SCRITTO D'ESAME DI TEORIA DEI SISTEMI 30/6/2022

Soluzioni a cura di V. DE IULIIS

[domande/segnalazioni a: VITTORIO.DEIULIIS@UNIVAQ.IT]

Problema 1

$$W_{AP}(s) = 20K \frac{(s-5)}{s(s^2+20s+100)}$$

Per $K=1$ abbiamo $W(s) = \dfrac{20(s-5)}{s(s^2+20s+100)}$

Notiamo subito che il trinomio è in realtà un polo trinomio ($\zeta=1$)

infatti: $s^2+20s+100 = (s+10)^2 = 100 \cdot \left(1+\frac{s}{10}\right)^2$

Dunque $W(s) = 20 \dfrac{-5\left(1-\frac{s}{5}\right)}{100\, s\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$

Riconosciamo i termini:

- guadagno alle basse frequenze $\dfrac{20(-5)}{100} = -1$
  - $(-1)_{dB} = 20\log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$
  - $\angle(-1) = \pm\pi$ rad
- monomio al denominatore $\dfrac{1}{s}$
  - -20 dB/dec per $\omega \in (0,+\infty)$
  - sfasamento globale di $-\frac{\pi}{2}$ rad
- binomio al numeratore $1-\frac{s}{5}$ $\quad \omega_{t_1} = 5$ rad/s
  - $+20$ dB/dec in $\omega \in [5,+\infty)$
  - $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec in $\omega \in [0.5, 50]$
- binomio doppio al denominatore $1+\frac{s}{10}$ $\quad \omega_{t_2} = 10$ rad/s
  - -40 dB/dec in $\omega \in [10,+\infty)$
  - $-\frac{\pi}{2}$ rad/dec in $\omega \in [1, 100]$

Dunque:

MODULI

$\omega \in [0, 5]$ -20 dB/dec

$\omega \in [5, 10)$ 0 dB/dec

$\omega \in [10, +\infty)$ -40 dB/dec

FASI

$\omega \in [0, 0.5)$ 0 rad/dec

$\omega \in [0.5, 1)$ $-\pi/4$ rad/dec

$\omega \in [1, 50]$ $-3/4\,\pi$ rad/dec

$\omega \in [50, 100)$ $-\pi/2$ rad/dec

$\omega \in [100, +\infty)$ 0 rad/dec

Diagrammi riportati alla pagina successiva.

guadagno ↓

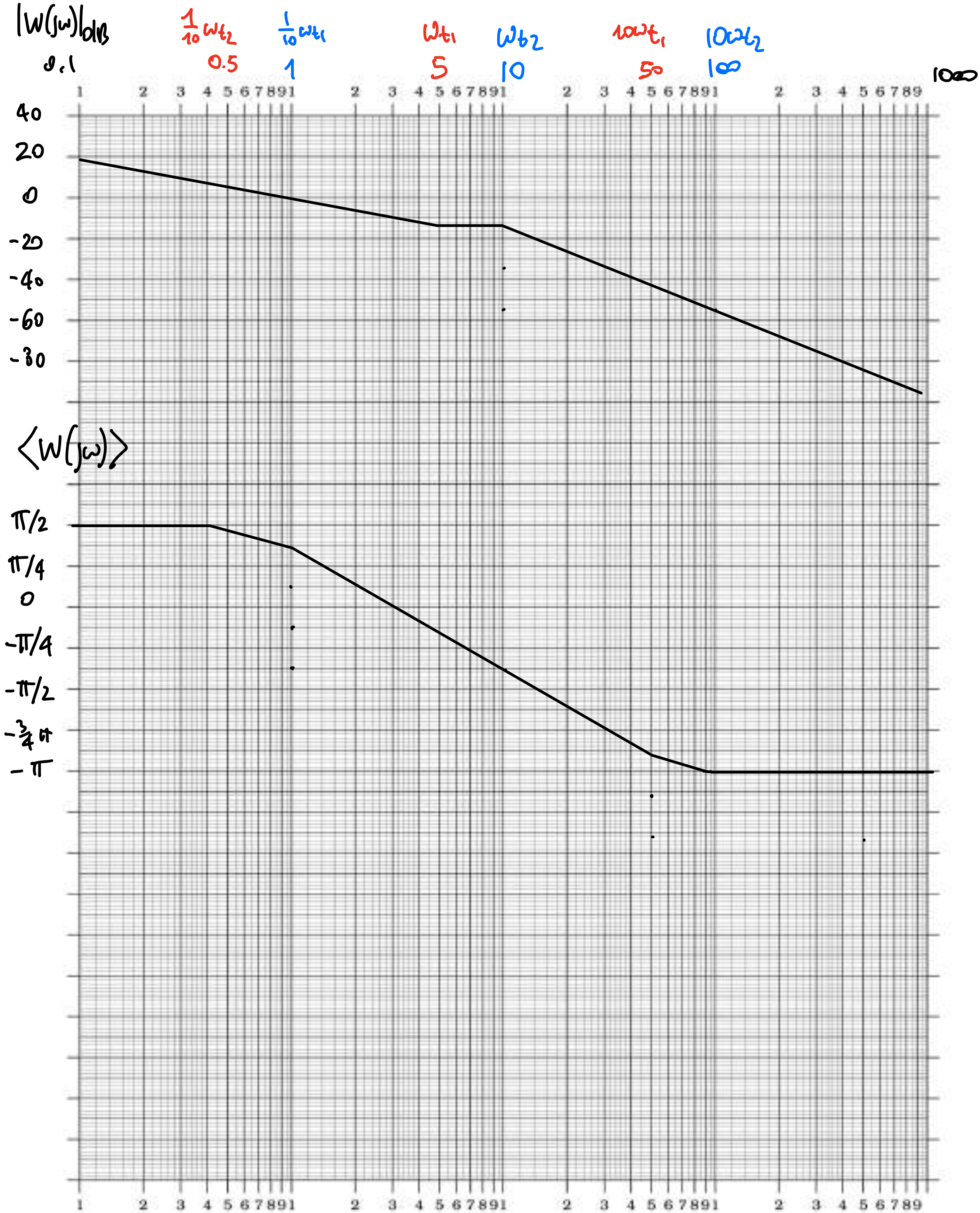
NOTA: il diagramma dei moduli passa per $(\omega, \cdot\, dB) = (1, 0\,dB)$

il diagramma delle fasi "parte" da $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ rad

e si assesta a ...

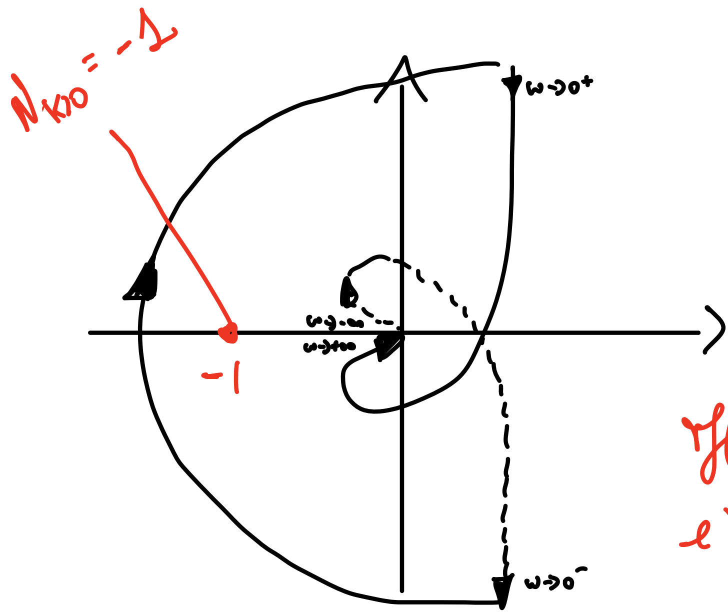
f.d.t. asintotica $W(j\omega)$ per $\omega \gg 1$

$$W(j\omega) \xrightarrow{\omega \gg 1} \frac{j\omega}{j\omega(j\omega)^2} = \frac{1}{-\omega^2} \qquad \angle\left(-\frac{1}{\omega^2}\right) = \pm\pi$$



|W(jω)|dB
0.1
1/10 ωt2
0.5
1/10 ωt1
1
ωt1
5
ωt2
10
10ωt1
50
10ωt2
100
1000
40
20
0
-20
-40
-60
-80
⟨W(jω)⟩
π/2
π/4
0
-π/4
-π/2
-3/4 π
-π

Diagramma polare di W_{AP} per $K>0$:



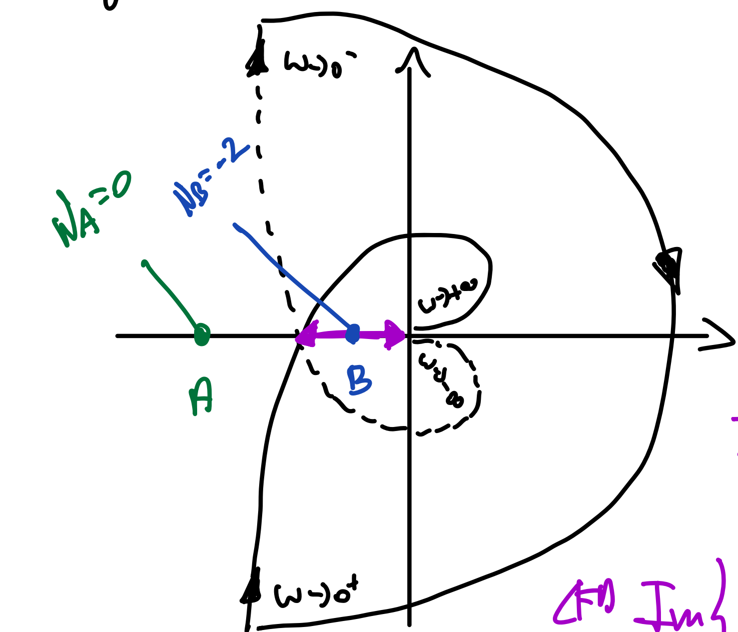
W_{AP} ha zero poli a parte reale positiva $P_{AP} = 0$

per $\forall K>0$:

$$P_{CH} = P_{AP} - N_{K>0} = 1$$

Il sistema controreazionato ($W_{CH}(s)$) è instabile $\forall K>0$.

Diagramma polare per $K<0$:



$\leftrightarrow = |K W(j\omega^*)|$ dove ω^* è la pulsazione d'attraversamento soluzione di $Im\{W(j\omega)\}=0$

$$Im\{W(j\omega)\}=0 \iff Im\left\{\frac{\cancel{25}(j\omega-5)}{j\omega(-\omega^2+20j\omega+100)}\right\}=0$$

$$\iff Im\left\{\frac{(j\omega-5)\left[-20\omega^2-j(100\omega-\omega^3)\right]}{\underbrace{\left[-20\omega^2+j(100\omega-\omega^3)\right]\left[-20\omega^2-j(100\omega-\omega^3)\right]}_{\text{reale}}}\right\}=0$$

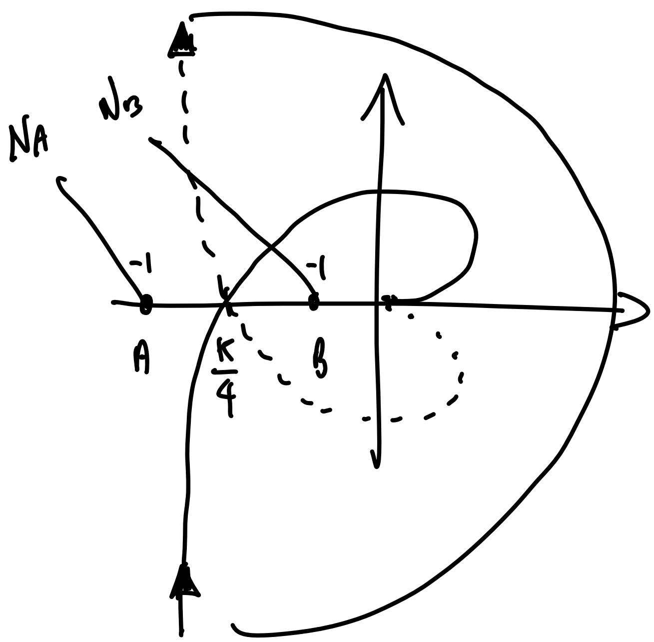
$$\iff -20\omega^3+5(100\omega-\omega^3)=0 \iff -\cancel{25}^{\,1}\omega^3+\cancel{500}^{\,20}\omega=0 \iff \omega\left[20-\omega^2\right]=0$$

da cui $\omega = 0$ (chiusura all'infinito)

e $\omega^* = \pm\sqrt{20}$ rad/s

$$|W(j\sqrt{20})| = \frac{|j\sqrt{20}-5|\cdot 20}{\sqrt{20}\,|-80+20\sqrt{20}\,j|} = \frac{\sqrt{45}\cdot \cancel{20}^{\,1}}{\sqrt{\cancel{20}}\cdot \cancel{120}_{\,6}} \; \frac{3}{2\cdot 6} = \frac{1}{4}$$

Dunque per $K<0$:



Per $\boxed{K<0}$ abbiamo dunque due possibilità per il punto critico -1:

-1 è in (A) se $-1 < \frac{K}{4}$ ovvero se $K \in (-4, 0)$

in tal caso $P_{CH} = P_{AP} - N_A = 0 - 0 = 0$

il sistema a ciclo chiuso $(W_{CH}(s))$ è asintoticamente stabile

-1 è in (B) se $\frac{K}{4} < -1$ ovvero se $K \in (-\infty, -4)$

in tal caso $P_{CH} = P_{AP} - N_B = 0 - (-2) = 2$

il sistema a ciclo chiuso è INSTABILE ($W_{CH}(s)$ ha due poli a parte reale positiva)

Confermiamo il tutto con Routh:

$$D_{CH}(s) = N_{AP}(s) + D_{AP}(s) = 20K(s-5) + s(s^2+20s+100)$$

$$= 20Ks - 100K + s^3 + 20s^2 + 100s$$

$$= s^3 + 20s^2 + 20(K+5)s - 100K$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 20(K+5) \\ 2 & \overset{1}{\cancel{20}} & -\overset{5}{\cancel{100}}K \\ 1 & b_1 & \\ 0 & & \end{array}$$

$$b_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 20(K+5) \\ 1 & -5K \end{vmatrix}$$

$$= +\cancel{5}K + \overset{4}{\cancel{20}}(K+5)$$

$$=$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 20(K+5) \\ 2 & 1 & -5K \\ 1 & K+4(K+5) = \cancel{5}K+\overset{4}{\cancel{20}} & \\ 0 & -K & \end{array}$$

1ª colonna:

$$1 \qquad 1 \qquad K+4 \qquad -K$$

segno:

	$k<-4$	$-4<k<0$	$k>0$
1	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$
$K+4$	$-$	$+$	$+$
$-K$	$+$	$+$	$-$
	$2V$ per $k<-4$	$0V$ per $k\in(-4,0)$	$1V$ per $K>0$

confermata l'analisi vista con il criterio di Nyquist.

Problema 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Autovalori di A: $\det(\lambda I - A) = 0 \iff \left\| \begin{matrix} \lambda-1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & \lambda+2 \end{matrix} \right\| = 0$

$$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2) + 2 = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$|\lambda_1| = 0 \Rightarrow$ il modo associato è asint. stabile $(|\cdot| < 1)$

$|\lambda_2| = 1 \Rightarrow$ il modo associato è semplicemente stabile

$$A^t = R\Lambda^t L = \lambda_1^t r_1 l_1^T + \lambda_2^t r_2 l_2^T = 0 + (-1)^t r_2 l_2^T$$

Calcoliamo allora solo r_2 e l_2^T:

r_2: $(\lambda_2 I - A) r_2 = 0$ $\quad \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2x = 4y$

allora per $y = 1$ $\quad r_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{l}_2^T$: $\tilde{l}_2^T (\lambda_2 I - A) = 0$ $\quad [x \ \ y] \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 4x = -y$

per $x = 1$ $\Rightarrow \tilde{l}_2^T = [1 \ \ -4]$ da normalizzare!

$$l_2^T = \frac{\tilde{l}_2^T}{\tilde{l}_2^T \cdot r_2} = \frac{[1 \ \ -4]}{[1 \ -4] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{[1 \ \ -4]}{-2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \lambda_2^t r_2 l_2^T = (-1)^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} = (-1)^t \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

in questo esercizio, dunque, per effetto del fatto che $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$

$$A^t = \begin{cases} A & \text{se } t \text{ è dispari} \\ -A & \text{se } t \text{ è pari} \end{cases}$$

$$W(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B & t > 0 \\ D & t = 0 \end{cases}$$

Dunque $W(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} (-1)^{t-1} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= (-1)^{t-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(-1)^{t-1} \quad \text{per } t > 0$$

$$W(0) = 0.$$

$$W(z) = \mathcal{Z}\{W(t)\} = 2\frac{\mathcal{Z}\{(-1)^t\}}{z} = \frac{2}{z+1}$$

Risposta forzata a $u(t) = 2^t \leftrightarrow U(z) = \frac{z}{z-2}$

$$Y_f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-2)} \Rightarrow \frac{Y_f(z)}{z} = \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_2}{z-2}$$

dove: $R_1 = \lim_{z \to -1} \frac{2}{z-2} = -\frac{2}{3}$ $\qquad R_2 = \lim_{z \to 2} \frac{2}{z+1} = \frac{2}{3}$

allora $Y_f(z) = \frac{-2}{3}\frac{z}{z+1} + \frac{2}{3}\frac{z}{z-2} \Rightarrow y_f(t) = -\frac{2}{3}(-1)^t + \frac{2}{3}(2)^t.$

Non esiste uno stato inosservabile per il sistema (diverso da $x=0$)

Ciò si può verificare calcolando $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & -2 \end{bmatrix}$

che ha rango pieno. Dunque $\dim(Q) = \dim(\ker(Q)) = 0$.

Problema 3

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2t) & -e^{-t}\sin(2t) \\ e^{t}\sin(2t) & e^{-t}\cos(2t) \end{bmatrix} ; H(t) = e^{At}B = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2t) \\ e^{-t}\sin(2t) \end{bmatrix} ; C = [1 \ 0]$$

Proprietà di semigruppo $\begin{cases} \Phi(t_1+t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) & t_1, t_2 \in \mathbb{R} \\ \Phi(0) = I_2 \end{cases}$

$$\Phi(t_1+t_2) = \begin{bmatrix} e^{-(t_1+t_2)}\cos(2(t_1+t_2)) & -e^{-(t_1+t_2)}\sin(2(t_1+t_2)) \\ e^{-(t_1+t_2)}\sin(2(t_1+t_2)) & e^{-(t_1+t_2)}\cos(2(t_1+t_2)) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\cos(2t_2) - e^{-t_1}e^{-t_2}\sin(2t_1)\sin(2t_2) & -e^{-t_1}e^{-t_1}\sin(2t_1)\cos(2t_2) - e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\sin(2t_2) \\ e^{-t_1}e^{-t_2}\sin(2t_1)\cos(2t_2) + e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\sin(2t_2) & e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\cos(2t_2) - e^{-t_1}e^{-t_2}\sin(2t_1)\sin(2t_2) \end{bmatrix}$$

NOTA: basterebbe verificare la proprietà per i soli elementi $(1,1)$ e $(2,1)$ e generalizzare facilmente ai due elementi restanti.

$$\Phi(t_1)\Phi(t_2) = \begin{bmatrix} e^{-t_1}\cos(2t_1) & -e^{-t_1}\sin(2t_1) \\ e^{-t_1}\sin(2t_1) & e^{-t_1}\cos(2t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t_2}\cos(2t_2) & -e^{-t_2}\sin(2t_2) \\ e^{-t_2}\sin(2t_2) & e^{-t_2}\cos(2t_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\cos(2t_2) - e^{-t_1}e^{-t_2}\sin(2t_1)\sin(2t_2) & -e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\sin(2t_2) - e^{-t_1}e^{-t_2}\sin(2t_1)\cos(2t_2) \\ e^{-t_1}e^{-t_2}\sin(2t_1)\cos(2t_2) + e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\sin(2t_2) & -e^{-t_1}e^{-t_2}\sin(2t_1)\sin(2t_2) + e^{-t_1}e^{-t_2}\cos(2t_1)\cos(2t_2) \end{bmatrix}$$

e si vede chiaramente che $\Phi(t_1+t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$ ✓

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad ✓$$

$$A = \left.\frac{d\Phi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\begin{bmatrix} -e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t) & e^{-t}\sin(2t) - 2e^{-t}\cos(2t) \\ -e^{-t}\sin(2t) + 2e^{-t}\cos(2t) & -e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t) \end{bmatrix}\right|_{t=0}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = H(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W(t) = Ce^{At}B = CH(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2t) \\ e^{-t}\sin(2t) \end{bmatrix} = e^{-t}\cos(2t)$$

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} \qquad u(t) = 10\sin(t) \begin{cases} M = 10 \\ \omega = 1 \text{ rad/s} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$y_{orm}(t) = M\,|W(j\omega)|\,\sin(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$$

$$= 10\,|W(j)|\,\sin(t + \angle W(j))$$

dove:

$$W(j) = \frac{(j+1)}{(j+1)^2+4} = \frac{1+j}{4+2j} \quad \begin{cases} |W(j)| = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \\ \angle W(j) = \operatorname{atan}(1) - \operatorname{atan}\left(\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0.32 \end{cases}$$

$$y_{orm}(t) = \sqrt{10}\,\sin(t + 0.32)$$

<u>NOTA</u>: la risposta a regime esiste perché il sistema è asintoticamente stabile. Ciò è visibile, ad esempio, notando che $\Phi(t)$ è composta da leggi di moto pseudoperiodiche a parte reale negativa ($e^{Re(\lambda_1)t} = e^{Re(\lambda_2)t} = e^{-t}$), oppure calcolando gli autovalori di A $\sigma(A) = \{-1+2i, -1-2i\}$.

Problema 4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di raggiungibilità:

$$R_4 = [B \; AB \; A^2B \; A^3B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ha rango 3 $\Rightarrow$ $\mathcal{R} = \mathrm{Im}(R_4) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $3^a - 2^a$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Matrice di osservabilità:

$$O_4 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2 $\Rightarrow$ $\dim(\mathcal{N}(O_4)) = 4 - 2 = 2$

Combinando le colonne di O_4 posso ottenere $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in due modi indipendenti:

1) $\alpha \cdot 2^a$ colonna $+ \alpha \cdot 1^a$ colonna $+ \alpha \cdot 3^a$ colonna, $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $\alpha \cdot 4^a$ colonna, $\alpha \in \mathbb{R}$

ho allora: $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{N}(O_4) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (si possono determinare anche risolvendo il sistema $O_4 \cdot x = 0$)

Combinando primo e terzo vettore di base di $\mathcal{R}$ ottengo il 1° vettore di base di $\mathcal{Q}$. Inoltre, il 2° vettore di base di $\mathcal{Q}$ coincide con il 2° vettore di base di $\mathcal{R}$. Allora $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{Q}$

4 sottospazi della decomposizione di Kalman:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{Q}$$

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$ $\qquad \mathcal{X}_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ non univoco!

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{Q}$ $\qquad \mathcal{X}_3 = \{0\}$

$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4$ $\qquad \mathcal{X}_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ anch'esso non univoco.

Verifichiamo ora le proprietà strutturali di

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Controllando, per ognuno di essi, l'appartenenza a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Q}$

$e_1 \notin \mathcal{R}$ $\quad e_1 \notin \mathcal{Q}$ $\Rightarrow$ non raggiungibile, osservabile

$e_2 \in \mathcal{R}$ $\quad e_2 \notin \mathcal{Q}$ $\Rightarrow$ raggiungibile, osservabile

$e_3 \notin \mathcal{R}$ $\quad e_3 \notin \mathcal{Q}$ $\Rightarrow$ non raggiungibile, osservabile

$e_4 \in \mathcal{R}$ $\quad e_4 \in \mathcal{Q}$ $\Rightarrow$ raggiungibile, non osservabile

Problema 5

Abbiamo il sistema non lineare:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Kx_1 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = Kx_1x_2^3 - 4x_2 \end{cases}$$

L'origine è banalmente d'equilibrio perché sostituendo $x_1=0$, $x_2=0$

otteniamo $\dot{x}_1=0$, $\dot{x}_2=0$, condizioni d'equilibrio.

Studiamo la stabilità con il metodo della linearizzazione

attorno ad $x_e=(0,0)$:

$$J(x)\Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} K-\frac{1}{4}x_2^2 & -\frac{1}{2}x_1x_2 \\ Kx_2^3 & Kx_1-4 \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$J(x_e)$ ha i seguenti autovalori: $K, -4$.

Dunque, se $K>0 \Rightarrow J(x_e)$ ha un autovalore a parte reale positiva $\Rightarrow x_e$ è INSTABILE.

se $K<0 \Rightarrow J(x_e)$ ha due autovalori a parte reale negativa $\Rightarrow x_e$ è localmente asintoticamente stabile

se $K=0 \Rightarrow J(x_e)$ ha un autovalore a parte reale negativa, ma anche un autovalore a parte reale nulla $\Rightarrow$ CASO "CRITICO"

Discutiamo tale caso critico sostituendo $K=0$ nelle equazioni del sistema per $K=0$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{4} x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -4x_2 \end{cases}$ che è ancora un sistema non lineare.

Proviamo a determinare la stabilità dell'origine con il metodo diretto di Lyapunov, con la funzione quadratica $V(x) = \frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ che è definita positiva $\forall \alpha > 0$.

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \dot{x}(t) = \left[\alpha x_1 \;\vdots\; x_2 \right] \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} x_1 x_2^2 \\ \hdashline -4x_2 \end{bmatrix} = \overbrace{-\frac{\alpha}{4} x_1^2 x_2^2}^{<0 \ \forall \alpha > 0} - 4x_2^2$$

$\dot{V}(x)$ è $\underbrace{\text{SEMIDEFINITA NEGATIVA}}$ per ogni scelta di $\alpha > 0$.

poiché $\dot{V}(x)$ si annulla non solo in x_e, ma anche negli infiniti altri punti $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Dunque per $K=0$ x_e è SEMPLICEMENTE STABILE.