TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 18-6-2019

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{s-5}{s(s^2+121)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 1+j,\ \lambda_2 = 1-j$.
Sapendo che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro l_1 associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad l_1^T = \begin{bmatrix} j & 1 \end{bmatrix}$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(z)$;
4. calcolare l'evoluzione libera dell'uscita per uno stato iniziale $x(0) = [\,1 \quad -1\,]^T$.

Problema 3. Dato il sistema a tempo continuo ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-t} - e^{-3t}$$

1. Calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$;
2. calcolare, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(2t+\pi)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^3(t)x_2(t) + (k-1)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2(t) - x_2(t) + (k-1)x_1(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
