma < 0. \end{cases}$