

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 06-11-2017

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = \frac{K}{(s-5)(s^2+1)}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad 1].$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (2 punti, facoltativo) Dato il sistema a tempo discreto a un ingresso e una uscita:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 0.5x(t) + 0.2u(t) \\ y(t) &= 5x(t) \end{aligned}$$

si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{X}_3 e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si forniscano un esempio di stato raggiungibile e osservabile, e un esempio di stato non raggiungibile e non osservabile.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1+k)x_1^3(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + (1+k)x_2(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (0,0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio e, solo se necessario, il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e quindici minuti.
