TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame dell'8–1–2019

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{32\,(s+1)}{s\,(s^2+8s+16)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At};
2. si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema;
4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(0) = 0, \quad w(t) = \left(\frac{1}{5}\right)^{t-1}, \quad t > 0,$$

1. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario;
2. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si discutano le proprietà strutturali degli stati $x_a = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]^T$ e $x_b = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \big(k-1\big)x_1(t) - 3\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5\,x_1(t) + \big(k-1\big)x_2^3(t) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine è un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
