TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 16-6-2022

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\frac{5\,(s+10)}{(s+1)(s^2+25)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$ e la risposta impulsiva;
3. calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita e la risposta forzata al gradino unitario;

Problema 3. (4 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(0) = 0, \quad w(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{t-1},\ t > 0$$

si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determinino:
   - uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ a cui corrisponda evoluzione libera dell'uscita nulla a ogni istante $t \geq 0$;
   - uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ a cui corrisponda evoluzione libera dell'uscita pari ad 1 per $t = 0, 1, 2, 3$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1-k)\,x_1(t) - 2\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3\,x_1(t) + (1-k)\,x_2^3(t) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine è un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
