TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 01-02-2018

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{4(s+10)}{s\,(s^2+4s+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. ~~calcolare la matrice la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;~~
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(s)$.
4. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 5\cos(2t)$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

si calcolino la risposta al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(\frac{\pi}{4}t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ e $x_b = [0 \ -1 \quad 0 \ -1]^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1-k)x_1(t) + kx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) - k^2 x_2(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (0, 0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
