

## SISTEMI LINEARI STAZIONARI

## \* III.1 - La matrice di transizione nei sistemi lineari stazionari.

L'analisi sviluppata nel Capitolo precedente ha messo in evidenza il ruolo fondamentale che la matrice di transizione dello stato occupa nella caratterizzazione del comportamento dinamico dei sistemi lineari. Infatti essa non fornisce solo il modo di calcolare l'evoluzione dello stato in regime libero, ma interviene anche in maniera sostanziale nel caratterizzare il regime forzato. Questo fatto, d'altra parte, rispecchia l'importanza che, nelle soluzioni di una equazione differenziale lineare, hanno le soluzioni della equazione omogenea ad essa associata [per il legame tra queste e la matrice di transizione, cfr. Appendice A.II.1, formula (22)]. Di conseguenza una analisi approfondita delle caratteristiche della matrice di transizione consente di avere indicazioni significative su tutti gli aspetti del comportamento dinamico di un sistema ed è per questa ragione che essa viene svolta in dettaglio in questo capitolo.

Si richiama, per comodità del lettore, che un sistema di ordine finito, lineare, stazionario, differenziale è caratterizzato, per quanto concerne l'evoluzione libera dello stato, dalla equazione:

$$(III.1) \quad \dot{x}(t) = A x(t)$$

la cui soluzione si può porre nella forma:

$$(III.2) \quad x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

È bene osservare che, dipendendo, nel caso stazionario,  $\Phi(t, t_0)$  soltanto dalla differenza degli argomenti  $t$  e  $t_0$ , è comodo considerare

in tale situazione questa matrice come funzione dell'unico argomento  $t - t_0$ . La (III.2) si può allora scrivere:

$$(III.3) \quad x(t) = \Phi(t - t_0) x(t_0)$$

in cui  $\Phi(t)$  è data da [cfr. (II.53)],

$$(III.4) \quad \Phi(t) = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

Si ricorda anche che lo sviluppo in serie (III.4) [che particolarizza la (II.39)] converge assolutamente per ogni  $t$  finito ed uniformemente su ogni intervallo limitato di  $R$ .

Si ponga, per definizione:

$$(III.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = e^{At} \quad \forall t \in R$$

il che consente di scrivere:

$$(III.6) \quad \Phi(t) = e^{At} \quad \forall t \in R$$

Si fa osservare che la matrice (III.6) è definita per ogni  $t \in R$  ed è pertanto una matrice di transizione *estesa* (cfr. Appendice A.II.1).

È chiaro che la funzione  $e^{At}$  ha tutte le proprietà tipiche della matrice di transizione dei sistemi lineari differenziali, che qui si riscrivono e che possono peraltro essere provate anche direttamente per verifica a partire dalla definizione (III.5).

$$(III.7) \quad [e^{At}]_{t=0} = I$$

$$(III.8) \quad e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)} \quad \forall t_1, t_2 \in R$$

$$(III.9) \quad |e^{At}| \neq 0 \quad \forall t \in R$$

$$(III.10) \quad [e^{At}]^{-1} = e^{-At} \quad \forall t \in R$$

$$(III.11) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A \quad \forall t \in R$$

Può essere utile considerare anche le forme assunte dalle altre matrici che caratterizzano il modello esplicito del sistema ove si tenga

presente l'espressione (III.6). Ricordando rispettivamente le (II.55), (II.58), (II.59) e tenendo conto che, per la stazionarietà, conviene considerare funzioni di un unico argomento, si ha:

$$(III.12) \quad \mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(III.13) \quad \Psi(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(III.14) \quad \mathbf{W}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

### III.2 - La rappresentazione spettrale di $e^{\mathbf{A}t}$ e la corrispondente espressione della risposta libera nello stato.

Si supponga che gli  $n$  autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  della matrice siano distinti (cfr. Appendice A.III.1). Considerati allora  $n$  autovettori destri linearmente indipendenti  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  e gli  $n$  autovettori sinistri  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  definiti dalla:

$$(III.15) \quad (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n' \end{pmatrix}$$

(dove il simbolo ' indica trasposizione), vale per  $\mathbf{A}$  la rappresentazione spettrale:

$$(III.16) \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i'$$

Partendo da questa espressione è possibile determinare anche la rappresentazione spettrale di  $e^{\mathbf{A}t}$ . Questa potrebbe essere dedotta attraverso la teoria delle funzioni di matrice ma, per semplicità, verrà qui ricavata basandosi direttamente sulla definizione (III.4). Si incominci con l'osservare che, per la (III.15), risulta:

$$(III.17) \quad \mathbf{v}_i' \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

con  $\delta_{ij}$  simbolo di Kronecher (che vale 1 se  $i=j$  e 0 se  $i \neq j$ ), come è immediato verificare moltiplicando a destra i due membri della (III.15) per la matrice  $(\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n)$ . In conseguenza di questa relazione e tenendo conto della (III.16), si può scrivere:

$$(III.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i' \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j' = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbf{u}_i (\mathbf{v}_i' \mathbf{u}_j) \mathbf{v}_j' = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i' \end{aligned}$$

Analogamente si può provare che:

$$(III.19) \quad \mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i'$$

e quindi, in definitiva, per la (III.4):

$$(III.20) \quad e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i' \right) \frac{t^k}{k!} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k \frac{t^k}{k!} \right) \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i'$$

Ricordando che le  $n$  serie di Taylor che compaiono nell'ultimo membro hanno per somma  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ , si ha in definitiva che la rappresentazione spettrale di  $e^{\mathbf{A}t}$  è data da:

$$(III.21) \quad e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i'$$

Di conseguenza la risposta libera nello stato (III.3) a partire da un prefissato stato iniziale, tenendo conto delle (III.6) e dell'espressione ora trovata per  $e^{\mathbf{A}t}$ , assume la forma:

$$(III.22) \quad \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i' \mathbf{x}(t_0)$$

Essa appare decomposta nella somma di  $n$  termini (dove  $n$  è l'ordine del sistema) ciascuno dei quali è caratterizzato da una funzione esponenziale. Va subito però rilevato che un'interpretazione diretta di questo risultato non è conveniente, in quanto gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  che caratterizzano le funzioni esponenziali possono assumere anche valori complessi. Se tuttavia, come avviene nei casi di interesse, la rappresentazione del sistema è data mediante una matrice  $\mathbf{A}$  ad elementi reali, gli autovalori sono o reali o, a coppie, complessi e coniugati; in questo caso, se lo stato iniziale è un vettore ad elementi anche essi reali, si può mostrare come la risposta libera possa essere decomposta nella somma di funzioni reali. Per mettere in evidenza questa decomposizione si può procedere nel seguente modo.

Si supponga che  $A$  abbia  $\mu$  autovalori reali e  $\nu$  coppie di autovalori complessi e coniugati; indicato con  $x_0$  il valore dello stato iniziale ed assunto come istante iniziale  $t_0 = 0$  (il che non riduce la generalità dello studio, poichè il sistema è stazionario), la risposta libera nello stato (III.22) assume la forma:

$$(III.23) \quad x(t) = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i' x_0 + \sum_{k=1}^{\nu} (e^{\lambda_k t} u_k v_k' x_0 + e^{\lambda_k^* t} \hat{u}_k \hat{v}_k' x_0) \quad (\mu + 2\nu = n)$$

nella quale si è indicato con  $\lambda_k^*$  il valore coniugato di  $\lambda_k$  e gli autovettori (destro e sinistro) ad esso associati sono stati soprassegnati con  $\hat{\cdot}$  per distinguerli da quelli associati con  $\lambda_k$ . Gli insiemi di autovettori considerati nella (III.23) sono definiti ciascuno a meno di una costante moltiplicativa; è però sempre possibile scegliere quest'ultima in maniera che  $u_i$  e  $v_i$  siano vettori ad elementi reali (per ogni  $i$ ) e che:

$$(III.24) \quad \hat{u}_k = u_k^*$$

$$(III.25) \quad \hat{v}_k = v_k^*$$

(per ogni  $k$ )<sup>(1)</sup>.

Si osservi a questo punto che gli autovettori destri che compaiono nella (III.23) sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base nello spazio di stato; rispetto a tale base lo stato iniziale può essere decomposto nella forma:

$$(III.26) \quad x_0 = \sum_{i=1}^{\mu} c_i u_i + \sum_{k=1}^{\nu} (c_k u_k + \hat{c}_k u_k^*)$$

nella quale le costanti  $c_i$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ) e  $c_k, \hat{c}_k$  ( $k = 1, \dots, \nu$ ) sono specificate univocamente. Inoltre, essendo  $x_0$  reale, si ha anche che:

$$(III.27) \quad \hat{c}_k = c_k^*$$

(1) - In proposito è sufficiente tenere presente che gli autovalori di  $A$  soddisfano la relazione  $(A - \lambda I) u = 0$ . Se  $u$  è una soluzione di tale equazione ed  $A$  è ad elementi reali, si verifica immediatamente che  $u^*$  è soluzione della equazione  $(A - \lambda^* I) u^* = 0$ . Questo prova quanto asserito per gli autovettori destri; per quanto riguarda i sinistri è sufficiente tenere presente la (III.15).

Sostituendo la (III.26) nella (III.23) e tenendo presente la (III.17) si ha ora:

$$(III.28) \quad x(t) = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i c_i + \sum_{k=1}^{\nu} (e^{\lambda_k t} u_k c_k + e^{\lambda_k^* t} u_k^* c_k^*)$$

Per sviluppare convenientemente la seconda sommatoria nella (III.28) conviene fare le seguenti posizioni:

$$(III.29) \quad \begin{aligned} u_k &= u_{ka} + j u_{kb} \\ c_k &= c_{ka} + j c_{kb} \end{aligned}$$

e, per quanto riguarda gli autovalori:

$$(III.30) \quad \lambda_k = \alpha_k + j \omega_k$$

Di conseguenza, per il singolo addendo di tale sommatoria, si ha:

$$(III.31) \quad \begin{aligned} & e^{\lambda_k t} u_k c_k + e^{\lambda_k^* t} u_k^* c_k^* \\ &= m_k e^{\alpha_k t} \text{sen}(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + m_k e^{\alpha_k t} \text{cos}(\omega_k t + \varphi_k) u_{kb} \end{aligned}$$

quando si ponga:

$$(III.32) \quad m_k = 2 \sqrt{c_{ka}^2 + c_{kb}^2}$$

$$(III.33) \quad \varphi_k = -\text{arctg} \frac{c_{ka}}{c_{kb}}$$

In definitiva allora, la risposta libera nello stato assume la forma:

$$(III.34) \quad \begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i + \\ &+ \sum_{k=1}^{\nu} (m_k e^{\alpha_k t} \text{sen}(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + m_k e^{\alpha_k t} \text{cos}(\omega_k t + \varphi_k) u_{kb}) \end{aligned}$$

nella quale i singoli addendi sono tutte funzioni a valori reali. Si osserverà che, in effetti, le manipolazioni effettuate hanno portato ad assumere come base nello spazio di stato, in luogo degli  $n$  autovettori destri considerati originariamente, l'insieme dei  $\mu$  vettori  $u_1, \dots, u_\mu$  e dei  $2\nu$  vettori  $u_{1a}, u_{1b}, \dots, u_{\nu a}, u_{\nu b}$ .

### III.3 - I modi naturali del sistema.

L'espressione stabilita nel paragrafo precedente per la risposta libera si presta ad una interessante interpretazione in termini di esperimenti che si possono effettuare sul sistema in evoluzione libera, se si suppone di poter fare assumere allo stato iniziale valori arbitrari. In tali ipotesi è possibile scegliere lo stato iniziale in maniera che la risposta libera coincida con uno solo (peraltro arbitrario) dei termini del tipo:

$$(III.35) \quad c_i e^{\lambda_i t} u_i$$

ovvero:

$$(III.36) \quad m_k e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + m_k e^{\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kb}$$

In effetti, per ottenere il termine (III.35) basta scegliere  $x_0$  pari  $c_i u_i$  [cfr. (III.26)] e, per ottenere il termine (III.36), basta scegliere  $x_0$  pari  $m_k \sin \varphi_k u_{ka} + m_k \cos \varphi_k u_{kb}$ .

Per questo fenomeno, si usa dire che i singoli termini della risposta libera, scritta nella forma (III.34), possono essere *eccitati singolarmente*; in relazione a questa proprietà tali termini prendono il nome di *modi naturali* o semplicemente *modi del sistema*.

Tali modi hanno anche le seguenti proprietà:

- una qualsiasi risposta libera si può decomporre in una ed una sola maniera come sovrapposizione di un certo numero di modi naturali;

- l'entità dell'eccitazione del singolo modo [i valori  $c_i$  per i modi (III.35) ed i valori  $m_k, \varphi_k$  per i modi (III.36)] è indipendente da quelle di tutti gli altri e dipende solo dallo stato iniziale.

La verifica di queste proprietà è immediata e si basa sulla unicità della rappresentazione dello stato iniziale  $x_0$  nella base prescelta per evidenziare i modi [cfr. i commenti alla (III.34)].

Il modo della forma (III.35) viene indicato anche con il nome di *modo aperiodico* e quello della forma (III.36) con il nome di *modo pseudoperiodico*. Prima di svolgere una analisi dettagliata del loro andamento nel tempo e definire i parametri con cui usualmente si caratterizzano è importante sottolineare che i risultati stabiliti sono fondamentali nella comprensione dei fenomeni dinamici nei sistemi lineari, stazionari, di ordine finito. È sorprendentemente significativo che, indipendentemente dalla sua natura (passivo, attivo, ecc.) e dal suo ordine, ogni sistema lineare e stazionario esibisce due soli tipi di modi elementari di comportamento: quello aperiodico e quello pseudoperiodico. Ogni evoluzione libera è una sovrapposizione di tali modi; il numero e i parametri di questi dipendono dal sistema, le entità delle eccitazioni dalle condizioni iniziali.

Passando ora ad esaminare in dettaglio il *modo aperiodico* (III.35), si può anzitutto osservare che il luogo dei punti dello spazio di stato in cui lo stato stesso viene a trovarsi nell'evoluzione libera - o *traiettoria* del modo - è la retta individuata dall'autovettore  $u_i$  (o, il che è lo stesso, un sottospazio a dimensione 1). La *legge temporale* - di moto - con cui tale traiettoria viene percorsa è una legge esponenziale. In definitiva, se lo stato iniziale è scelto lungo la direzione di  $u_i$ , l'evoluzione libera è caratterizzata da una traiettoria che rimane confinata alla retta individuata da  $u_i$  e da un moto di tipo esponenziale. È usuale rappresentare tale legge di moto con il diagramma temporale della funzione  $e^{\lambda_i t}$ , che, al crescere del tempo, risulta crescente, costante o decrescente a seconda che  $\lambda_i$  sia positivo, nullo o negativo (fig. III.1a).

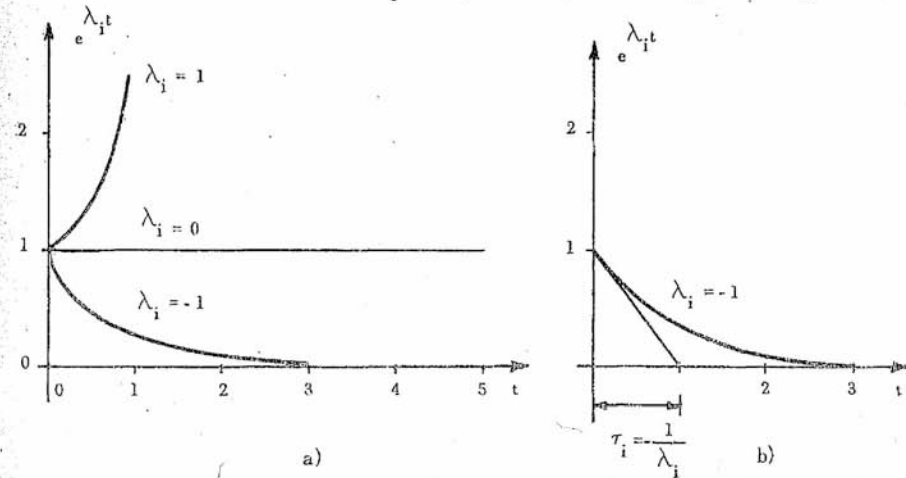


Fig. III.1



Spesso l'espressione  $e^{\lambda_i t}$  viene scritta nella forma:

$$(III.37) \quad e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

dove la costante:

$$(III.38) \quad \tau_i = \frac{-1}{\lambda_i}$$

è la sottotangente (costante) alla funzione e viene detta *costante di tempo*.

Nel caso che più interessa che è quello in  $\lambda_i < 0$ ,  $\tau_i$  è positiva e dopo un intervallo pari ad essa la funzione si riduce ad  $1/e$  del valore iniziale (fig. III.1 b). La  $\tau_i$ , pur fornendo le stesse informazioni di  $\lambda_i$ , è di uso più abituale in quanto dà indicazioni più dirette sulla rapidità della legge di variazione della funzione considerata.

Sulla base dell'esame degli andamenti temporali di fig. III.1 a è possibile individuare i punti dello spazio di stato appartenenti alle traiettorie; si perviene così immediatamente alla fig. III.2 in cui sono considerati rispettivamente i casi in cui  $\lambda_i \geq 0$ . In questa figura vengono rappresentate a tratto grosso le traiettorie orientate nella direzione di tempi crescenti.

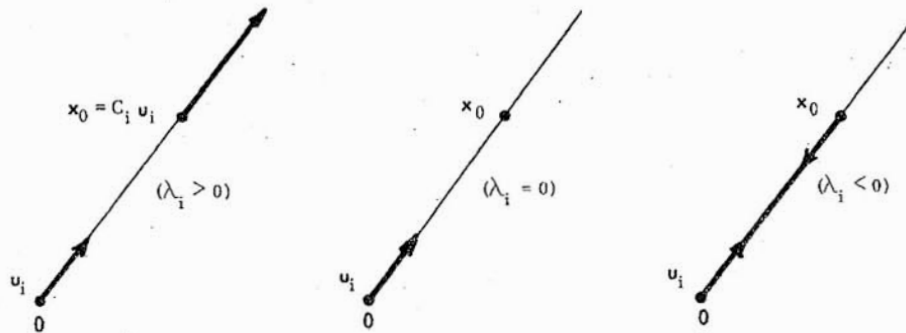


Fig. III.2

Per il modo *pseudo periodico*, l'analisi della (III.36) pone in evidenza che la *traiettoria* corrispondente si sviluppa nel piano individuato dai due vettori  $u_{ka}$  e  $u_{kb}$  (o, che è lo stesso, in un sottospazio a dimensione 2). La *legge di moto* con cui tale traiettoria viene percorsa è

caratterizzata dalle funzioni  $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$  ed  $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$  mediante le quali è possibile esprimere gli andamenti nel tempo delle componenti lungo le due direzioni di  $u_{ka}$  e  $u_{kb}$ .

In definitiva, se lo stato iniziale è scelto in maniera da appartenere al piano individuato da  $u_{ka}$  ed  $u_{kb}$ , l'evoluzione libera è costituita da una traiettoria che rimane confinata e tale piano; le sue proiezioni lungo  $u_{ka}$  ed  $u_{kb}$  vengono percorse con le leggi sopra specificate e che ora si analizzeranno.

A tale scopo è sufficiente considerare la prima delle due funzioni; essa si annulla ad intervalli costanti negli istanti  $h\pi/\omega_k$  (essendo  $h$  intero), nei quali si annulla il fattore sinusoidale, ed è tangente all'esponenziale  $e^{\alpha_k t}$  negli istanti di massimo di tale fattore. Si tratta, come si suol dire, di una forma *pseudoperiodica*, compresa fra due espo-

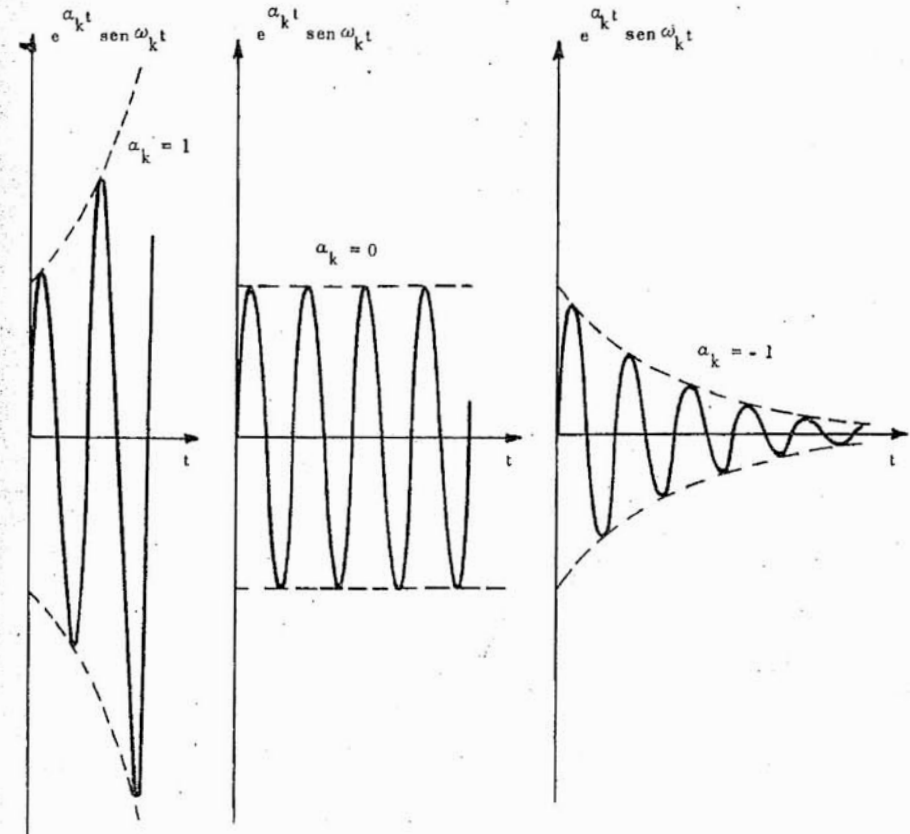


Fig. III.3

nenziali, di ampiezza crescente, costante o decrescente a seconda che  $\alpha_k$  sia positivo, nullo o negativo. Questi esponenziali sono detti gli involuppi della funzione pseudoperiodica e la loro forma è quella già considerata nella fig. III.1 a; in fig. III.3 è rappresentato l'andamento della funzione considerata.

Anche in questo caso può convenire introdurre altre costanti in luogo di  $\alpha_k$  e di  $\omega_k$ . Ad esempio si può adottare la forma:

$$(III.39) \quad e^{-t/\tau_k} \sin \frac{2\pi}{T_k} t$$

nella quale sono messi esplicitamente in evidenza il periodo  $T_k$  del fattore sinusoidale, che individua la distanza fra le successive intersezioni della curva con lo asse dei tempi e la costante di tempo  $\tau_k$  degli esponenziali che delimitano la curva stessa.

Una coppia di costanti largamente adottate è quella che si ottiene con le relazioni:

$$(III.40) \quad \begin{aligned} \omega_{nk} &= \sqrt{\alpha_k^2 + \omega_k^2} \\ \zeta_k &= \frac{-\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \omega_k^2}} \end{aligned}$$

La costante  $\omega_{nk}$  prende il nome di *pulsazione naturale* e la  $\zeta_k$  quello di *coefficiente di smorzamento*. Poichè per ipotesi  $\omega_k$  è reale,  $\zeta_k$  risulta compreso fra -1 e +1 (estremi esclusi)<sup>(1)</sup>; esso è zero quando i due autovalori

(1) - A valori di  $\zeta_k$  esterni all'intervallo (+1, -1) corrispondono valori immaginari di  $\omega_k$  e quindi valori reali di  $\alpha_k \pm \pm j\omega_k$ ;  $\zeta_k = \pm 1$  corrisponde al caso di un autovalore reale di molteplicità 2.

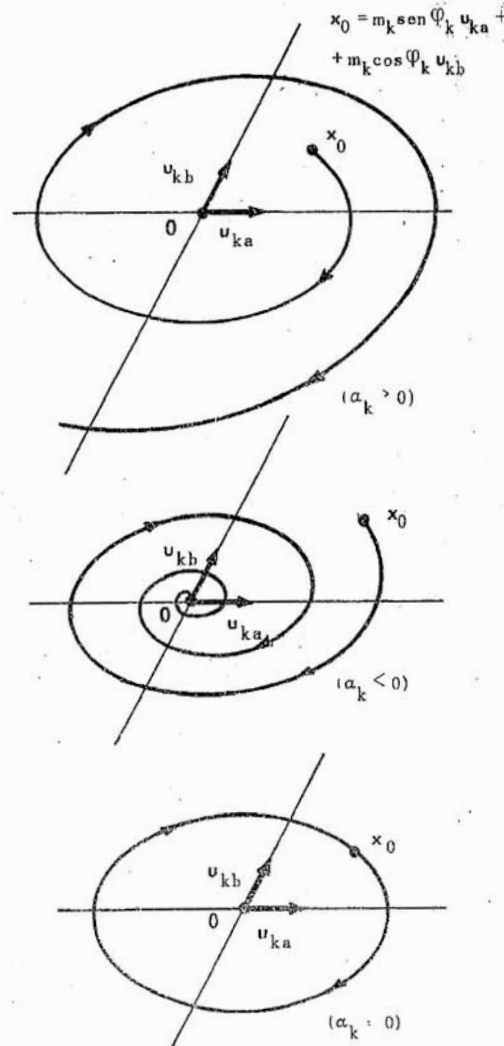


Fig. III.4

lori coniugati che caratterizzano il modo pseudoperiodico in esame sono immaginari (cioè  $\alpha_k = 0$ ), maggiore di zero quando hanno parte reale negativa ( $\alpha_k < 0$ ) e minore di zero quando hanno parte reale positiva ( $\alpha_k > 0$ ); con il suo segno esso caratterizza il tipo dell'involuppo (ad ampiezza, nell'ordine, costante, decrescente o crescente). Per quanto riguarda  $\omega_{nk}$  si constata dalle (III.40) che esso rappresenta la pulsazione dell'andamento sinusoidale che si avrebbe per  $\zeta_k = 0$ .

Dalle  $\zeta_k$  ed  $\omega_{nk}$  si ottengono  $\alpha_k$  ed  $\omega_k$  con le formule:

$$(III.41) \quad \begin{aligned} \alpha_k &= -\zeta_k \omega_{nk} \\ \omega_k &= \sqrt{1 - \zeta_k^2} \omega_{nk} \end{aligned}$$

Per la funzione  $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$  valgono considerazioni perfettamente analoghe a quelle sinora fatte: gli esponenziali involuppo rimangono gli stessi, mentre i punti di intersezione con l'asse e quelli di tangenza negli involuppi sono traslati in anticipo di un quarto di periodo  $T_k$ .

Completato l'esame delle leggi temporali si possono individuare le traiettorie corrispondenti al modo pseudoperiodico; si tratta di spirali convergenti verso l'origine nel caso di  $\alpha_k < 0$ , divergenti nel caso  $\alpha_k > 0$  e degeneranti in traiettorie chiuse per  $\alpha_k = 0$  (cfr. fig. III.4).

#### × III.4 - Esempi.

Per illustrare l'analisi dei modi in evoluzione libera sviluppata nel paragrafo precedente e per chiarire la corrispondente interpretazione in termini di esperimenti che si possono condurre sul sistema, si considerano ora due esempi.

Si consideri il motore elettrico in c.c. di fig. III.5 alimentato sull'armatura a corrente  $I$  costante e controllato sul circuito di eccitazione con una tensione  $v_e$ . Per pervenire alle equazioni di stato si può incominciare con lo scrivere le equazioni di equilibrio; per il circuito di eccitazione, indicata con  $i$  la corrente relativa,  $L$  la induttanza ed  $R$  la resistenza, si ha (sup-

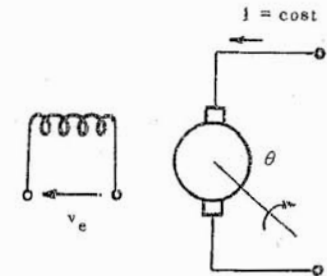


Fig. III.5

ponendo una caratteristica magnetica lineare)

$$(III.42) \quad v_e(t) = R i_e(t) + L \frac{di_e(t)}{dt}$$

Ad essa occorre aggiungere la condizione di equilibrio relativa alle grandezze meccaniche; la coppia motrice  $C_m$  sviluppata per l'interazione tra la corrente di eccitazione e quella di armatura è pari a:

$$(III.43) \quad C_m(t) = K I i_e(t)$$

ove  $K$  è una opportuna costante di proporzionalità che dipende dal motore. Ad essa fa equilibrio la coppia resistente  $C_r$  che qui si suppone costituita da due termini, uno di tipo inerziale e l'altro di tipo dissipativo (attrito viscoso); indicato con  $J$  il momento di inerzia, con  $F$  il coefficiente di attrito e con  $\Omega$  la velocità angolare dell'asse motore si ha:

$$(III.44) \quad C_r(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} + F \Omega(t)$$

Uguagliando  $C_m(t)$  e  $C_r(t)$ , aggiungendo l'equazione che lega la posizione angolare  $\theta$  dell'asse alla velocità  $\Omega$ ,

$$(III.45) \quad \frac{d\theta(t)}{dt} = \Omega(t)$$

dalle equazioni precedenti si può ottenere il sistema di equazioni del primo ordine:

$$(III.46) \quad \begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= \Omega(t) \\ \frac{d\Omega(t)}{dt} &= -\frac{F}{J}\Omega(t) + \frac{KI}{J}i_e(t) \\ \frac{di_e(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i_e(t) + \frac{1}{L}v_e(t) \end{aligned}$$

Se si pone:

$$(III.47) \quad \begin{aligned} \theta &= x_1 \\ \Omega &= x_2 \\ i_e &= x_3 \\ v_e &= u \end{aligned}$$

le equazioni precedenti assumono la forma:

$$(III.48) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$$

ove:

$$(III.49) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{J} & \frac{KI}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$$

Si è così pervenuti ad un modello differenziale ingresso-stato per l'oggetto assegnato; le variabili di stato che compaiono nella particolare rappresentazione trovata hanno un'interpretazione fisica diretta in quanto sono rispettivamente la posizione e la velocità dell'asse motore e la corrente nel circuito di eccitazione. Per sviluppare l'analisi modale si procede nel seguente modo:

- si calcolano gli autovalori, che sono le radici dell'equazione:

$$(III.50) \quad 0 = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda \left( \lambda + \frac{F}{J} \right) \left( \lambda + \frac{R}{L} \right)$$

e cioè:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{F}{J}, \quad \lambda_3 = -\frac{R}{L}$$

- si determinano gli autovettori, che sono le soluzioni (definite a meno di una costante moltiplicativa) delle tre equazioni:

$$(III.51) \quad (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

e per le quali si può scegliere:

Sulla base di questa analisi è possibile stabilire le condizioni che assicurano l'eccitazione o del solo modo aperiodico o di quello pseudoperiodico. Queste ultime sono suscettibili di una immediata interpretazione fisica, sulla base della rappresentazione di fig. III.8. Così, ad esempio se  $v_1(0) = v_2(0)$  e se  $i(0) = 0$  si eccita il solo modo aperiodico, con costante di tempo  $\tau = RC$ ; se invece  $v_1(0) = -v_2(0)$ , quale che sia il valore di  $i(0)$  si eccita solo il modo pseudoperiodico, la cui traiettoria si svolge tutta nel piano individuato da  $u_a$  ed  $u_b$  (cfr. ancora fig. III.8) ed è percorsa con una legge di moto oscillatoria smorzata.

### × III.5 - I modi naturali nella risposta libera in uscita e nel regime forzato.

I modi naturali sono stati introdotti con specifico riferimento all'analisi della risposta nello stato del sistema in evoluzione libera; essi però intervengono anche, come è naturale attendersi, nella risposta libera in uscita e, per lo stretto legame che sussiste tra regime libero e forzato, anche in quest'ultimo. L'analisi della maniera in cui i modi naturali intervengono in questi regimi si presenta di notevole interesse, anche perchè permette di mettere in luce alcuni aspetti fondamentali sulla possibilità di osservare - attraverso l'uscita - e di eccitare - attraverso l'ingresso - i modi naturali del sistema. Iniziando a trattare la prima delle due situazioni, si ricordi che l'espressione della risposta libera nell'uscita è data da [cfr. (II.57)]:

$$(III.58) \quad y(t) = C x(t)$$

Per esaminare come i modi naturali del sistema si riflettano sull'uscita basta sostituire ad  $x(t)$  l'espressione (III.34), ottenendo:

$$(III.59) \quad y(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} C u_i + \\ + \sum_{k=1}^{\nu} (m_k e^{a_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) C u_{ka} + m_k e^{a_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k) C u_{kb})$$

Il generico modo aperiodico (III.35) dà luogo, in uscita, al termine:

$$(III.60) \quad c_i e^{\lambda_i t} C u_i$$

nel quale  $C u_i$  è un vettore a  $p$  componenti (cioè un elemento nello spazio dei valori dell'uscita); se esso è diverso da zero si può dire che al modo naturale (III.35) ne corrisponde uno nell'uscita con traiettoria appartenente ad un sottospazio a dimensione 1 (nello spazio dei valori dell'uscita) e con identica legge di moto. Si può dunque concludere che l'eccitazione di tale modo può essere osservata anche attraverso l'uscita. Se invece,  $C u_i = 0$ , al modo naturale in esame corrisponde una uscita nulla o, il che è lo stesso, la sua eccitazione non può venire osservata.

Considerazioni analoghe si possono ripetere per il modo pseudoperiodico; va tenuto presente però che la traiettoria nello spazio dei valori delle uscite può essere anche confinata ad un sottospazio di dimensione 1 (ciò avviene se uno solo dei due vettori  $C u_{ka}$  o  $C u_{kb}$  è diverso da zero).

A titolo di esempio si consideri ancora il motore elettrico esaminato nel paragrafo III.4 e si supponga che la trasformazione in uscita sia:

$$(III.61) \quad y(t) = x_1(t) = (1 \ 0 \ 0) x(t)$$

il che corrisponde ad osservare, come uscita del sistema, la posizione angolare dell'asse motore. Tenendo presente la (III.52) si ha:

$$(III.62) \quad C u_1 = 1, \quad C u_2 = 1, \quad C u_3 = 1$$

e quindi tutti e tre i modi si riflettono sull'uscita e possono essere osservati. Se invece si considera come uscita la velocità dell'asse motore si ha, in luogo della (III.61):

$$(III.63) \quad y(t) = x_2(t) = (0 \ 1 \ 0) x(t)$$

e quindi:

$$(III.64) \quad C u_1 = 0, \quad C u_2 = -\frac{F}{J}, \quad C u_3 = -\frac{R}{L}$$

ed il modo naturale associato all'autovalore  $\lambda_1$  non compare nell'uscita.

In modo analogo, per quanto riguarda l'esempio di fig. III.7, se si considerano come uscita le due tensioni sui condensatori e cioè:

$$(III.65) \quad y(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$



si ha:

$$(III.66) \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si riflettono dunque nell'uscita sia il modo aperiodico sia quello pseudoperiodico, ma quest'ultimo è confinato alla direzione  $\mathbf{C} \mathbf{u}_a$ . Infine, se come uscita si considera la corrente nell'induttanza:

$$(III.67) \quad y(t) = i(t) = (0 \quad 0 \quad 1) \mathbf{x}(t)$$

risulta:

$$(III.68) \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_a = -\frac{1}{R}, \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_b = -2 \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{1}{4R^2}}$$

e dunque solo il modo pseudoperiodico può venire osservato dall'uscita.

Passando a considerare il regime forzato, conviene anzitutto riscrivere l'espressione della risposta forzata nello stato. Questa, tenendo presenti la (II.18) e la (II.55) risulta:

$$(III.69) \quad \mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

ed è completamente caratterizzata dalla matrice  $\Phi(t) \mathbf{B}$ . È perciò sufficiente analizzare come quest'ultima sia legata ai modi naturali del sistema.

Per mettere in evidenza tali legami, si osservi innanzitutto che [cfr. paragrafo II.3], la risposta ad un ingresso del tipo:

$$(III.70) \quad \text{i-esima posizione} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t - t_0)$$

assume la forma:

$$(III.71) \quad \mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{b}_i$$

essendo  $\mathbf{b}_i$  la i-esima colonna della matrice  $\mathbf{B}$ .

Se si confronta questa espressione con la (III.3) si constata che la risposta forzata in esame coincide formalmente con la risposta libera a partire dallo stato iniziale:

$$(III.72) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b}_i$$

Ricordando i risultati stabiliti per l'analisi modale della risposta libera, si può dunque concludere che la risposta forzata nello stato all'ingresso (III.70) è costituita dalla sovrapposizione di modi naturali del sistema, quelli eccitati dallo stato iniziale (III.72).

Se  $\mathbf{b}_i$  è tale da avere componenti diverse da zero lungo tutte le direzioni individuate dai vettori  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\mu$  e lungo tutti i piani individuati dalle coppie  $\mathbf{u}_{1a}, \mathbf{u}_{1b}, \dots, \mathbf{u}_{\nu a}, \mathbf{u}_{\nu b}$ , tutti i modi naturali sono presenti nell'i-esima colonna della matrice  $\Phi(t) \mathbf{B}$ ; in caso diverso, ovviamente, solo alcuni modi saranno presenti.

Se si considera l'intera matrice delle risposte impulsive potrà avvenire che un singolo modo sia presente in determinate colonne e non in altre; potrà anche avvenire che alcuni modi non siano presenti in alcuna colonna. In questo caso si dice che nessuno degli impulsi (III.70) eccita i modi in questione.

Può essere interessante esaminare anche se esistano ingressi impulsivi in grado di eccitare i modi naturali uno solo alla volta. A tale scopo si può considerare l'ingresso:

$$(III.73) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \delta(t - t_0)$$

ove  $\mathbf{u}_0$  è un arbitrario vettore a p dimensioni (un elemento nello spazio dei valori dell'ingresso), al quale corrisponde la risposta:

$$(III.74) \quad \mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{B} \mathbf{u}_0$$

Se è possibile scegliere  $\mathbf{u}_0$  in maniera tale che il vettore  $\mathbf{B} \mathbf{u}_0$  assuma una delle direzioni (o appartenga ad uno dei piani) che caratterizzano i modi naturali, l'ingresso (III.73) eccita solo il modo relativo.

Per completare l'analisi del regime forzato occorre considerare anche la risposta in uscita. Per i sistemi strettamente propri, in cui  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , l'uscita è legata allo stato della (III.58) e quindi, per la (III.69), assume l'espressione:

$$(III.75) \quad \mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{C} \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Considerando l'ingresso (III.70) la risposta in uscita assume la forma:

$$(III.76) \quad y(t) = \mathbf{C} \Phi(t - t_0) \mathbf{b}_i$$

per la quale si applicano sia le considerazioni svolte immediatamente sopra a proposito dell'eccitazione dei modi naturali attraverso ingressi impulsivi, sia quelle svolte all'inizio a proposito della loro osservazione attraverso l'uscita. Si può dunque dire che *le colonne della matrice delle risposte impulsive sono costituite dalla sovrapposizione di modi naturali nell'uscita*. Più precisamente in esse sono presenti solo quei modi che possono *sia essere eccitati* dagli impulsi in ingresso e *sia essere osservati* nell'uscita.

Esaminando gli esempi del paragrafo III.4, si osservi che, nel primo di essi, per la (III.49),  $\mathbf{b}$  è nella direzione di  $x_3$  e perciò (cfr. fig. III.6) ha componenti non nulle lungo tutti e tre gli autovettori; quindi nella matrice delle risposte impulsive nello stato sono presenti i tre modi naturali, che risultano così tutti eccitati dall'impulso in ingresso. Se si considera come trasformazione in uscita la (III.61) tutti e tre i modi sono presenti nell'uscita. Se invece si considera la trasformazione (III.63) il modo naturale associato all'autovalore  $\lambda_1$ , pur eccitato dall'impulso, non viene osservato dall'uscita.

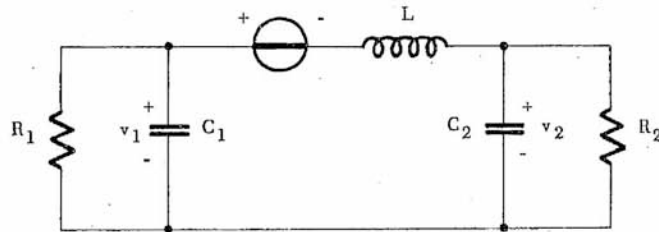


Fig. III.9

Analogamente si può constatare, che nel circuito di fig. III.7, un ingresso impulsivo eccita sia il modo aperiodico sia il modo pseudoperiodico, anche se la possibilità di osservarli dipende dalla trasformazione in uscita. Può essere utile mostrare come, alterando la posizione del generatore di tensione nel circuito, si possa ottenere un sistema in cui non tutti i modi sono eccitati da un ingresso impulsivo. Si supponga di considerare il circuito di fig. III.9 e si scrivano le condizioni di equilibrio relativo: assumendo anche in questo caso come variabili di stato le (III.54), la matrice  $\mathbf{A}$  risulta ancora quella della formula (III.55) mentre

la  $\mathbf{b}$  diventa:

$$(III.77) \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$$

Autovettori ed autovalori risultano gli stessi per cui è ancora valida la rappresentazione di fig. III.8.

Il vettore  $\mathbf{b}$  questa volta è nella direzione di  $x_3$  e quindi solo il modo pseudoperiodico viene eccitato dall'impulso. Naturalmente solo questo può essere osservato, quale che sia la trasformazione in uscita.

### III.6 - Cenni sulla generalizzazione dei risultati al caso di autovalori non distinti.

L'analisi svolta nei paragrafi precedenti è stata basata sull'ipotesi che gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  siano distinti.

Questa ipotesi è stata fatta per dare alla trattazione maggiore semplicità e, soprattutto, immediatezza di interpretazione. Non ci sono tuttavia difficoltà sostanziali ad estendere l'analisi svolta al caso generale, in cui, cioè, le radici del polinomio caratteristico di  $\mathbf{A}$  possano avere una molteplicità maggiore di uno. Lo studio del caso generale non verrà svolto in dettaglio, sia per i limiti che ci si impone in questa trattazione sia perchè esso presuppone una conoscenza di algebra lineare non limitata alle nozioni elementari riportate in Appendice A.III.1. Si riporteranno i soli risultati essenziali.

Allo scopo, si consideri la matrice caratteristica  $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$  associata ad  $\mathbf{A}$ ; oltre al polinomio caratteristico  $d(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$  (cfr. A.III.1) ha in questo caso interesse il considerare il rapporto che si ottiene dividendo  $d(\lambda)$  per il massimo comune divisore dei minori (anch'essi polinomi) di ordine  $n - 1$  della matrice caratteristica. Questo rapporto risulta un polinomio<sup>(1)</sup>, che viene detto *polinomio minimo* di  $\mathbf{A}$ .

Per evidenziare legami e differenze tra polinomio caratteristico e polinomio minimo conviene partire dall'espressione del primo di essi in funzione degli autovalori, che risulta [in luogo della (A.3)]:

(1) - Per la verifica di ciò basta pensare alla regola per lo sviluppo di un determinante secondo gli elementi di una riga.

$$(III.78) \quad d(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

essendo  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  le  $r$  radici distinte dell'equazione caratteristica (autovalori di  $\mathbf{A}$ ) e  $n_i$  le corrispondenti molteplicità; naturalmente:

$$(III.79) \quad \sum_{i=1}^r n_i = n$$

Il polinomio minimo ha le stesse radici  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  della (III.78), con molteplicità uguale o inferiore. Più precisamente esso può essere posto nella forma:

$$(III.80) \quad m(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

con:

$$(III.81) \quad m_i \leq n_i \quad \forall_i$$

$$(III.82) \quad \sum_{i=1}^r m_i = m \leq n$$

Nel caso che le radici di  $d(\lambda)$  siano tutte distinte, polinomio minimo e polinomio caratteristico coincidono.

Il ruolo svolto dal polinomio caratteristico nell'analisi dei modi quando le sue radici sono distinte viene assunto dal polinomio minimo nel caso generale. Più precisamente: nel caso particolare il comportamento dinamico è caratterizzato da modi in numero pari al grado  $n$  del polinomio caratteristico e con andamento nel tempo dipendente solo dai valori  $\lambda_i$ ; nel caso generale tale comportamento è ancora caratterizzato da modi, in numero però pari ad  $r$  (numero di autovalori distinti) e con andamento individuato sia dai valori  $\lambda_i$  sia dai numeri  $m_i$  (che caratterizzano le molteplicità del polinomio minimo). Si può dimostrare che il generico modo assume la forma:

$$(III.83) \quad (c_0 + c_1 t + \dots + c_{m_i-1} t^{m_i-1}) e^{\lambda_i t}$$

dove  $c_0, \dots, c_{m_i-1}$  sono costanti vettoriali dipendenti dal solo stato iniziale. Nel caso che  $\lambda_i$  sia reale, questa espressione differisce dalla (III.35) per il fatto che il fattore che moltiplica la funzione  $e^{\lambda_i t}$  è un polinomio in  $t$  anziché una costante. È da rilevare che, nella (III.35), è

esplicitata la dipendenza del fattore costante dallo stato iniziale (scalare  $c_i$ ) e da una grandezza caratteristica dello spazio di stato (autovettore  $u_i$ ), il che dà la possibilità di interpretare tale modo in maniera più significativa di quanto non sia possibile nella (III.83), in cui per le costanti vettoriali non è sviluppata un'analisi analoga.

Si ritiene utile osservare che, dipendendo le costanti della (III.83) dallo stato iniziale, l'andamento stesso nel tempo del modo in esame viene a dipendere da tale stato; in particolare lo stato iniziale può essere tale da eccitare il modo nella forma  $c_0 e^{\lambda_i t}$ , ovvero nella forma  $(c_0 + c_1 t) e^{\lambda_i t}$ , ecc.<sup>(1)</sup>. Se  $m_i = 1$ , ovviamente la (III.83) si riduce al solo termine  $c_0 e^{\lambda_i t}$ ; questo si può porre sempre nella forma (III.35) ma l'autovettore  $u_i$  è definito univocamente (a meno di una costante moltiplicativa) solo se è contemporaneamente  $n_i = 1$ .

Se  $\lambda_i$  è complesso nella (III.83), supponendo la matrice  $\mathbf{A}$  ad elementi reali e lo stato iniziale reale, nella risposta è presente anche una funzione dello stesso tipo caratterizzata dal valore coniugato  $\lambda_i^*$  e da valori coniugati delle costanti  $c_0^*, \dots, c_{m_i-1}^*$ . Sviluppando un'analisi analoga a quella svolta per giungere alla (III.36), si può mostrare che anche questa volta si perviene dai due termini relativi a  $\lambda_i$  ed a  $\lambda_i^*$  ad un'unica funzione a valori reali. Per essa valgono considerazioni analoghe a quelle svolte per la (III.83).

Per concludere, si può affermare che anche nel caso in cui gli autovalori non sono distinti *la risposta libera può essere decomposta in una e una sola maniera in modi naturali*, cioè in funzioni che possono essere eccitate singolarmente e con entità dipendente dalle sole condizioni iniziali. Il fatto nuovo è che, *questa volta, anche la forma dei modi naturali dipende dalle condizioni iniziali*.

### III.7 - L'uso della trasformata di Laplace per rappresentare i modelli dei sistemi lineari stazionari.

È usuale, nello studio dei sistemi lineari stazionari, adottare, accanto a quelli sviluppati nei paragrafi precedenti, metodi di analisi basati sull'impiego della trasformata di Laplace. Per esaminare come si modificano le rappresentazioni dei modelli di tali sistemi, o delle matrici che li caratterizzano, si incominci con l'effettuare la trasformazione di

(1) - Si può dimostrare che se  $c_i \neq 0$  risultano diversi da zero anche  $c_0, c_1, \dots, c_{m_i-1}$ . Si veda in proposito il testo di C. A. Zadeh - L. A. Desoer: *Linear System Theory*, McGraw-Hill (New York), 1963, pp. 326.



Laplace di ambo i membri della equazione (III.1) e si indichi con  $s$  la variabile di Laplace. Posto allora  $t_0 = 0$  ed  $x(t_0) = x_0$ , si ha:

$$(III.84) \quad s x(s) - x_0 = A x(s)$$

Si richiama l'attenzione sul fatto che la distinzione tra funzioni di  $t$  e funzioni di  $s$  è affidata all'indicazione esplicita della variabile (piuttosto che all'uso rispettivo delle minuscole e delle maiuscole, qui usate di norma per distinguere vettori da matrici). Dalla (III.84) si ha immediatamente:

$$(III.85) \quad x(s) = (s I - A)^{-1} x_0$$

Dal confronto con la trasformata della (III.3):

$$(III.86) \quad x(s) = \Phi(s) x_0$$

si ha:

$$(III.87) \quad \Phi(s) = (s I - A)^{-1}$$

Una volta trovata l'espressione di  $\Phi(s)$  si possono dedurre quelle delle altre matrici che caratterizzano i sistemi lineari stazionari. Tenendo infatti presenti le (III.12), (III.13) e (III.14) e ricordando che la trasformazione secondo Laplace è un'operazione lineare si ha:

$$(III.88) \quad H(s) = (s I - A)^{-1} B$$

$$(III.89) \quad \Psi(s) = C(s I - A)^{-1}$$

$$(III.90) \quad W(s) = C(s I - A)^{-1} B + D$$

L'ultima di queste, che è la trasformata di Laplace della matrice delle risposte impulsive, viene chiamata *matrice delle funzioni di trasferimento* (o *matrice di trasferimento*).

È utile esaminare come le matrici così introdotte intervengono nelle espressioni per il calcolo della risposta libera e forzata, nello stato e nell'uscita. Dalla (III.86) si constata che, per ottenere la trasformata della risposta libera nello stato, basta premoltiplicare lo stato iniziale  $x_0$  per la matrice  $\Phi(s)$ . Analogamente, considerando la trasformata della (III.58), la (III.85) e la (III.89), si ha:

$$(III.91) \quad y(s) = \Psi(s) x_0$$

e cioè basta premoltiplicare lo stato iniziale per la matrice  $\Psi(s)$ , per ottenere la risposta libera (nel dominio di  $s$ ) nell'uscita. Per quanto ri-

guarda le risposte forzate, trasformando le (III.69) e (III.75) [nella quale sia stato aggiunto il termine  $D u(t)$ ] si ha:

$$(III.92) \quad x(s) = H(s) u(s)$$

$$(III.93) \quad y(s) = W(s) u(s)$$

ove si è tenuto conto delle relazioni (III.87), (III.88) e (III.90).

Si può dunque dire che, per ottenere le risposte forzate nello stato e nell'uscita (nel dominio di  $s$ ) occorre premoltiplicare per  $H(s)$  e, rispettivamente,  $W(s)$ , la trasformata della funzione di ingresso.

In definitiva, nel dominio di  $s$ , l'operazione di calcolo delle risposte libera o forzata, nello stato e nell'uscita, si riduce sempre alla operazione algebrica di premoltiplicazione, per una opportuna matrice, della grandezza (stato iniziale o ingresso) che rappresenta lo stimolo in corrispondenza al quale si vuole valutare l'effetto.

È importante analizzare la struttura delle funzioni di  $s$  sopra introdotte. Riferendosi innanzitutto alla (III.87), si osservi che il secondo membro, come ben noto, si può scrivere nella forma:

$$(III.94) \quad (s I - A)^{-1} = \frac{(s I - A)^a}{d(s)}$$

dove  $d(s)$  è il determinante di  $(s I - A)$  e cioè il *polinomio caratteristico* della matrice  $A$ , considerato funzione della variabile  $s$ :

$$(III.95) \quad d(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

ed  $(s I - A)^a$  è la matrice aggiunta di  $s I - A$ . Gli elementi di questa matrice sono minori di ordine  $n - 1$  di  $(s I - A)$  e quindi polinomi di grado al più  $n - 1$  in  $s$ ; quindi si può scrivere:

$$(III.96) \quad (s I - A)^a = B(s) = B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_1 s + B_0$$

dove le  $B_0, \dots, B_{n-1}$  sono matrici costanti  $n \times n$ . In definitiva si ha:

$$(III.97) \quad \Phi(s) = (s I - A)^{-1} = \frac{B(s)}{d(s)} = \frac{B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_1 s + B_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Da questa si può vedere che la *trasformata di Laplace della matrice di transizione* è una matrice i cui elementi sono funzioni razionali di  $s$ , ciascuno avente il denominatore di grado superiore a quello del



denominatore, e cioè una matrice razionale di  $s$ , strettamente propria<sup>(1)</sup>

Tenenlo presenti le (III.88), (III.89) e (III.90) e il risultato ora stabilito si può quindi concludere che tutte le matrici che caratterizzano il modello esplicito di un sistema lineare stazionario sono matrici razionali di  $s$ . La  $W(s)$  è una matrice propria se  $D \neq 0$  (sistema proprio) e strettamente propria se  $D = 0$  (sistema strettamente proprio). Le altre matrici sono sempre strettamente proprie.

In rapporto alle diverse esigenze di analisi che si possono incontrare, per tali matrici possono venire adottati differenti tipi di rappresentazione; una breve rassegna di questi è riportata, per comodità del lettore, nell'Appendice A.III.2.

Nel completare lo studio nel dominio della variabile  $s$ , è utile esaminare come l'analisi dei modi sviluppata nei paragrafi precedenti si rifletta nella rappresentazione delle funzioni di  $s$  qui considerate. Per evidenziare i modi nella trattazione in  $t$ , è stato necessario fare ricorso alla rappresentazione spettrale di  $e^{At}$  [cfr. (III.21)]; nel dominio di  $s$  un ruolo analogo gioca lo sviluppo di  $(sI - A)^{-1}$  in frazioni parziali. Allo scopo di pervenire a tale sviluppo, riferendosi ai risultati richiamati nell'Appendice A.III.2, occorre partire dalla conoscenza del minimo denominatore comune degli elementi di  $(sI - A)^{-1}$ . Si può dimostrare<sup>(2)</sup> che quest'ultimo coincide con il polinomio minimo della matrice  $A$ , introdotto nel paragrafo III.6; di conseguenza i poli della funzione  $(sI - A)^{-1}$  coincidono con gli autovalori della matrice  $A$ . Iniziando con il trattare il caso in cui gli autovalori sono distinti (polinomio minimo e

(1) - L'espressione (III.87), alla luce delle considerazioni ora tratte, costituisce, nel dominio della variabile  $s$  di Laplace, il parallelo di ciò che la (III.6) costituisce nel dominio della variabile  $t$ .

Dal confronto delle (III.6) e (III.87) si ha anche:

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

Questa, nel caso in cui sia  $n=1$ , si riduce alla ben nota relazione:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = (s - a)^{-1}$$

in cui lo scalare  $a$  tiene il luogo della matrice  $A$ .

(2) - Dalla (III.94) risulta immediatamente che il polinomio caratteristico  $d(s)$  è un denominatore comune degli elementi di  $(sI - A)^{-1}$ . Può inoltre accadere che tutti gli  $n$  elementi del numeratore abbiano fattori comuni con  $d(s)$ : il massimo di tali fattori comuni, per definizione di matrice aggiunta, è il massimo comune divisore dei minori di ordine  $n-1$  della matrice  $sI - A$ . Eliminando tale fattore dagli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  e da  $d(s)$  si ottiene una forma nella quale è in evidenza il minimo denominatore comune; questo, per la definizione data nel paragrafo III.6, è il polinomio minimo di  $A$ .

polinomio caratteristico coincidono), lo sviluppo in frazioni parziali di  $(sI - A)^{-1}$  assume la forma:

$$(III.98) \quad (sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i}$$

e le matrici residue  $R_i$  si possono calcolare con la relazione:

$$(III.99) \quad R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) (sI - A)^{-1}$$

Confrontando l'antitrasformata della (III.98):

$$(III.100) \quad \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \sum_{i=1}^n R_i e^{\lambda_i t}$$

e la (III.21) si trova un legame tra ciascun residuo  $R_i$  e gli autovettori  $u_i$  e  $v_i$ ; più precisamente si ha:

$$(III.101) \quad R_i = u_i v_i'$$

A questo punto risulta possibile sviluppare dettagliatamente la analisi dei modi. Supponendo, al solito,  $A$  ad elementi reali è conveniente separare, nella (III.98), i termini relativi ad autovalori reali (in numero di  $\mu$ ) da quelli complessi coniugati (in numero di  $\nu$  coppie). Si ha allora:

$$(III.102) \quad (sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^{\nu} \left( \frac{R_k}{s - \lambda_k} + \frac{\hat{R}_k}{s - \lambda_k^*} \right)$$

È facile verificare, applicando la (III.99), che:

$$(III.103) \quad \hat{R}_k = R_k^*$$

Posto allora:

$$(III.104) \quad R_k = R_{ka} + j R_{kb}$$

e ricordando la posizione (III.30), la (III.102) si può scrivere nella forma:

$$(III.105) \quad (sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{2 R_{ka} (s - \alpha_k) - 2 R_{kb} \omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2}$$

Antitrasformando l'espressione della risposta libera  $(sI - A)^{-1} x_0$  con  $(sI - A)^{-1}$  data dall'ultima espressione sopra trovata si ottiene la forma (III.34), cioè l'espressione della risposta libera in funzione dei modi.

Per l'uguaglianza formale basta porre:

$$(III.106) \quad R_i x_0 = c_i u_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

$$(III.107) \quad 2 R_{ka} x_0 = m_k \operatorname{sen} \varphi_k u_{ka} + m_k \operatorname{cos} \varphi_k u_{kb} \quad (k = 1, 2, \dots, \nu)$$

$$(III.108) \quad 2 R_{kb} x_0 = -m_k \operatorname{cos} \varphi_k u_{ka} + m_k \operatorname{sen} \varphi_k u_{kb}$$

Si osserva che le considerazioni sinora svolte offrono un procedimento di calcolo alternativo a quello esposto nel paragrafo III.2. In ambedue i casi occorre determinare gli autovalori della matrice  $A$ . Operando direttamente in  $t$  occorre poi determinare un insieme di autovettori destri linearmente indipendenti ed applicare le formule del paragrafo III.2; operando invece in  $s$  occorre calcolare i residui ed applicare le formule precedenti.

In funzione delle costanti di tempo introdotte con la (III.38), delle pulsazioni naturali e dei coefficienti di smorzamento introdotte con le (III.40), la (III.105) può essere riscritta nella forma:

$$(III.109) \quad (sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i \tau_i}{1 + \tau_i s} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\frac{2 R_{ka}}{\omega_{nk}} \left( \frac{s}{\omega_{nk}} + \zeta_k \right) - \frac{2 R_{kb}}{\omega_{nk}} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{1 + \frac{2 \zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}}$$

Questa espressione è particolarmente importante perchè mette in evidenza, sia pure in forma implicita attraverso la scrittura dei denominatori, sia le costanti di tempo  $\tau_i$  dei modi aperiodici, sia pulsazione naturale  $\omega_{nk}$  e coefficiente di smorzamento  $\zeta_k$  dei modi pseudoperiodici.

Passando ora a considerare il caso di autovalori non distinti, se si tiene presente l'espressione (III.80) del polinomio minimo, per  $(sI - A)^{-1}$  si ha lo sviluppo:

$$(III.110) \quad (sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{ik}}{(s - \lambda_i)^k}$$

ove le  $R_{ik}$ , che sono matrici costanti  $n \times n$ , si possono calcolare con:

$$(III.111) \quad R_{ik} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(m_i - k)!} \frac{d^{m_i - k}}{ds^{m_i - k}} [(sI - A)^{-1} (s - \lambda_i)^{m_i}]$$

Effettuando l'antitrasformata della (III.110) si ottiene:

$$(III.112) \quad \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t}$$

Come si vede, in questo caso la risposta libera appare composta di  $r$  termini, i quali, per quanto detto alla fine del paragrafo III.6, costituiscono i modi naturali del sistema. Confrontando tali termini con la espressione (III.83), si ha inoltre:

$$(III.113) \quad \begin{aligned} c_0 &= R_{i1} x_0 \\ c_1 &= R_{i2} x_0 \\ &\dots \dots \dots \\ c_{m_i-1} &= \frac{1}{(m_i - 1)!} R_{i, m_i} x_0 \end{aligned}$$

Va sottolineato che il complesso delle formule da (III.110) a (III.112) offre un procedimento per il calcolo esplicito dei modi, nel caso di autovalori non distinti.

### III.8 - La risposta a regime permanente ed un'interpretazione della matrice di trasferimento.

Alla matrice delle funzioni di trasferimento, definita nel paragrafo precedente come trasformata di Laplace della matrice delle risposte impulsive, può essere data un'interpretazione autonoma in termini di comportamento, a regime permanente, a particolari classi di ingressi.

Per dare questa interpretazione e definirne i limiti di validità, occorre definire in modo preciso il concetto di *risposta a regime permanente*. Ci si riferirà al caso della risposta in uscita, che interessa in questo ambito, anche se la definizione può essere data in maniera analoga per la risposta nello stato. Limitandosi al caso dei sistemi stazionari, che si stanno esaminando in questo capitolo, si consideri l'espressione della risposta complessiva (risposta libera e risposta forzata) ad un ingresso  $u$  ed a partire da uno stato iniziale  $x_0$  assunto all'istante  $t_0$ :

$$(III.114) \quad y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

La (III.114) è la particolarizzazione della (II.43) al caso stazionario e tiene conto delle espressioni (III.13) e (III.14) di  $\Psi(t)$  e  $W(t)$ .

Per definire la risposta a regime permanente ad un ingresso  $\tilde{u}$  si sostituisca  $\tilde{u}$  ad  $u$  nella (III.114) e si consideri la successione di funzioni che si ottengono da questa assumendo  $t_0$  come parametro ed attribuendo ad esso valori decrescenti.

Basandosi sulla considerazione di questa successione si può dare la seguente:

**Definizione III.7.** Data una funzione di ingresso  $\tilde{u}$ , si dice che esiste la corrispondente risposta in uscita a regime permanente se la successione di funzioni definite dalla (III.114), con  $u = \tilde{u}$ , converge, per  $t_0 \rightarrow -\infty$ , ad una funzione  $\tilde{y}$  indipendente dal valore  $x_0$ . In tal caso  $\tilde{y}$  prende il nome di risposta in uscita a regime permanente corrispondente all'ingresso  $\tilde{u}$ .  $\triangleleft$

Le condizioni sotto le quali la funzione  $\tilde{y}$  esiste sono relative sia al sistema, sia all'ingresso  $\tilde{u}$ .

Per quanto riguarda le prime, si esamini l'espressione (III.114) tenendo presente che, per la (III.112) (che permette di considerare anche il caso di autovalori non distinti nella matrice  $A$ ) si ha:

$$(III.115) \quad e^{A(t-t_0)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i(t-t_0)}$$

L'analisi di questa espressione mostra che, se gli autovalori reali sono negativi e gli autovalori complessi hanno parte reale negativa, il

che si può condensare nella formula<sup>(1)</sup>:

$$(III.116) \quad \operatorname{Re} [\lambda_i] < 0 \quad \forall i$$

il primo addendo nella (III.14) per  $t_0 \rightarrow -\infty$  tende, quale che sia il valore di  $t$ , a zero e quindi ad un limite indipendente da  $x_0$ .

Per particolari classi di funzioni di ingresso, la (III.116) assicura anche l'esistenza del limite, per  $t_0 \rightarrow -\infty$ , del secondo addendo nella (III.114). In questi casi esiste dunque ed è indipendente da  $x_0$  il limite  $\tilde{y}$ , cioè la risposta in uscita a regime permanente. Tra le funzioni di ingresso per le quali ciò si verifica vanno citate le funzioni periodiche e limitate, le funzioni polinomiali, ecc.<sup>(2)</sup>.

Dalle considerazioni che precedono emerge il fatto che la risposta a regime permanente può calcolarsi con la formula:

$$(III.117) \quad y(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) = \\ = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

e cioè è possibile non considerare, nel calcolo del limite, il primo addendo della (III.114), che tende a zero quando il limite (III.117) esiste.

A titolo di esempio, si consideri il circuito di figura III.10, il cui modello differenziale è dato da:

$$(III.118) \quad \dot{x}(t) = -\frac{R}{L} x(t) + \frac{1}{L} u(t)$$

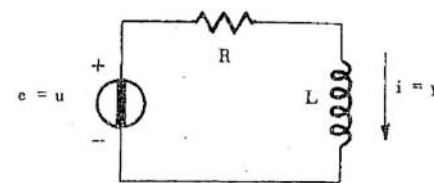


Fig. III.10

$$y(t) = x(t)$$

(1) - Si dimostrerà più avanti che la condizione (III.116) è una condizione di fondamentale importanza nella *teoria della stabilità* in quanto caratterizza la *stabilità asintotica* dei sistemi lineari stazionari. È importante rilevare sin d'ora che tale condizione è invariante nell'ambito dell'equivalenza stretta (cfr. paragrafo II.9) e cioè rimane valida quale che sia la rappresentazione adottata per il sistema in esame, nell'ambito di tale equivalenza.

(2) - Si può dimostrare che la (III.116) è anche *necessaria*, per l'esistenza del regime permanente (secondo la Definizione III.1), in particolari classi di sistemi. Precisamente, si tratta di quei sistemi per i quali la matrice delle risposte impulsive costituisce da sola un modello completo (cfr. le considerazioni all'inizio del paragrafo III.9).

Poichè si ha un solo autovalore negativo, la condizione (III.116) risulta soddisfatta ed è quindi possibile parlare di regime permanente; inoltre questo si può calcolare con la (III.117). Se ad esempio la funzione di ingresso è:

$$(III.119) \quad \tilde{u}(t) = \text{sen } t$$

la (III.117) fornisce:

$$(III.120) \quad \tilde{y}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \frac{1}{L} \text{sen } \tau d\tau = \\ = \frac{R \text{sen } t - L \text{cos } t}{R^2 + L^2}$$

Se la funzione di ingresso è:

$$(III.121) \quad \tilde{u}(t) = a_0 + a_1 t$$

la (III.117) fornisce:

$$(III.122) \quad y(t) = \frac{1}{R} \left( a_0 - \frac{L}{R} a_1 \right) + \frac{a_1}{R} t$$

Il concetto di risposta a regime permanente consente di dare, come si è detto all'inizio del paragrafo, un'interpretazione della funzione  $W(s)$  che è utile per alcuni sviluppi successivi. Si consideri inizialmente, per semplicità di notazioni, il caso in cui ingresso ed uscita hanno una sola componente e quindi la  $W(s)$  è una funzione scalare:  $w(s)$ .

Si supponga che la condizione (III.116) sia soddisfatta e si assuma:

$$(III.123) \quad \tilde{u}(t) = e^{\tilde{s}t}$$

ove  $\tilde{s}$  è un numero complesso. Per il calcolo della risposta a regime permanente la (III.117) fornisce:

$$(III.124) \quad \tilde{y}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t w(t-\tau) e^{\tilde{s}\tau} d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} w(\xi) e^{\tilde{s}(t-\xi)} d\xi = \\ = e^{\tilde{s}t} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} w(\xi) e^{-\tilde{s}\xi} d\xi$$

L'integrale che appare nell'ultima espressione coincide con quello della trasformazione di Laplace e dunque il suo limite esiste se la parte reale di  $\tilde{s}$  è maggiore della ascissa di convergenza  $\alpha$  della funzione  $w(t)$ . Si ha pertanto, per gli ingressi del tipo (III.123):

$$(III.125) \quad y(t) = e^{\tilde{s}t} w(\tilde{s}) \quad \forall \tilde{s} : \text{Re} [\tilde{s}] > \alpha$$

Dalla (III.125) emerge che la funzione di trasferimento assume un significato diretto nel calcolo della risposta nel tempo, a regime permanente, a ingressi della forma (III.123). Più precisamente essa è il rapporto tra la risposta a regime permanente e la corrispondente funzione di ingresso, quando questa è del tipo (III.123).

È utile il confronto di questa interpretazione con quella connessa alla definizione stessa di  $w(s)$ , e riassunta nella (III.98). In essa, la funzione di trasferimento interviene per il calcolo del solo regime forzato nello stato zero, nel dominio della variabile  $s$ . Più precisamente, nel caso di ingresso ed uscita unidimensionali, essa è il rapporto tra la trasformata di Laplace della funzione di uscita e quella della funzione in ingresso, quando lo stato iniziale è zero.

Ritornando alla considerazione della (III.125) si osservi che, per la (III.116), risulta  $\alpha < 0$  e dunque è possibile scegliere:

$$(III.126) \quad \tilde{s} = j\tilde{\omega} \quad (\tilde{\omega} \text{ reale})$$

il che dà luogo alla considerazione di una classe di ingressi di notevole importanza. Si esamini, in particolare, l'ingresso:

$$(III.127) \quad \text{sen } \tilde{\omega} t = \frac{1}{2j} (e^{j\tilde{\omega}t} - e^{-j\tilde{\omega}t})$$

Applicando la (III.125) si ha:

$$(III.128) \quad \tilde{y}(t) = \frac{1}{2j} [w(j\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}t} - w(-j\tilde{\omega}) e^{-j\tilde{\omega}t}]$$

Posto:

$$(III.129) \quad w(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

si ha:

$$(III.130) \quad \tilde{y}(t) = M(\tilde{\omega}) \text{sen} [\tilde{\omega} t + \varphi(\tilde{\omega})]$$

Da questa emerge che la risposta (a regime permanente) ad ingresso sinusoidale,  $\text{sen } \omega t$ , per un sistema nel quale sia soddisfatta la condizione (III.116) (cioè - cfr. nota a pag.97- asintoticamente stabi-



le) è ancora una funzione sinusoidale, di uguale pulsazione  $\tilde{\omega}$ , modificata nell'ampiezza secondo il fattore  $M(\tilde{\omega})$  e sfasata della quantità  $\varphi(\tilde{\omega})$ , essendo  $M(\tilde{\omega})$  e  $\varphi(\tilde{\omega})$  i valori del modulo e della fase della funzione di trasferimento, calcolati per  $s = j\tilde{\omega}$ .

Questa interpretazione, che particolarizza quella della formula (III.125), è fondamentale ai fini della determinazione sperimentale della funzione di trasferimento, come verrà chiarito nel paragrafo successivo. Grazie a tale interpretazione, la funzione  $w(j\omega)$  prende il nome di *risposta armonica*. Si richiama l'attenzione che tale dizione è collegata all'ipotesi che l'asse immaginario, nel piano complesso, appartenga alla regione di convergenza di  $w(s)$ .

Le interpretazioni date fin qui nell'ipotesi di ingresso ed uscita unidimensionali si generalizzano facilmente. Basta osservare che, quando le componenti dell'ingresso sono:

$$(III.131) \quad \begin{aligned} u_j(t) &= 0 & j \neq k \\ u_k(t) &= e^{\tilde{s}t} \end{aligned}$$

la componente  $i$ -esima dell'uscita corrispondente, a regime permanente, è:

$$(III.132) \quad \tilde{y}_i(t) = w_{ik}(s) e^{\tilde{s}t}$$

Dal confronto di quest'ultima con la (III.125), emerge che l'interpretazione data per il caso unidimensionale si può applicare a ciascun elemento della matrice di trasferimento.

È bene rilevare esplicitamente che, come esiste un legame ben definito tra la funzione  $W(s)$  e la funzione  $W(t)$ , attraverso la trasformata di Laplace, così un ben definito legame sussiste anche tra  $W(j\omega)$  e  $W(t)$ . Infatti, la matrice delle risposte armoniche, essendo definita come:

$$(III.133) \quad W(j\omega) = [W(s)]_{s=j\omega} = \int_0^{\infty} W(t) e^{-j\omega t} dt$$

(con  $s = j\omega$  appartenente alla regione di convergenza), coincide con la trasformata di Fourier della matrice delle risposte impulsive.

A conclusione di questo paragrafo si fa presente che, nella pratica, è usuale rappresentare gli elementi della matrice delle risposte armoniche mediante grafici. Le rappresentazioni più diffuse sono descritte nella Appendice A.III.3.

### III.9 - Considerazioni sulla risposta impulsiva e sulla risposta armonica.

La caratterizzazione completa di un sistema lineare e stazionario richiede la conoscenza delle quattro funzioni  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $H$ ,  $W$ , assegnate nel dominio di  $t$ , di  $s$  o di  $\omega$ . Da questo punto di vista esse risultano perciò tutte di uguale importanza; sta di fatto tuttavia che, nello sviluppo della teoria di questi sistemi, la funzione  $W$  gioca un ruolo di particolare rilievo. Ciò si verifica per due ragioni principali:

a) esistono classi di sistemi per i quali la funzione  $W$  costituisce da sola un modello completo, nel senso che la sua conoscenza consente di determinare anche le funzioni  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $H$ ;

b) è possibile, e in diversi modi (come sarà chiarito nel seguito di questo paragrafo), determinare tale funzione mediante rilievi sperimentali sulle sole grandezze terminali di ingresso e di uscita.

A chiarificazione del punto (a) è utile tenere presente quanto visto nel paragrafo III 5 a proposito del legame tra la matrice delle risposte impulsive ed i modi naturali del sistema. È stato mostrato infatti che impulsi in ingresso possono non eccitare tutti i modi e che non tutti i modi eccitati possono essere osservati attraverso l'uscita; è chiaro perciò che in generale l'informazione sul comportamento dinamico del sistema ottenibile dalla funzione  $W$  è un'informazione incompleta. Si mostrerà tuttavia, in un capitolo successivo, che, nel caso in cui gli impulsi eccitino tutti i modi naturali e questi possano essere tutti osservati attraverso l'uscita, la funzione  $W$  costituisce da sola un modello completo, nel senso precisato in (a). Sembra importante far rilevare che queste osservazioni pongono in luce uno dei punti di differenziazione tra la teoria moderna dei sistemi (basata sulla descrizione mediante lo stato) e la teoria classica, nella quale si assume come modello del sistema la sola funzione  $W$  senza alcuna esplicita ipotesi sulle condizioni sotto le quali ciò è valido.

A proposito della determinazione sperimentale di cui si è detto in (b), il modo più diretto di effettuarla è quello legato alla interpretazione illustrata nel Capitolo II e sulla base della quale è stata introdotta la denominazione di matrice delle risposte impulsive.

Si tratta di considerare un ingresso del tipo:

$$(III.134) \quad \begin{matrix} \text{i-esima} \\ \text{posizione} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t)$$

quando il sistema è nello stato iniziale  $x_0 = 0$  e di rilevare l'andamento nel tempo delle  $q$  componenti del vettore di uscita, per  $t$  variabile tra  $0$  ed  $\infty$ ; si ottengono così gli elementi:

$$(III.135) \quad \begin{pmatrix} w_{1i}(t) \\ w_{2i}(t) \\ \vdots \\ w_{qi}(t) \end{pmatrix}$$

La misura ovviamente va ripetuta facendo variare  $i$  da  $1$  a  $p$ .

Il procedimento illustrato vale in linea di principio ed in esso non vengono tenuti presenti i problemi, peraltro di rilevante importanza sul piano pratico, della realizzazione approssimata dell'ingresso impulsivo e della valutazione della precisione con cui possono essere misurati gli elementi della matrice  $W(t)$ . A tali elementi si dà spesso anche il nome di *funzioni ponderatrici* o *funzioni memoria*, per evidenziarne il ruolo svolto nel calcolo della risposta forzata.

Allo scopo di illustrare questo punto si supponga, per semplicità,  $p = q = 1$  e si consideri l'espressione dell'uscita:

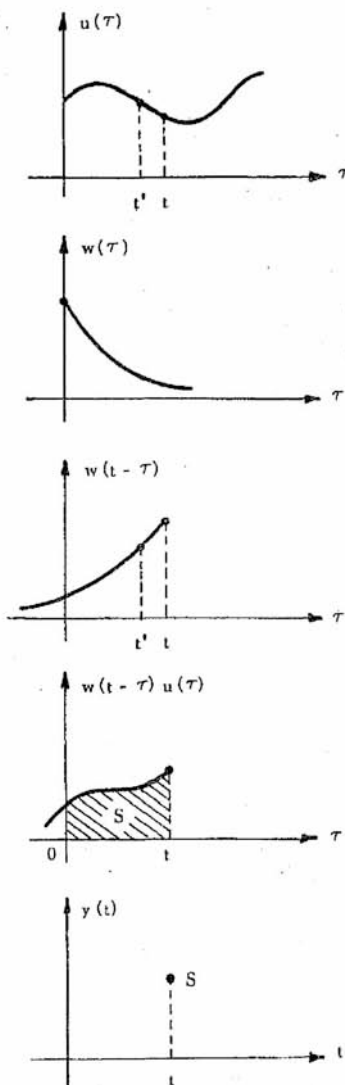


Fig. III.11

$$(III.136) \quad y(t) = \int_0^t w(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Per interpretare l'operazione a secondo membro è utile la costruzione grafica di fig. III.11. In essa si osserva che il valore dell'uscita all'istante  $t$  è pari all'area  $S$ , relativa all'intervallo  $[0, t]$ , della funzione prodotta tra l'ingresso  $u(\tau)$  e la risposta impulsiva  $w(t-\tau)$ , data dal terzo diagramma. Si constata che nel prodotto  $w(t-\tau)u(\tau)$ , il valore dell'ingresso all'istante  $t$  interviene con un peso pari al valore iniziale della funzione  $w(\tau)$ ; quello all'istante  $t'$  con un peso pari al valore della  $w(\tau)$  all'istante  $t-t'$ , e così via. In altri termini i valori assunti dall'ingresso intervengono nella risposta con un *peso* che dipende dall'intervallo compreso tra l'istante al quale essi sono relativi e quello nel quale si valuta l'uscita. È per questa ragione che la funzione  $w(t)$  viene detta *funzione ponderatrice* o *funzione memoria*.

Un altro tipo di determinazione sperimentale, completamente diverso, si può dedurre basandosi sulla possibilità di interpretare la funzione  $W(j\omega)$  e cioè la trasformata di Fourier di  $W(t)$  come matrice delle risposte armoniche, quando il sistema soddisfa alle condizioni (III.116) (cioè quando è asintoticamente stabile).

Considerando inizialmente, per semplicità di notazioni,  $p = q = 1$ , si supponga che il sistema si trovi in un qualunque stato  $x_0$  all'istante, che è stato prescelto per l'inizio della determinazione sperimentale e che, data la stazionarietà del sistema, può essere assunto uguale a zero; si consideri inoltre un ingresso della forma (III.127). Ricordando quanto visto al paragrafo precedente, per il sistema in esame esiste la risposta a regime permanente, che assume l'espressione (III.130). Grazie alla (III.116), è facile constatare che se si sceglie un numero  $\epsilon > 0$ , comunque piccolo, esiste un valore  $T$ , dipendente da  $\epsilon$ , tale che, per tutti gli istanti  $t \geq T$ , la risposta completa del sistema nelle condizioni ipotizzate differisce dalla risposta a regime permanente per meno di  $\epsilon$ . In formula, si ha perciò:

$$(III.137) \quad y(t) = \Psi(t) x_0 + \int_0^t w(t-\tau) \text{sen } \tilde{\omega} \tau d\tau \approx \\ = M(\tilde{\omega}) \text{sen } [\tilde{\omega} t + \varphi(\tilde{\omega})] \quad \text{per } t \geq T$$

Dal confronto dei segnali sinusoidali in ingresso e in uscita si possono ottenere i valori  $M(\tilde{\omega})$  e  $\varphi(\tilde{\omega})$ ; si veda in proposito la figura III.12. Ripetendo tale misura per  $\tilde{\omega}$  variabile tra  $0$  ed  $\infty$  si possono

ottenere tutti i valori delle funzioni  $M(\omega)$  e  $\varphi(\omega)$ , cioè in definitiva la funzione  $w(j\omega)$ . Queste considerazioni si estendono immediatamente anche al caso di ingresso e uscita multidimensionali (cfr. paragrafo precedente).

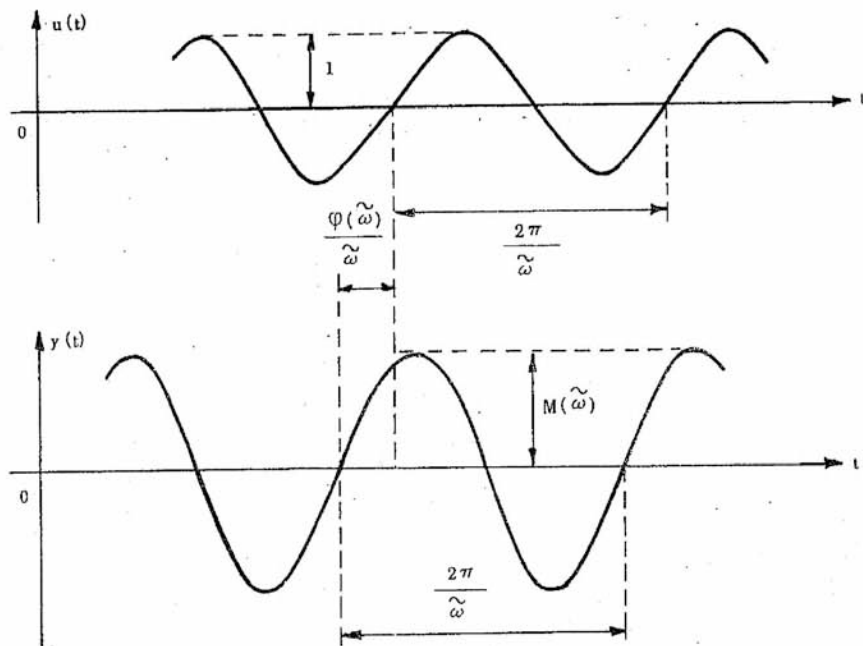


Fig. III.12

A conclusione si sottolinea che i due procedimenti fondamentali esposti in linea di principio, pur profondamente diversi sul piano operativo, forniscono entrambi un'informazione completa sulla funzione  $W$ . Il primo fornisce  $W(t)$  e il secondo  $W(j\omega)$ , ma dall'una di queste si può passare all'altra attraverso la trasformazione diretta o inversa di Fourier.

\*

### APPENDICE III

#### A.III.1 - Autovalori, autovettori e forma canonica di una matrice quadrata.

Se  $A$  è una matrice  $n \times n$  con elementi in  $C^n$ ,  $\lambda$  è una variabile complessa, la matrice  $\lambda I - A$  viene detta *matrice caratteristica associata*. Il suo determinante, che è un polinomio di grado  $n$  in  $\lambda$ , avente coefficiente unitario alla potenza  $n$ -esima di  $\lambda$ :

$$(1) \quad |\lambda I - A| = d(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

viene detto *polinomio caratteristico* di  $A$ . Le radici dell'equazione:

$$(2) \quad d(\lambda) = 0$$

(equazione caratteristica) prendono il nome di autovalori di  $A$ .

Si prenda in esame il caso in cui gli autovalori sono distinti; in questo caso  $d(\lambda)$  ammette la scomposizione:

$$(3) \quad d(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) \quad \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{per } i \neq j$$

Si definisce *autovettore destro* di  $A$ , associato all'autovalore  $\lambda_i$ , ogni soluzione non nulla dell'equazione omogenea:

$$(4) \quad (A - \lambda_i I) x = 0$$

È immediato constatare che tale soluzione esiste ed è definita a meno di una costante moltiplicativa, poichè, per definizione di autovalore, la matrice  $A - \lambda_i I$  è singolare. Si definisce inoltre *autovettore sinistro* ogni soluzione non nulla di:

$$(5) \quad x' (A - \lambda_i I) = 0$$

(dove il vettore riga  $x'$  è il trasposto del vettore  $x$ ). Si può dimostrare il seguente:

**Teorema I** - Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli  $n$  autovalori distinti di  $A$  e siano  $u_1, \dots, u_n$   $n$  autovettori destri di  $A$  associati rispettivamente a ciascuno di tali autovalori. I vettori  $u_1, \dots, u_n$  sono linearmente indipendenti sul campo  $C$  dei numeri complessi e quindi costituiscono una base di  $C^n$ .

**Dimostrazione.** Si supponga, per assurdo, che  $u_1, \dots, u_n$  siano linearmente dipendenti e cioè che esistano  $n$  numeri complessi, non tutti nulli,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tali che:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$$

Si potrà perciò supporre che, per almeno un valore di  $k$ , sia  $\alpha_k \neq 0$ ; si premoltiplichino allora la (6) per:

$$(7) \quad (A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_{k-1} I) (A - \lambda_{k+1} I) \dots (A - \lambda_n I)$$

(nella quale manca il fattore  $A - \lambda_k I$ ). Poichè, per definizione di autovettore:

$$(8) \quad (A - \lambda_j I) u_i = A u_i - \lambda_j u_i = (\lambda_i - \lambda_j) u_i$$

si ottiene, da tale prodotto:

$$(9) \quad \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n) = 0$$

che, essendo  $\lambda_i = \lambda_j$  per  $i \neq j$ , può essere soddisfatta solo se  $\alpha_k = 0$ , ma ciò è contrario all'ipotesi.  $\triangleleft$

Analogo risultato può essere stabilito per gli autovettori sinistri. Si osservi ora che, per definizione di autovettore, si può scrivere:

$$(10) \quad A(u_1 \dots u_n) = (u_1 \dots u_n) \Lambda$$

essendo la matrice  $\Lambda$  data da:

$$(11) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Inoltre, per il teorema I, la matrice:

$$(12) \quad U = (u_1 \dots u_n)$$

è non singolare, talchè si può scrivere:

$$(13) \quad A = U \Lambda U^{-1}$$

Posto ora:

$$(14) \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$$

la (13) si riscrive nella forma:

$$(15) \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i'$$

che prende il nome di *rappresentazione spettrale* della matrice  $A$ . Si osservi che, sulla base della posizione (14), la (13) fornisce anche:

$$(16) \quad \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} A = \Lambda \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$$

che consente di interpretare i vettori  $v_1', \dots, v_n'$  come un insieme di autovettori sinistri, linearmente indipendenti, di  $A$ .

Una ulteriore interpretazione della (13) può essere dedotta se si tiene presente che ogni matrice  $n \times n$ , ad elementi in  $C$ , rappresenta un'applicazione lineare  $A$  di uno spazio lineare  $X$   $n$ -dimensionale (sul campo  $C$  dei numeri complessi) in se stesso, secondo la relazione:

$$(17) \quad y = A x$$

ove  $x$  ed  $y$  sono i vettori di coordinate dell'elemento  $x$  e dell'elemento  $y = A(x)$  di  $X$ . Si osservi inoltre che, data una trasformazione di coordinate in  $X$ , definita da:

$$(18) \quad \hat{x} = T x$$



le colonne di  $\mathbf{T}^{-1}$  rappresentano le coordinate dei nuovi vettori di base rispetto ai precedenti. Con tale trasformazione la (17) diventa:

$$(19) \quad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{x}}$$

Se in particolare si sceglie  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{T}$ , se cioè si scelgono come nuovi vettori di base  $n$  autovettori linearmente indipendenti di  $\mathbf{A}$ , per la (13) la (19) diviene:

$$(20) \quad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{x}}$$

e cioè l'applicazione lineare viene ad essere rappresentata da una matrice puramente diagonale. Per tale motivo essa prende il nome di *forma canonica*.

### A.III.2 - Rappresentazione delle funzioni di $s$ .

In questa appendice verranno illustrati diversi metodi di rappresentazione delle matrici di funzioni razionali, strettamente proprie, della variabile complessa  $s$ . Va subito osservato che la maggior parte delle rappresentazioni delle quali si tratterà si estendono immediatamente anche alle funzioni razionali proprie o improprie; tuttavia, poichè queste estensioni sono ovvie, non verranno considerate in modo esplicito.

Come sarà messo in evidenza nel seguito, le rappresentazioni che si considereranno costituiscono la naturale generalizzazione, al caso di matrici di funzioni di  $s$ , delle rappresentazioni correntemente usate per le funzioni razionali.

Rapporto di polinomi. I singoli elementi della matrice assegnata  $\mathbf{F}(s)$  sono tutti, per definizione, rappresentabili come rapporto di polinomi:

$$(21) \quad f_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}$$

nei quali il grado del polinomio a numeratore  $n_{ij}(s)$  è inferiore al grado del corrispondente polinomio a denominatore  $d_{ij}(s)$ . È conveniente, per ovvia economia di simbolismo, che nelle rappresentazioni (21) i polinomi  $n_{ij}(s)$  e  $d_{ij}(s)$  siano primi tra loro. Se si considera ora il minimo comune multiplo  $d(s)$  dell'insieme dei polinomi  $d_{ij}(s)$ , che risulta - per quanto ora precisato - il *minimo denominatore comune* delle funzioni  $f_{ij}(s)$ , è possibile dare una rappresentazione compatta dell'intera ma-

trice  $\mathbf{F}(s)$  con la formula:

$$(22) \quad \mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{B}(s)}{d(s)}$$

nella quale  $\mathbf{B}(s)$  è una matrice ad elementi polinomiali.

Per esplicitare meglio la struttura ed i parametri mediante i quali la (22) può essere scritta, assumendo che il grado del polinomio  $d(s)$  sia pari ad  $n$ , si può utilizzare la rappresentazione:

$$(23) \quad \mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{B}(s)}{d(s)} = \frac{\mathbf{B}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \mathbf{B}_1 s + \mathbf{B}_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

In essa le matrici  $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n-1}$  sono matrici di costanti, di dimensioni pari a quelle di  $\mathbf{F}(s)$ , e si ottengono ordinando opportunamente i coefficienti dei polinomi a numeratore risultanti dalle (21) quando si sia operata la riduzione al denominatore comune. Si fa osservare che, senza perdita di generalità, si può assumere unitario il coefficiente di  $s^n$  nel denominatore.

Poli e coefficienti. Un'altra delle rappresentazioni più importanti per una funzione razionale  $f(s)$  fa riferimento allo sviluppo in frazioni parziali:

$$(24) \quad f(s) = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{r_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

e cioè si serve delle  $r$  radici (distinte) del denominatore  $p_1, \dots, p_\rho$  (molteplicità  $\nu_1, \dots, \nu_\rho$ ) e dei coefficienti  $r_{ik}$  [in numero pari a  $\sum_{i=1}^{\rho} \nu_i$ , cioè pari al grado del denominatore di  $f(s)$ ]. Questo ultimi si calcolano con la relazione:

$$(25) \quad r_{ik} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(\nu_i - k)!} \left\{ \frac{d^{\nu_i - k}}{ds^{\nu_i - k}} [f(s) (s - p_i)^{\nu_i}] \right\}$$

I valori  $p_1, \dots, p_\rho$  sono i poli della funzione  $f(s)$  ed i valori  $r_{11}, \dots, r_{\rho 1}$  i corrispondenti residui.

Adottando la rappresentazione (24) per ciascun elemento  $f_{ij}(s)$  della matrice  $\mathbf{F}(s)$  ed ordinando i coefficienti  $r_{ik}$  in opportune matrici si può ottenere, per la  $\mathbf{F}(s)$  stessa, la rappresentazione:

$$(26) \quad \mathbf{F}(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\mathbf{R}_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

che generalizza la (24). In essa i valori  $p_1, \dots, p_r$  sono le radici distinte (con molteplicità  $n_1, \dots, n_r$ ) del minimo denominatore comune  $d(s)$  degli elementi della matrice  $\mathbf{F}(s)$ ; in quanto tale, ciascuna di esse coincide con un polo di almeno una delle funzioni  $f_i(s)$ . Per tale motivo esse vengono dette poli di  $\mathbf{F}(s)$ . Le quantità  $\mathbf{R}_{ik}$ , che sono matrici di costanti, di dimensioni pari a quelle di  $\mathbf{F}(s)$ , si calcolano con la relazione:

$$(27) \quad \mathbf{R}_{ik} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(n_i - k)!} \left\{ \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} [\mathbf{F}(s) (s - p_i)^{n_i}] \right\}$$

che generalizza la (25).

**Poli e zeri.** Un'altra rappresentazione, anch'essa importante, è quella che fa riferimento, oltre che ai poli, anche agli zeri, della funzione  $f(s)$ . Supposto che questi ultimi siano in numero di  $\rho'$ , di valore  $z_1, z_2, \dots, z_{\rho'}$ , e di molteplicità  $\nu_1', \nu_2', \dots, \nu_{\rho'}'$ , la  $f(s)$  viene espressa con la formula:

$$(28) \quad f(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^{\rho'} (s - z_i)^{\nu_i'}}{\prod_{i=1}^{\rho} (s - p_i)^{\nu_i'}}$$

ove  $K'$  è una costante che si deve introdurre se il coefficiente relativo alla potenza più elevata di  $s$  nel numeratore della  $f(s)$  non è unitario.

Tale rappresentazione è molto in uso per le funzioni razionali, soprattutto grazie alla sua utilità nei problemi di rappresentazione grafica [cfr. Appendice A.III.3], ma non è estensibile al caso matriciale.

### A.III.3 - Rappresentazioni grafiche delle funzioni di $\omega$ .

Accanto ai tipi di rappresentazione che derivano dalla sostituzione formale di  $s$  con  $j\omega$  nelle espressioni raccolte nell'Appendice

A.III.2, per le funzioni razionali di  $j\omega$  sono in uso anche vari tipi di rappresentazione grafica, ai quali è dedicata la presente Appendice.

Considerando un arbitrario elemento  $f(s)$  della matrice  $\mathbf{F}(s)$  e prendendone in esame i valori assunti per  $s = j\omega$ , si ottiene una funzione complessa di variabile reale; essa può essere rappresentata mediante una coppia di funzioni reali di variabile reale, in particolare la parte reale  $R(\omega)$  e il coefficiente della parte immaginaria  $I(\omega)$  ovvero il modulo  $M(\omega) = |f(j\omega)|$  e la fase  $\varphi(\omega) = \angle f(j\omega)$ :

$$(29) \quad f(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

dove  $R, I, M, \varphi$  sono legate dalle ben note relazioni:

$$(30) \quad R = M \cos \varphi \quad ; \quad I = M \sin \varphi$$

$$(31) \quad M = \sqrt{R^2 + I^2} \quad ; \quad \varphi = \arctg \frac{I}{R}$$

Se si assume che i coefficienti della rappresentazione (21) siano reali, valgono alcune proprietà di simmetria; precisamente si ha che il modulo  $M$  e la parte reale  $R$  sono funzioni pari di  $\omega$ , mentre la fase  $\varphi$  e la parte immaginaria  $I$  sono funzioni dispari di  $\omega$ . Da ciò consegue che è sufficiente assegnare i diagrammi delle funzioni considerate solo per valori di  $\omega$  positivi (o negativi).

Le rappresentazioni grafiche utilizzate più comunemente per la  $f(j\omega)$  sono:

a) *diagrammi polari di Nyquist*, in cui si riportano su un piano la parte reale e la parte immaginaria di  $f(j\omega)$  come ascissa ed ordinata di un punto  $P$ , che si può anche considerare come estremo del vettore  $OP$ , applicato nell'origine  $O$ , avente per modulo l'ampiezza  $M$  e per argomento la fase  $\varphi$ ; in tali diagrammi  $\omega$  appare come parametro corrente lungo la curva;

b) *diagrammi cartesiani o di Nichols* (o di Black), in cui si riportano su un piano grandezze proporzionali alla parte reale e a quella immaginaria di  $\ln f(j\omega)$  come ordinata ed ascissa di un punto  $P$ ; essendo:

$$(32) \quad \ln f(j\omega) = \ln [M e^{j\varphi}] = \ln M + j\varphi$$

ciò equivale a riportare come ordinata una quantità proporzionale al logaritmo naturale del modulo e come ascissa la fase; di solito per i moduli si dà il valore in dB (decibel) pari a 20 volte il logaritmo decimale di  $M$ ; anche in questo caso  $\omega$  appare come parametro corrente;

c) diagrammi di  $R$  e di  $I$ , cioè della parte reale e della parte immaginaria di  $f$ , in funzione di  $\omega$ ;

d) diagrammi di  $M$  e di  $\varphi$ , cioè del modulo e della fase di  $f$  in funzione di  $\omega$ ;

e) diagrammi logaritmici o di Bode, in cui si riportano grandezze proporzionali alla parte reale ed a quella immaginaria del logaritmo di  $f$  (cioè al logaritmo del modulo ed alla fase di  $f$ ) in funzione del logaritmo di  $\omega$ : i logaritmi più usati sono, per  $M$ , quelli decimali di solito moltiplicati per 20 (espressione in dB) o quelli naturali (espressione in neper) e, per  $\omega$ , (se  $M$  è in dB) quelli decimali (espressione in decadi) o quelli in base 2 (espressione in ottave) ovvero (se  $M$  è in neper) quelli naturali (1); la fase si riporta in gradi od in radianti.

Le rappresentazioni indicate si possono raggruppare in vari modi; ad esempio quelle costituite da una sola curva con  $\omega$  come parametro corrente (rappresentazioni  $a$  e  $b$ ) e quelle costituite da una coppia di curve con  $\omega$ , eventualmente in scala logaritmica, come ascissa e due parametri identificativi di  $f$  in ordinate (rappresentazioni  $c$ ,  $d$  ed  $e$ ), da un altro punto di vista si possono distinguere le rappresentazioni di  $f$  ( $a$ ,  $c$  e  $d$ ) da quelle di  $\log f$  ( $b$  ed  $e$ ).

Il ricorso alla rappresentazione del logaritmo di  $f$  è legato a due tipi di considerazioni e, precisamente, a questioni di scala e a questioni di composizione. Infatti l'impiego di una scala logaritmica consente di rappresentare più comodamente grandezze suscettibili di variazioni molto ampie in quanto rispetto alla scala naturale la rappresentazione dei valori elevati viene contratta e quella dei valori bassi viene espansa; ciò è particolarmente comodo per il caso del modulo che ha effettivamente variazioni ampie, nonchè per la frequenza.

Per le questioni di composizione si osserva che molto spesso occorre eseguire il prodotto di fattori di rappresentazione nota e l'impiego di una scala logaritmica consente di ottenere il modulo della funzione cercata come somma di termini corrispondenti ai suoi fattori e cioè con la stessa legge di composizione già valida per le fasi, che per altrove viene mantenuta anche in questa rappresentazione.

Ai vantaggi illustrati va aggiunto anche il fatto che, con l'adozione delle scale logaritmiche sia per  $f$  sia per  $\omega$  (rappresentazione  $e$ ), è possibile dare una rappresentazione delle curve, valida per il caso in cui l'espressione di  $f$  sia fattorizzata, che è particolarmente comoda ed

(1) - Una decade è l'intervallo fra due frequenze che stiano fra loro in rapporto 10. una ottava l'intervallo fra due frequenze che stiano fra loro in rapporto 2 (come avviene per la frequenza della ottava nota della scala musicale rispetto a quella della prima).

efficace: la rappresentazione asintotica. Questi motivi fanno spesso preferire, sul piano applicativo, la rappresentazione di Bode e parallelamente quella di Nichols.

Regole per il tracciamento asintotico del diagramma di Bode. Le regole che qui si danno si riferiscono al caso in cui la funzione  $f(s)$  - per la quale si desidera rappresentare la corrispondente funzione di  $j\omega$  - sia assegnata nella forma (28) e, cioè, attraverso poli e zeri. Ai fini della rappresentazione che si sta considerando è conveniente distinguere i poli e zeri complessi coniugati da quelli reali ed anzi tenere separati i fattori corrispondenti ad un eventuale polo di molteplicità  $\sigma$  nell'origine ed ad un eventuale zero di molteplicità  $\sigma'$  anch'esso nell'origine.

Indicando con  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ) i poli reali, con  $\alpha_k \pm j\omega_k$  ( $k = 1, \dots, \nu$ ) le coppie di poli complessi coniugati, con  $\lambda'_i$  ( $i = 1, \dots, \mu'$ ) gli zeri reali e con  $\alpha'_k \pm j\omega'_k$  ( $k = 1, \dots, \nu'$ ) le coppie di zeri complessi coniugati e con  $n_i, n_k, n'_i, n'_k$  le rispettive molteplicità, la (28) assume la forma:

$$(33) \quad f(s) = K' \frac{\prod_{i=2}^{\mu'} (s - \lambda'_i)^{n'_i} \prod_{k=1}^{\nu'} [(s - \alpha'_k)^2 + \omega'^2]^{n'_k}}{s^{\sigma - \sigma'} \prod_{i=2}^{\mu} (s - \lambda_i)^{n_i} \prod_{k=1}^{\nu} [(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2]^{n_k}}$$

Come già si è fatto nello studio dei modi naturali, anche qui è possibile impiegare in luogo dei coefficienti  $\lambda_i, \alpha_k$  ed  $\omega_k$  i coefficienti  $\tau_i$  per i poli reali e  $\zeta_k$  ed  $\omega_{nk}$  per quelli complessi ed analoghi coefficienti  $\tau'_i, \zeta'_k$  ed  $\omega'_{nk}$  per gli zeri. In tal caso la (33) si riscrive nella forma:

$$(34) \quad f(s) = K \frac{\prod_{i=2}^{\mu'} (1 + s \tau'_i)^{n'_i} \prod_{k=1}^{\nu'} \left[ 1 + 2 \zeta'_k \frac{s}{\omega'_{nk}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{nk}} \right]^{n'_k}}{s^{\sigma - \sigma'} \prod_{i=1}^{\mu} (1 + s \tau_i)^{n_i} \prod_{k=1}^{\nu} \left[ 1 + 2 \zeta_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega^2_{nk}} \right]^{n_k}}$$

dove  $K$  è legato a  $K'$  dalla relazione:

$$(35) \quad K = K' \frac{\prod_{i=2}^{\mu} \tau_i^{n_i} \prod_{k=1}^{\nu'} \omega'^2_{nk} n'_k}{\prod_{i=2}^{\mu'} \tau'^i_{i} n'_i \prod_{k=1}^{\nu} \omega^2_{nk} n_k}$$

e prende il nome di *guadagno*. Si può facilmente constatare confrontando la (34) con la (21) che  $K$  è il rapporto tra i coefficienti  $b$  ed  $a$  relativi alle potenze di ordine più basso.

Sostituendo  $j\omega$  ad  $s$  nella (34) si ottiene la rappresentazione fattorizzata della  $f(j\omega)$  in una forma particolarmente utile ai fini del tracciamento dei diagrammi di Bode. Come si può notare, essa è assegnata attraverso l'indicazione di fattori dei seguenti 4 tipi:

$$(36) \quad \begin{aligned} & K \\ & j\omega \\ & 1 + j\omega\tau \\ & 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \text{ con } |\zeta| < 1 \end{aligned}$$

ciascuno dei quali, a parte  $K$ , può apparire a potenza positiva o negativa.

La procedura di tracciamento del diagramma di  $f$  si può schematizzare nel seguente modo:

- tracciamento delle curve corrispondenti ai singoli fattori (di uno dei quattro tipi considerati);
- composizione delle singole curve (precisamente sommando i termini a numeratore e sottraendo quelli a denominatore e interpretando le eventuali potenze come prodotti ripetuti).

Quest'ultima fase è ovvia; rimane, pertanto, da esaminare la prima e cioè i metodi per tracciare i diagrammi corrispondenti a ciascuno dei fattori (36).

Per la *costante*  $K$  si osserva immediatamente che il diagramma di Bode del modulo è una retta orizzontale, di ordinata  $\ln K$ , mentre quello della fase è l'asse delle ascisse.

Per il *fattore monomio*  $j\omega$ , chiamando  $x = \ln \omega$  l'ascissa,  $y_1 = \ln M$  l'ordinata del diagramma dei moduli e  $z_1$  quella del diagramma delle fasi, si ha:

$$(37) \quad \begin{aligned} y_1 &= \ln M = \ln \omega = x \\ z_1 &= \varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si constata immediatamente che il diagramma dei moduli è una retta passante per l'origine ed inclinata di 1 neper/neper ed il diagram-

ma delle fasi è una retta orizzontale di ordinata  $+\pi/2$  (cfr. fig.1). Se si adottano i dB per  $M$  e le decadi o le ottave per  $\omega$  la pendenza della retta è rispettivamente di 20 dB/decade e di  $\sim 6$  dB/ottava.

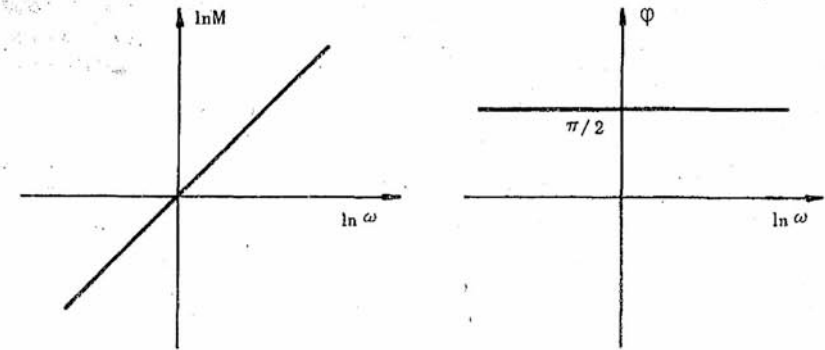


Fig.1

Per il *fattore binomio*  $1 + j\omega\tau$  si ha con simboli analoghi:

$$(38) \quad \begin{aligned} y_2 &= \ln M = \ln \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \\ z_2 &= \varphi = \text{artg } \omega \tau \end{aligned}$$

Si può osservare che il diagramma dei moduli presenta due asintoti,  $y_2'$  ed  $y_2''$  la cui equazione si determina facilmente trascurando, rispettivamente,  $\omega\tau$  rispetto ad 1 ovvero 1 rispetto ad  $\omega\tau$ ; le equazioni di tali asintoti sono dunque:

$$(39) \quad \begin{aligned} y_2' &= 0 \\ y_2'' &= x + \ln \tau \end{aligned}$$

e cioè quella di una retta coincidente con l'asse delle ascisse e di una retta inclinata di +1 neper/neper (ovvero 20 dB/dec o  $\sim 6$  dB/ott) ed intersecante l'asse delle ascisse nel punto  $x = -\ln \tau$  (cioè per  $\omega = 1/\tau$ ). Con questi due asintoti si può costruire la spezzata rappresentata a tratto più marcato in fig.2a in cui il punto di intersezione si dice punto di rottura e la frequenza (o pulsazione) relativa frequenza (o pulsazione) di rottura.

Questa spezzata costituisce il cosiddetto *diagramma asintotico* del termine binomio e differisce dal diagramma esatto per un termine che è massimo in corrispondenza al punto di rottura ed ivi vale 0,346 neper



(circa 3 dB), ha andamento simmetrico rispetto ad una verticale passante per il punto di rottura e vale 0,061 neper ad un neper di distanza da questo, circa 1 dB ad una ottava e 0,04 dB (cioè una quantità praticamente trascurabile) ad una decade; l'andamento esatto degli scostamenti del diagramma effettivo da quello asintotico è riportato in fig.3, dove le frequenze sono normalizzate a quella di rottura, che viene così ad essere indicata dal valore 1; il suo logaritmo è quindi l'origine dell'ascisse.

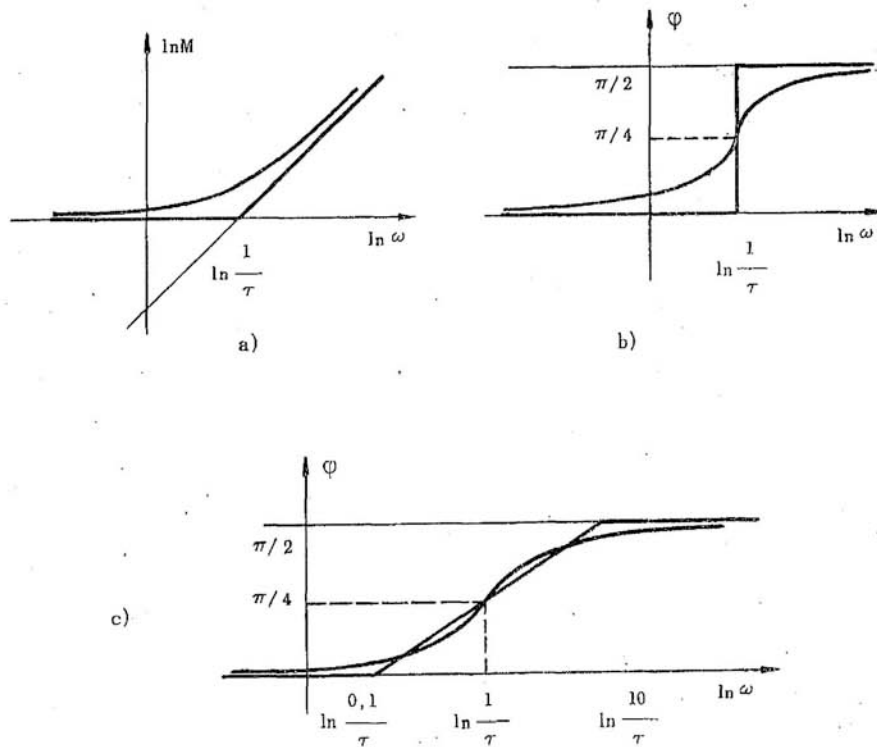


Fig.2

Per quanto concerne il diagramma delle fasi, esso ha due asintoti entrambi orizzontali, uno coincidente con l'asse delle ascisse e l'altro di ordinata pari a  $\pm \pi/2$ :

$$(40) \quad z'_2 = 0 \quad z''_2 = \pm \pi/2$$

a seconda che  $\tau \gtrless 0$ .

Volendo sostituire al diagramma esatto una spezzata si devono congiungere i due asintoti con un tratto intermedio, di pendenza opportuna. Una prima approssimazione può essere quella di collegare i due asintoti con un segmento verticale in corrispondenza al punto di rottura (come in fig.2b relativa al caso di  $\tau > 0$ ); in tal caso il tracciamento è immediato ma gli scostamenti sono eccessivi (il loro valore massimo si ha nel punto di rottura e vale  $\pi/4$ ). Una approssimazione più soddisfacente si può ottenere con un segmento inclinato di un angolo opportuno, in modo da ridurre gli scostamenti e da consentire una identificazione abbastanza agevole dei due vertici della spezzata; un segmento che soddisfa a queste condizioni è quello inclinato di  $\pi/4$  per decade, con il quale i vertici sono a destra ed a sinistra di una decade dal punto di rottura e lo scostamento massimo si ha in corrispondenza a tali vertici ed è minore di 0,1 rad. Se si adottasse come tratto intermedio quello appartenente alla tangente nel punto di rottura (che ha pendenza 0,5 rad/neper) si avrebbe uno scostamento massimo di circa 0,2 rad (circa 12 gradi).

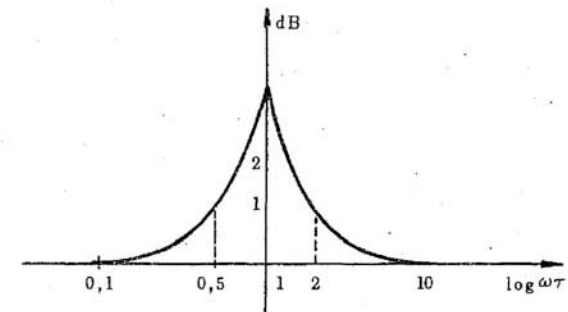


Fig.3

Si pone in evidenza il fatto che, mentre il modulo è approssimato mediante una spezzata di due lati, la fase lo è mediante una di tre lati, ciò che rende, per quest'ultima, molto meno agevole la composizione dei diagrammi approssimati, soprattutto ove si tenga presente che il tratto intermedio si estende su due decadi.

Passando ora a considerare il *fattore trinomio*:

$$1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$$

si ha:

$$(41) \quad y_3 = \ln M = \ln \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$z_3 = \varphi = \arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

in cui figurano i due parametri  $\zeta$  ed  $\omega_n$ . Il diagramma dei moduli presenta due asintoti di equazione:

$$(42) \quad y_3' = 0$$

$$y_3'' = 2(x - \ln \omega_n)$$

cioè una retta coincidente con l'asse delle ascisse ed una inclinata di +2 neper/neper (ovvero 40 dB/dec o circa 12 dB/ott) che si intersecano nel punto di rottura di ascissa  $x = \ln \omega_n$  (cioè per  $\omega = \omega_n$ ).

Anche in questo caso si può costruire un diagramma asintotico come mostrato in fig.4; gli scostamenti da quest'ultimo del diagramma effettivo dipendono da  $|\zeta|$  e possono essere molto elevati, tendendo all'infinito per  $|\zeta|$  tendente a 0. A titolo di esemplificazione in figura 4 a sono indicati alcuni andamenti del diagramma effettivo per alcuni valori di  $|\zeta|$ ; si è rappresentata anche la curva relativa al caso limite di  $|\zeta| = 1$ , in cui il trinomio si riduce al quadrato di un termine binomio; si può facilmente constatare che le sue ordinate sono doppie di quelle relative al diagramma del termine binomio corrispondente, in cui  $\tau = 1/\omega$ .

Le curve degli scostamenti (dB su dec) sono riportate in figura 5 ancora con ascisse normalizzate, per un fattore trinomio supposto a denominatore, che corrisponde al caso più frequente. Naturalmente se il fattore trinomio è a numeratore, gli scostamenti sono di segno opposto. Anche in questo caso si è riportata la curva corrispondente al caso limite di  $|\zeta| = 1$  che ha ordinate doppie di quella di fig.3.

Anche per il termine trinomio la fase ha due asintoti orizzontali, uno coincidente con l'asse delle ascisse e l'altro di ordinata pari a  $\pi$ :

$$(43) \quad z_3' = 0$$

$$z_3'' = \pm \pi$$

[a seconda che  $\zeta \gtrless 0$ ] e si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle fatte per il termine binomio a proposito della possibilità di costruire una spezzata; in questo caso, però, la scelta del tratto intermedio dovrebbe dipendere da  $|\zeta|$ , in quanto l'andamento effettivo dipende appunto, a parte il segno, da  $|\zeta|$ . Per questa ragione il diagramma delle fasi normalmente si costruisce punto per punto servendosi di abachi come quello di fig.6 (sempre con ascisse normalizzate e riferite ad un fattore trinomio al denominatore) dal quale si possono desumere indicazioni anche per il caso binomio prendendo la curva relativa a  $|\zeta| = 1$  e dimezzando le ordinate; le fasi vanno prese con lo stesso segno di  $\zeta$ .

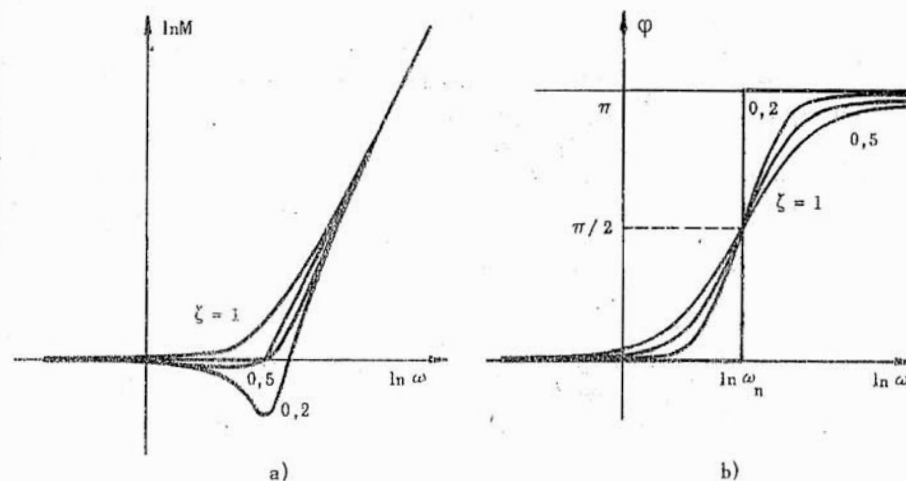


Fig.4

Illustrato il metodo per il tracciamento dei diagrammi asintotici corrispondenti ai singoli fattori della (34), si può indicare per il diagramma dei moduli una procedura più rapida di quella schematizzata all'inizio. Si può, precisamente, procedere nel modo seguente:

a) segnare le ascisse dei punti di rottura che corrispondono agli inversi delle  $\tau_i$  e  $\tau'_i$  ed alle  $\omega_{nk}$  ed  $\omega'_{nk}$ ;

b) tracciare il primo tratto della spezzata che è una semiretta dipendenza  $(\sigma' - \sigma)$  neper/neper (pari a  $20(\sigma' - \sigma)$  dB/dec ed a circa  $6(\sigma' - \sigma)$  dB/ott) e che interseca (eventualmente con il suo prolungamento) l'asse delle ordinate nel punto  $\ln K$  (ovvero  $20 \log K$ );

c) tracciare i lati successivi in modo che ciascuno risulti inclinato rispetto al precedente di  $\pm 1$  neper/neper se l'ascissa del vertice comune è relativa ad un fattore binomio rispettivamente a numeratore od a denominatore, e di  $\pm 2$  neper/neper se l'ascissa è invece relativa ad un fattore trinomio rispettivamente a numeratore od a denominatore; se il vertice corrisponde, però, ad un fattore di molteplicità maggiore di 1, le variazioni di pendenza indicate devono essere moltiplicate per l'esponente relativo.

Per quanto riguarda le correzioni da apportare al diagramma asintotico, occorrerebbe, a rigore, che ciascuna fosse apportata su tutto il campo di frequenza in quanto i loro contributi si sommano ed è possibile che la loro combinazione risulti non trascurabile anche dove lo è ciascun addendo; in effetti però, se i vertici sono sufficientemente lontani, nell'intorno di ciascun vertice si possono considerare solo le correzioni relative al termine che corrisponde a quel vertice.

Per la fase, in generale, conviene procedere direttamente alla somma dei diagrammi esatti che si possono ricavare con l'ausilio della fig.6; infatti l'approssimazione che si ottiene combinando le spezzate con segmenti verticali è troppo scarsa; mentre la combinazione delle spezzate con segmento mediano inclinato risulta non agevole in quanto i vertici non corrispondono ai punti di rottura e, per ciascun fattore, i due vertici ad esso relativi (che distano di due decadi nel caso del termine binomio) non risultano, generalmente, consecutivi, perchè fra essi possono venire ad interpersi uno o due vertici relativi al polo od allo zero più vicini.

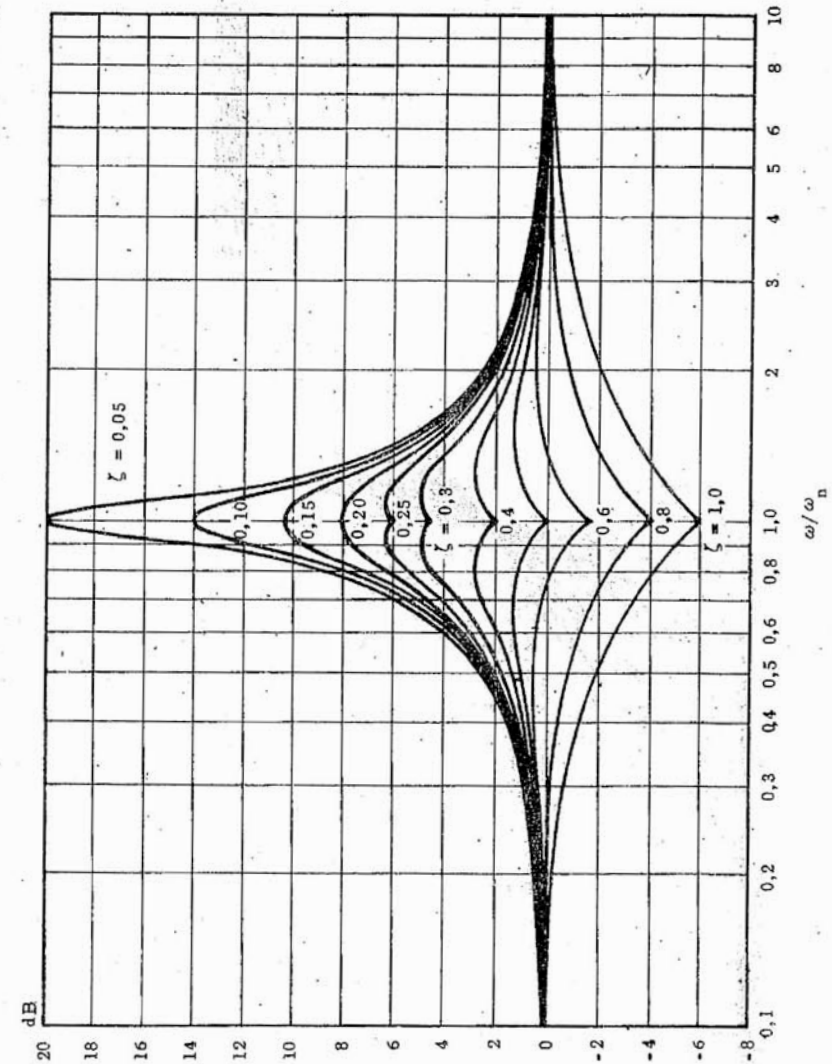


Fig.5

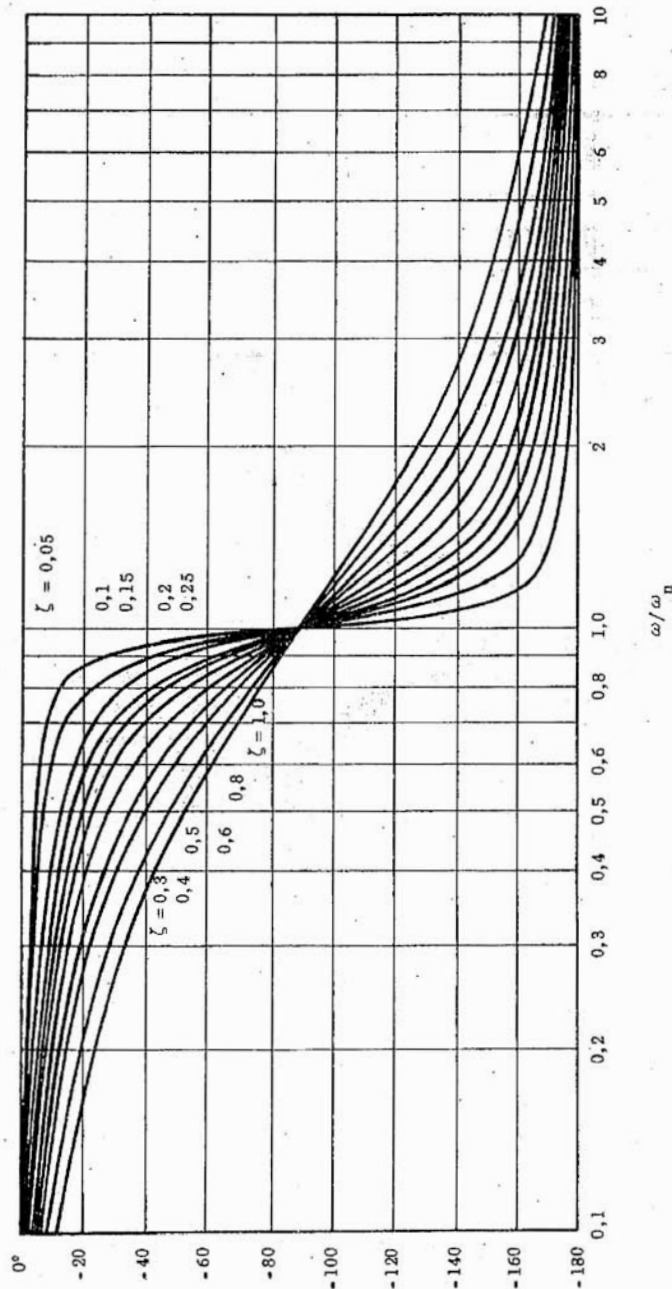


Fig.6

## CAPITOLO IV

## ELEMENTI DI TEORIA DELLA STRUTTURA E DI TEORIA DELLA REALIZZAZIONE

✕ IV.1 - Condizioni per l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali.

Nello sviluppare lo studio dei modi naturali (cfr. Capitolo III) si è richiamata l'attenzione sul fatto che un impulso in ingresso non sempre è in grado di *eccitare* tutti i modi naturali e che non tutti i modi eccitati possono *essere osservati* attraverso l'uscita. Partendo da questa considerazione si è posto in evidenza, nel par.III.9, che in generale la matrice delle risposte impulsive non costituisce, da sola, un modello completo del sistema. Si è anticipato, tuttavia, che quando gli impulsi eccitano tutti i modi naturali e questi possono essere tutti osservati attraverso l'uscita, la matrice delle risposte impulsive (e quindi anche la matrice di trasferimento, che ne è la trasformata di Laplace) individua in modo completo il sistema. In questo Capitolo si intende fornire una giustificazione di quanto asserito, nel quadro di alcuni risultati generali della Teoria dei Sistemi.

Un primo passo consisterà nello stabilire condizioni necessarie e sufficienti affinché *tutti* i modi naturali della risposta nello stato possano essere:

- a) eccitati da impulsi in ingresso;
- b) osservati attraverso l'uscita.

Tali condizioni saranno riferite alle matrici che caratterizzano un'assegnata rappresentazione del sistema in esame. Come è naturale attendersi, tali condizioni risulteranno invarianti sull'insieme di tutte le rappresentazioni che si possono associare ad un medesimo sistema