Quesito 1 (9 punti, tempo stimato 45 minuti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{4(s-1)}{(s^2+1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

① DIAGRAMMI RIPORTATI IN ULTIMA PAGINA

② $W_{CH}(s) = \dfrac{W(s)}{1+W(s)} = \dfrac{N(s)}{D(s)+N(s)}$

$D_{CH}(s) = s^2+1+4K(s-1) = s^2+4Ks+1-4K$

③ Analisi della stabilità con ROUTH-CARTESIO

2	1	$1-4k$
1	$4k$	0
0	$1-4k$	

		0	$\frac{1}{4}$
1	$+$	$+$	$+$
$4k$	$-$	$+$	$+$
$1-4k$	$+$	$+$	$-$
	2V	0V	1V

$K<0$ $\quad M_{CH}=2$, instabilità

$K\in(0,\frac{1}{4})$ $\quad M_{CH}=0$ $\quad$ A.S.

$K=\frac{1}{4}$, $\quad s^2+s = s(s+1) \Rightarrow$ 1 polo nell'origine: S.S.

$K>\frac{1}{4}$, $\quad M_{CH}=1$, instabilità

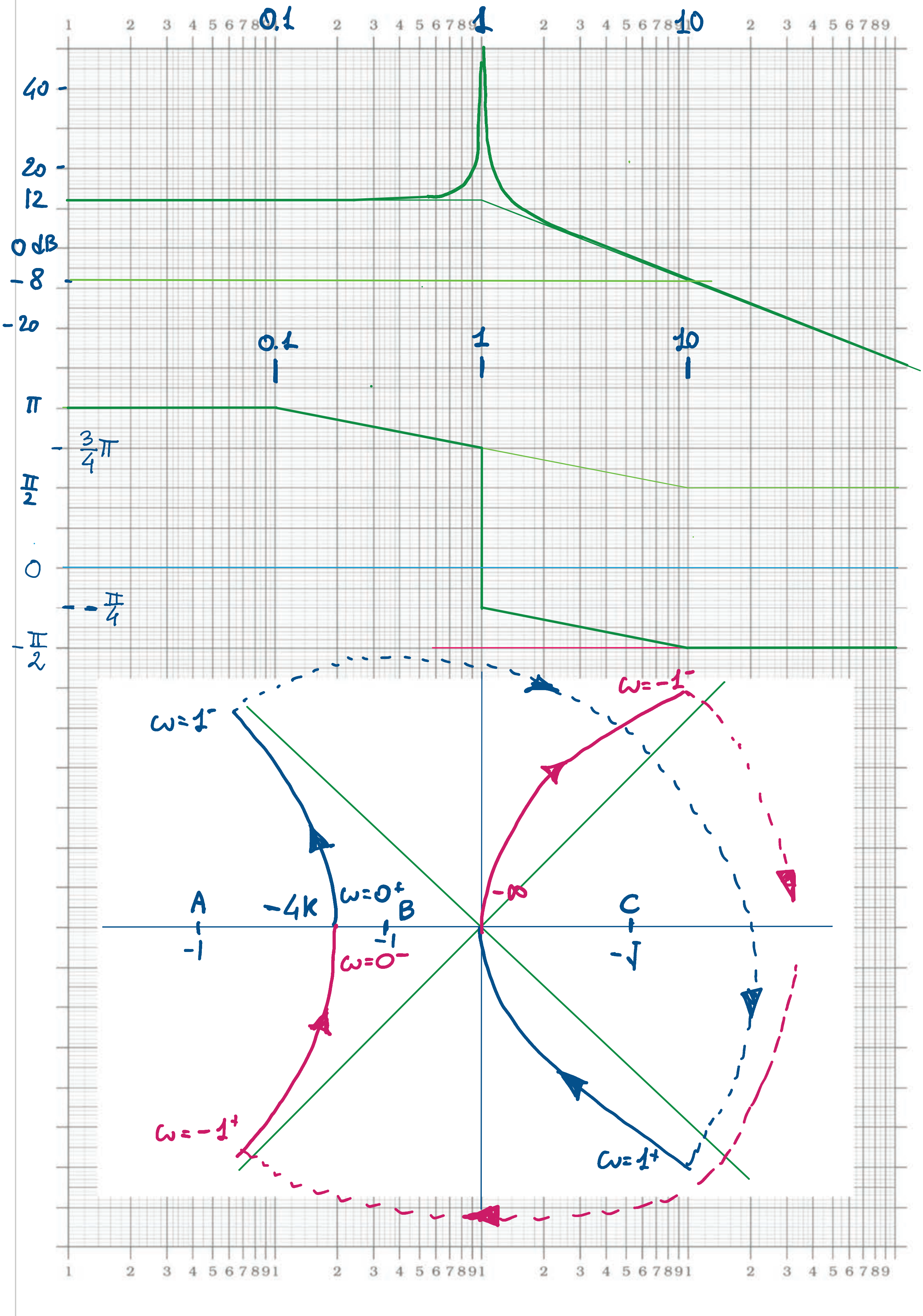
ANALISI CON NYQUIST (VEDI FIGURA)

$M_{AP}=0$ $\quad \boxed{M_{CH} = M_{AP} - N} \Rightarrow M_{CH} = -N$

$K\in(0,\frac{1}{4})$ $\quad$ CASO A: $N=0 \Rightarrow M_{CH}=0$ $\quad$ A.S.

$K>\frac{1}{4}$, $\quad$ CASO B: $N=-1 \Rightarrow M_{CH}=1$ $\quad$ INST.

$K<0$, $\quad$ CASO C: $N=-2 \Rightarrow M_{CH}=2$ $\quad$ INST.



0.1
1
10
40
20
12
0 dB
-8
-20
π
3/4 π
π/2
0
-π/4
-π/2
ω=1⁻
ω=-1⁻
A
-1
-4K
ω=0⁺
B
ω=0⁻
-∞
C
-j
ω=-1⁺
ω=1⁺

Quesito 2 (5 punti, tempo stimato: 15 minuti) Sia dato un sistema lineare e stazionario a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-t} - e^{-4t}.$$

1. Si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 3\sin(t)$,
2. Si calcoli per quale pulsazione ω lo sfasamento della risposta armonica rispetto all'ingresso è esattamente pari a $-\pi/2$.

(1). $W(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4} = \frac{s+4-(s+1)}{(s+1)(s+4)} = \frac{3}{(s+1)(s+4)}$

poli a parte reale negativa ⇒ modi asintoticamente stabili

⇒ ∃ la risposta armonica.

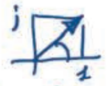
$y(t) = 3\cdot|W(j\omega)|\cdot\sin(\omega t + \langle W(j\omega)\rangle)$ $\quad \boxed{\omega = 1}$

$|W(j)| = \left|\frac{3}{(1+j)(4+j)}\right| = \frac{3}{|1+j|\cdot|4+j|} = \frac{3}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{16+1}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

(Alternativa: $\left|\frac{3}{(1+j)(4+j)}\right| = \frac{3}{|4-1+5j|} = \frac{3}{\sqrt{9+25}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$)

$\langle W(j)\rangle = \langle 3\rangle - \langle 1+j\rangle - \langle 4+j\rangle = 0 - \mathrm{ATAN}(1) - \mathrm{ATAN}\left(\frac{1}{4}\right) = 1{,}03$ rad

NOTA: $\mathrm{ATAN}(1) = \frac{\pi}{4}$



(Alternativa: $\langle W(j)\rangle = \left\langle\frac{3}{(1+j)(4+j)}\right\rangle = \left\langle\frac{3}{3+5j}\right\rangle = -\mathrm{atan}\,\frac{5}{3}$)

$y(t) = \frac{9}{\sqrt{34}}\cdot\sin(t - 1{,}03)$

(2) Per avere uno sfasamento di $-\frac{\pi}{2}$ nella risposta armonica deve essere $\langle W(j\omega)\rangle = -\frac{\pi}{2}$

Ovvero: $\mathrm{Re}(W(j\omega)) = 0$ e $\mathrm{Im}(W(j\omega)) < 0$

Imponiamo $\mathrm{Re}(W(j\omega)) = 0$

$W(j\omega) = \frac{3}{(1+j\omega)(4+j\omega)} = \frac{3}{4-\omega^2+j5\omega} = 3\cdot\frac{4-\omega^2-j5\omega}{\underbrace{(4-\omega^2+j5\omega)(4-\omega^2-j5\omega)}_{(*)\ \text{Den. Reale} > 0}}$

$\mathrm{Re}(W(j\omega)) = \frac{3}{(*)}(4-\omega^2) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = 4, \quad \boxed{\omega = \pm 2 \text{ rad/sec}}$

IN ALTERNATIVA: DISEGNARE IL DIAGRAMMA DI BODE DELLE FASI E VEDERE SUL GRAFICO IL VALORE DI ω CHE DÀ UNO SFASAMENTO DI $-\frac{\pi}{2}$

Quesito 3 (5 punti, tempo stimato: 35 minuti) Sia dato il seguente sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad D = 0.$$

1. Si calcoli la decomposizione spettrale della matrice A e si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si determinino delle basi per i quattro sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

Punto 1

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & 0 & (\lambda-1) \end{pmatrix} \right| = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-1) \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix}$$

Polinomio caratteristico in forma fattorizzata

$\boxed{\lambda_1 = -1}$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow r_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_1^T = [1 \;\; 2 \;\; 0] \cdot \frac{1}{2} \qquad \left(\text{verifica } e_1^T r_1 = 1\right)$$

$Cr_1 = 0, \quad e_1^T B = 1 \neq 0 \Rightarrow$ MODO ASSOCIATO A $\lambda_1 = -1$

- ASINTOTICAMENTE STABILE
- INOSSERVABILE
- ECCITABILE

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad e_2^T = [0 \;\; -2 \;\; 0] \qquad \left(e_2^T r_2 = 1\right)$$

$Cr_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq 0, \quad e_2^T B = 0 \Rightarrow$ MODO ASSOCIATO A $\lambda_2 = -2$

- ASINTOTICAMENTE STABILE
- OSSERVABILE
- NON ECCITABILE

$\boxed{\lambda_3 = 1}$

$$\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_2^T = \left[-\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{3} \;\; 1\right] \qquad \left(e_3^T r_3 = 1\right)$$

$Cr_3 = -2 \neq 0, \quad e_3^T B = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ Modo Associato a $\lambda_3 = 1$

- INSTABILE
- OSSERVABILE
- ECCITABILE

Punto 2

$$P_3 = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{P} = Im(P_3) = span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$\rho(P_3) = 2$ (la III colonna è uguale alla I con segno opposto)

le prime due colonne di P_3

$\boxed{dim(\mathcal{P}) = 2}$

La base può essere semplificata: $\mathcal{P} = span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \mathcal{N}(Q_3) = span\left(\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$\rho(Q_3) = 2$, la III colonna è proporzionale alla I

$dim(\mathcal{N}(Q)) = 3 - 2 = 1$

$\boxed{\text{NOTA CHE coincide con } v_1}$

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \mathcal{Q} = span\left(\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right) \quad \left(\rho\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \rho\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{P}, \quad \mathcal{X}_2 = span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \quad \left(\text{oppure } span\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{Q}, \quad \mathcal{X}_3 = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{X}_4 : (\mathcal{Q} + \mathcal{P}) \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = span\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

Quesito 4 (4 punti, tempo stimato: 15 minuti) Sia dato un sistema lineare e stazionario a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ in cui la matrice A ha la seguente decomposizione spettrale:

$$A = (1 + j\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix} \frac{1}{2} + (1 - j\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

Si calcoli l'evoluzione libera in corrispondenza allo stato iniziale $x(0) = [1 \ \ 0]^T$.

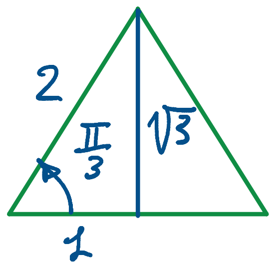
$$x_\ell(t) = A^t \cdot x(0)$$

$$A^t = \cancel{2} \cdot \mathrm{Re}\left((1+j\sqrt{3})^t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} [1 \ \ -j] \frac{1}{\cancel{2}} \right)$$

$$x_\ell(t) = A^t \cdot x(0) = \mathrm{Re}\left((1+j\sqrt{3})^t \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} [1 \ \ -j] \cdot \overset{x(0)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right)$$

$$x_\ell(t) = \mathrm{Re}\left(|1+j\sqrt{3}|^t \cdot e^{j\langle 1+j\sqrt{3}\rangle t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \right)$$

$$|1+j\sqrt{3}| = 2, \quad \langle 1+j\sqrt{3} \rangle = \frac{\pi}{3}$$



$$x_\ell(t) = \mathrm{Re}\left(2^t \cdot e^{j\frac{\pi}{3}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \right) = 2^t \, \mathrm{Re}\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \right)$$

$$\boxed{x_\ell(t) = 2^t \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3}t \\ -\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}t \end{bmatrix}}$$

Quesito 5 (5 punti, tempo stimato: 30 minuti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - k\big(x_2(t)-1\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t)\big(x_2(t)-1\big) + (k-1)\big(x_2(t)-1\big) \end{cases}$$

1. Si verifichi che $x_e = (0, 1)$ è un punto di equilibrio;
2. Si scrivano le equazioni del sistema nelle coordinate (ξ_1, ξ_2) definite come deviazione rispetto al punto di equilibrio ($\xi(t) = x(t) - x_e$):
$$\xi_1 = x_1,$$
$$\xi_2 = x_2 - 1,$$
e si verifichi che nelle nuove coordinate il punto di equilibrio è $\xi_e = (0, 0)$.
3. Si verifichi che lo Jacobiano calcolato nel punto di equilibrio è lo stesso in entrambe le rappresentazioni del sistema.
4. Si studi la stabilità del punto di equilibrio al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica (si scelga la rappresentazione più favorevole).

---

1. $$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 - k\cdot(x_2-1)^2 \\ 4x_1(x_2-1) + (k-1)(x_2-1) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x_e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{matrix} \dot{\xi}_1(t) = \dot{x}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) = \dot{x}_2(t) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = -2\xi_1(t) - k\,\xi_2^2(t) \\ \dot{\xi}_2(t) = 4\,\xi_1(t)\,\xi_2(t) + (k-1)\,\xi_2(t) \end{cases}$$

3. $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $\quad \dot{\xi}(t) = \tilde{f}(\xi(t)) \quad \tilde{f}(0) = 0$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & k-1 \end{bmatrix}, \quad \left.\frac{d\tilde{f}}{d\xi}\right|_{0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

4. $\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = k-1 \Rightarrow$
$k-1<0$ $(k<1)$ x_e A.S.
$k-1=0$ $(k=1)$ caso critico
$k-1>0$ $(k>1)$ x_e instabile

Caso critico con Lyapunov
nelle coordinate ξ

$$V(\xi) = \frac{\alpha}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 \quad (\alpha>0)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi_1 - \xi_2^2 \\ 4\xi_1\xi_2 \end{bmatrix} = \tilde{f}(\xi)$$

$$\dot{V}(\xi) = \frac{dV}{d\xi}\cdot\dot{\xi} = \alpha\cdot\xi_1\left(-2\xi_1 - \xi_2^2\right) + \xi_2\cdot\left(4\xi_1\xi_2\right)$$

$$\dot{V}(\xi) = -2\alpha\,\xi_1^2 - \alpha\,\xi_1\xi_2^2 + 4\,\xi_1\xi_2^2$$

Con $\alpha = 4 \Rightarrow \dot{V} = -8\,\xi_1^2 \leq 0$ semidefinita negativa

$\Rightarrow \xi_e = 0$ semplicemente stabile

$(x_e = (0,1)$ S.S.$)$

Quesito 6 (4 punti, tempo stimato: 20 minuti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t). \end{cases}$$

Si considerino le tre candidate funzioni di Lyapunov:

$$V_1(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad V_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2, \quad V_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2.$$

Si verifichi con quali di queste è possibile dimostrare la stabilità semplice o asintotica del punto di equilibrio $x_e = 0$, motivando adeguatamente la risposta.

$V_1 > 0$ def. positiva (si annulla solo per $x_e = 0$)

$$\frac{dV}{dx} \cdot f = [2x_1 \quad 2x_2] \cdot \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = -4x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 = \underbrace{-4x_1^2 - 2x_1x_2 \lessgtr 0}_{\text{INDEFINITA}}$$

V_1 Non va bene perchè $\dot{V}_1$ ha un segno indefinito

$$V_2(x) = x^T Q_2 x = (x_1 \ x_2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} q_{11} = 1 > 0 \\ |Q_2| = 0 \end{matrix} \implies V_2(x) \text{ Non è definita positiva}$$

(In alternativa: $V_2(x) = (x_1 + x_2)^2 \Rightarrow V_2(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$

Quindi $V_2(x) \geq 0$ SEMIDEF. POSITIVA)

$V_2(x)$ NON VA BENE perchè Non è def. positiva

$$V_3(x) = x^T Q_3 x = [x_1 \ x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} q_{11} = 1 > 0 \\ |Q_3| = 1 - \frac{1}{4} > 0 \end{matrix} \implies V_3(x) > 0 \text{ def. positiva}$$

$$\frac{dV_3}{dx} \cdot f(x) = [2x_1 - x_2 \ ; \ 2x_2 - x_1] \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 \\ -2x_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_3(x) = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2$$

$$= -6x_1^2 - x_2^2 < 0 \implies x_e = 0 \quad \text{A.S.}$$

$V_3(x)$ è l'unica candidata ad essere definita positiva e con derivata $\dot{V}_3(x)$ definita negativa