

**prof.ing. antonio ruberti**  
**prof.ing. alberto isidori**

# **teoria della stabilità**

**appunti dalle lezioni**

**edizioni  
scientifiche SIDEREA**

Le copie non firmate da uno degli Autori si ritengono contraffatte.

553

A. Ruberti

Stampato presso il Laboratorio Fotolitografico  
della Edizioni Scientifiche SIDEREA  
Via Terme di Traiano, 5-a-00184 ROMA

## CAPITOLO I

### FONDAMENTI.

#### I.1 - Generalità.

Si considerino le equazioni:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= \eta(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

in cui  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x(t) \in X$ ,  $u \in \mathcal{U}$  e  $y(t) \in Y$ . Come è noto, le funzioni  $f$  ed  $\eta$ , insieme allo spazio di stato  $X$ , individuano una rappresentazione regolare o differenziale di un sistema  $S$ .

Un primo problema che ci si può porre nell'analisi di tali rappresentazioni, una volta stabilita l'esistenza e l'unicità delle soluzioni della (1.1), è quello di calcolare, in corrispondenza ad un dato stato iniziale  $x(t_0)$  e ad un dato ingresso  $u$ , l'evoluzione dello stato  $x(t)$  e quindi dell'uscita  $y(t)$  per  $t \geq t_0$ .

In molti problemi applicativi, tuttavia, ha interesse non tanto la conoscenza della soluzione analitica o numerica di tale problema, quanto la possibilità di stabilire delle proprietà significative dell'evoluzione dello stato e dell'uscita. Dal punto di vista matematico un problema di tale tipo può essere inquadrato nell'ambito della teoria qualitativa delle equazioni differenziali (iniziata da Poincaré attorno al 1880), che si propone di stabilire proprietà dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale senza effettuare il calcolo esatto o approssimato.

Uno dei problemi di maggior rilievo nell'analisi di una rappresentazione regolare (come pure nella teoria qualitativa delle equazioni differenziali) è quello relativo allo studio di proprietà di limitatezza e del comportamento asintotico delle soluzioni. Tale problema, esaminato sotto diversi aspetti, costituisce l'oggetto della teoria della stabilità.

Prima di presentare la trattazione formale conviene chiarire intuitivamente il concetto di stabilità.

In termini molto generali, lo studio della stabilità di un sistema consiste nella valutazione « qualitativa » di alcuni aspetti del suo comportamento in presenza di « perturbazioni » agenti su di esso.

Per esaminare alcune formulazioni matematiche dei problemi di analisi della stabilità, sia  $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u)$  la soluzione della (1.1) corrispondente ad uno stato iniziale  $x(t_0) = x_0$  fissato e ad una assegnata funzione d'ingresso  $u$ .

Ci si può allora porre il problema di esaminare come varia la soluzione della (1.1) rispetto a quella considerata al variare dello stato iniziale entro un prefissato intorno dello stato  $x_0$ . In particolare, se  $x_0 + \Delta x_0$  è un punto dello spazio di stato « prossimo » ad  $x_0$ , ci si può chiedere se la soluzione ad esso corrispondente  $\varphi(t, t_0, x_0 + \Delta x_0, u)$  si mantiene o meno « prossima » a  $\varphi(t, t_0, x_0, u)$ , per  $t \geq t_0$ , e sotto quali condizioni  $\varphi(t, t_0, x_0 + \Delta x_0, u)$  tende a coincidere, per  $t \rightarrow \infty$ , con  $\varphi(t, t_0, x_0, u)$ . In altri termini tale problema consiste nell'esaminare, fissato l'ingresso, l'effetto di una perturbazione  $\Delta x_0$  sullo stato iniziale.

Si supponga ora fissato lo stato iniziale  $x_0$  e che all'ingresso  $u(t)$  sia sovrapposta, per  $t \in (t_0, t_1)$ , una grandezza disturbante  $\delta(t)$ , funzione incognita appartenente ad una classe di funzioni assegnata:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \delta_u(t) & , t \in (t_0, t_1) \\ u(t) & , t \geq t_1 \end{cases}$$

Ci si può allora chiedere se la soluzione  $\varphi(t, t_0, x_0, \hat{u})$  si mantiene o meno « prossima » alla soluzione  $\varphi(t, t_0, x_0, u)$  per  $t \geq t_0$  e sotto quali condizioni esse tendono a coincidere per  $t \rightarrow \infty$ , al variare di  $\delta_u(\cdot)$  entro la classe prefissata. In altri termini ci si può chiedere quale sia l'effetto di una perturbazione  $\delta_u(t)$  agente sull'ingresso.

E' chiaro che, se si fa riferimento a tempi successivi a  $t_1$ , l'effetto della perturbazione  $\delta_u(t)$  agente sull'ingresso si può studiare equivalentemente esaminando l'effetto di perturbazioni sullo stato iniziale, considerando come stato iniziale lo stato all'istante  $t_1$ ,  $x(t_1) = \varphi(t_1, t_0, x_0, \hat{u}_{[t_0, t_1]})$ , in cui cessa la perturbazione sull'ingresso. Problemi analoghi si possono porre anche nel caso in cui la perturbazione  $\delta_u(t)$  sull'ingresso si manifesta in tutti gli istanti successivi a  $t_0$ , ossia nel caso di perturbazioni persistenti sull'ingresso (in tal caso non ci si può ricondurre però allo studio dell'effetto di perturbazioni sullo stato iniziale).

Appare allora naturale chiamare *stabile* un sistema la cui evoluzione è poco sensibile a perturbazioni sullo stato iniziale o sull'ingresso, ossia in cui piccole perturbazioni danno luogo a piccole varia-

zioni nella sua evoluzione. Viceversa un sistema si dirà *instabile* se, per effetto di una piccola perturbazione, la sua evoluzione si allontana dalla situazione dinamica corrispondente all'assenza della perturbazione.

Il corpo della teoria della stabilità è costituito essenzialmente di:

a) *definizioni*; per sviluppare in modo rigoroso la teoria occorre definire in modo preciso cosa significa stabilità, instabilità, e distinguere diversi tipi di stabilità. Ci saranno diversi tipi di stabilità perché ci potranno essere diversi modi di reagire alle perturbazioni e ci potranno essere esigenze più o meno forti da soddisfare.

b) *condizioni*; dopo le definizioni, è necessario stabilire quali condizioni debbano essere soddisfatte in una rappresentazione e nei suoi parametri affinché si abbia un tipo o l'altro di stabilità. Queste prendono appunto il nome di condizioni di stabilità.

c) *criteri*; dopo aver stabilito le condizioni di stabilità è importante poter verificare se tali condizioni sono soddisfatte o meno, senza calcolare esplicitamente le uscite. I procedimenti che consentono di effettuare questa verifica prendono il nome di criteri di stabilità.

Il contributo fondamentale nella teoria moderna della stabilità è dovuto al matematico russo Lyapunov il quale, nel 1892, scrisse una celebre memoria sulla stabilità del movimento, che è rimasta il punto di partenza della teoria della stabilità. La teoria di Lyapunov si è dimostrata la più efficace per lo studio della stabilità nei problemi applicativi, in particolare in quelli ingegneristici. Questa teoria è stata « scoperta » dagli ingegneri negli anni '50 e da allora via via trasferita sul piano applicativo; oggi è praticamente l'unica teoria che permette di affrontare i problemi di stabilità su una base matematica seria, non solo nei casi lineari, ma anche in quelli non lineari.

## 1.2 - Situazioni dinamiche di interesse.

In tutta la trattazione seguente si assumerà che il sistema  $S$  allo studio sia descritto mediante una rappresentazione ingresso-stato-uscita:

$$(2.1') \quad x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u)$$

$$(2.1'') \quad y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

Le situazioni dinamiche di maggiore interesse nella teoria della stabilità sono le seguenti:

**Traiettoria** : è l'insieme così definito:

$$(2.2) \quad \mathcal{S} = \{x \in X : x = \varphi(t, t_0, x_0, u)\} .$$

Essa è l'insieme di tutti i valori assunti dallo stato nell'evoluzione a partire da un particolare stato iniziale ed in corrispondenza ad un particolare ingresso; essa dipende ovviamente anche dall'istante iniziale. La traiettoria è un luogo di punti nello spazio di stato; nel caso bidimensionale ( $n = 2$ ), ad es., la traiettoria può essere rappresentata come una curva nel piano cartesiano  $(x_1, x_2)$  (vedi fig. 2.1).

Come già osservato, ciascuna traiettoria è legata al particolare stato iniziale ed al particolare ingresso che caratterizzano l'evoluzione dello stato.

**Moto** (o movimento) : è l'insieme così definito:

$$(2.3) \quad \mathcal{M} = \{(t, x(t)) \in T \times X : t \in T(t_0), \\ x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u)\} .$$

Essa è l'insieme delle coppie di valori  $(t, x)$ , nelle quali  $x$  è il valore assunto all'istante  $t$  dallo stato nell'evoluzione a partire da un particolare stato iniziale ed in corrispondenza ad un particolare ingresso. La differenza sostanziale rispetto alla traiettoria risiede nel fatto che questa volta si considera, accanto allo stato, anche l'istante di tempo in cui il valore dello stato viene assunto. Il moto è un luogo di punti nell'insieme  $T \times X$ ; nel caso bidimensionale, ad es., può essere rappresentato come una curva nello spazio cartesiano  $(t, x_1, x_2)$  (vedi fig. 2.2).

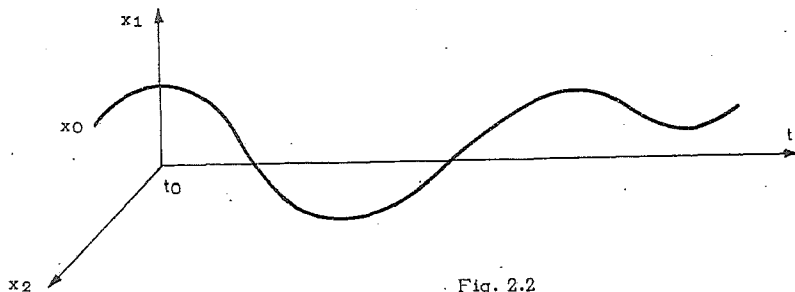


Fig. 2.2

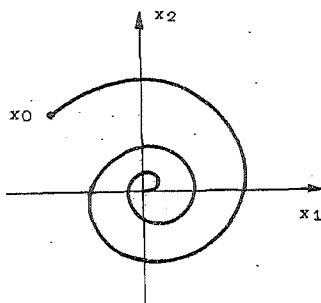
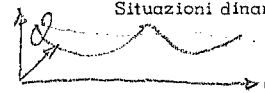


Fig. 2.1



È chiaro che la proiezione del moto sul piano  $(x_1, x_2)$  restituisce la traiettoria.

La distinzione tra traiettoria e moto è fondamentale e se ne vedranno presto le applicazioni. Nel primo caso interessa soltanto conoscere il luogo dei punti dello spazio di stato percorso dal sistema nella sua evoluzione; nel secondo caso interessa anche sapere in quale istante ciascun punto dello spazio di stato viene raggiunto.

◦ **Moto periodico** : un moto si dice periodico se esiste un valore  $T$  per cui si abbia:

$$(2.4) \quad \varphi(t + nT, t_0, x_0, u) = \varphi(t, t_0, x_0, u)$$

per ogni intero  $n$  e per ogni  $t \in T(t_0)$ . Il più piccolo  $T$  per cui la (2.4) è soddisfatta si chiama periodo del moto. Ovviamente la traiettoria corrispondente ad un moto periodico è chiusa, in quanto lo stato riassume le stesse posizioni periodicamente. Le traiettorie chiuse hanno spesso un nome convenzionale molto diffuso in certi capitoli della teoria della stabilità: ciclo limite. Nel caso bidimensionale un ciclo limite può assumere la configurazione indicata in fig. 2.3.

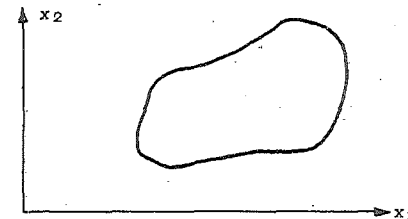


Fig. 2.3

◦ **Stato di equilibrio** : uno stato  $x_e$  si dice di equilibrio se, nell'evoluzione libera avente origine da tale stato, lo stato del sistema si mantiene costantemente pari ad  $x_e$ . In termini formali, uno stato di equilibrio è qualsiasi elemento  $x_e$  di  $X$  che soddisfa la condizione:

$$(2.5) \quad x_e = \varphi(t, t_0, x_e, 0)$$

per ogni  $t \in T(t_0)$ . Gli stati di equilibrio sono dunque le soluzioni della (2.5).

Con riferimento alle definizioni date in precedenza, si può dire che gli stati di equilibrio sono traiettorie degeneri (costituite da un solo elemento di  $X$ ) corrispondenti ad ingressi nulli su  $T(t_0)$ . Ovvero, in altri termini, gli stati di equilibrio sono le traiettorie corrispondenti a moti periodici degeneri (moti periodici di periodo nullo).

La definizione qui presentata fa riferimento al caso di ingresso nullo (evoluzione libera). Non vi è tuttavia alcuna difficoltà a considerare una definizione che faccia riferimento a un ingresso costante su  $T(t_0)$ ; in tal caso la (2.5) va sostituita dalla:

$$(2.6) \quad x_e = \varphi(t, t_0, x_e, \hat{u})$$

avendo indicato con  $\hat{u}$  il valore costante dell'ingresso.

È chiaro allora che gli stati di equilibrio dipendono dal particolare valore della costante  $\hat{u}$ ; non si perde di generalità, tuttavia, a studiare il caso definito dalla (2.5) in quanto si può sempre pensare il valore di  $\hat{u}$  che figura nella (2.6) come parametro del sistema.

### 1.3 - Definizioni di stabilità.

Si daranno ora le principali definizioni di stabilità secondo Lyapunov. In tutta la trattazione seguente, salvo esplicito avviso, si indicherà con  $x(t)$  il valore assunto dalla funzione  $\varphi(t, t_0, x_0, 0)$  e cioè il valore assunto dallo stato in evoluzione libera all'istante  $t$ , a partire da uno stato iniziale  $x_0 = x(t_0)$ . Si assumerà inoltre che lo spazio di stato  $X$  sia uno spazio vettoriale normato.

**Stabilità di uno stato di equilibrio:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice stabile se:

$$(3.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \\ \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \in T(t_0)$$

cioè se comunque si fissi un  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta$ , che potrà dipendere da  $\varepsilon$  e dall'istante iniziale  $t_0$ , tale che, se  $x(t_0) - x_e$  è in norma minore di  $\delta$  allora  $x(t) - x_e$  è in norma minore di  $\varepsilon$ , per ogni  $t \geq t_0$ .

Una esemplificazione grafica di questa definizione è data in figura 3.1 con riferimento al caso bidimensionale. Sia  $x_e$  uno stato di equilibrio; esso è stabile se, scelto un intorno del punto  $x_e$  di raggio  $\varepsilon$  piccolo a piacere (fig. 3.1-a), è possibile trovare un intorno di raggio  $\delta$  - che dipenderà dal valore  $\varepsilon$  prescelto e dall'istante iniziale  $t_0$  - (figura 3.1-b), tale che, se  $x(t_0)$  è interno al cerchio di raggio  $\delta$  (figura 3.1-c) allora la traiettoria in evoluzione libera avente origine da  $x(t_0)$  si mantiene interna al cerchio di raggio  $\varepsilon$  (fig. 3.1-d).

In altre parole, fissato un intorno di  $x_e$  piccolo quanto si voglia, l'evoluzione libera dello stato si mantiene confinata a tale intorno purché il valore dello stato iniziale  $x(t_0)$  non si discosti troppo dal valore di equilibrio  $x_e$ .

Nello studio della stabilità di uno stato di equilibrio è abituale dare alla quantità  $x(t_0) - x_e$  il nome di perturbazione iniziale, e, in conseguenza, alla evoluzione dello stato  $\varphi(t, t_0, x(t_0), 0)$  il nome di evoluzione (libera) perturbata.

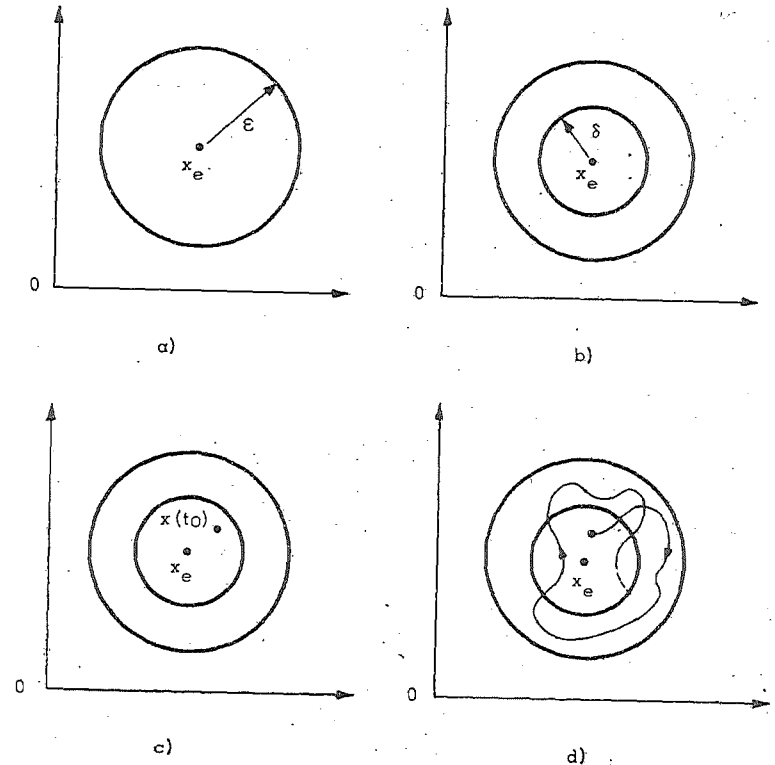


Fig. 3.1

Si sottolinea il fatto che nella definizione presentata sopra non viene richiesto che l'evoluzione perturbata ritorni necessariamente al punto di equilibrio; quello che si richiede è solo una limitatezza locale, nell'intorno del punto di equilibrio.

Si osservi che, in generale,  $\delta$  dipende da  $t_0$ , poiché si considerano sistemi non stazionari. Vi sono casi in cui  $\delta$  non dipende da  $t_0$  e quando ciò avviene si dice che la stabilità di  $x_e$  è uniforme rispetto al tempo. È evidente che nei sistemi stazionari la stabilità è sempre uniforme.

**Stabilità asintotica di uno stato di equilibrio:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice stabile asintoticamente se esso è stabile e se, inoltre:

$$(3.2) \quad \exists \delta_a(t_0) : \|x(t_0) - x_e\| < \delta_a(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

In altri termini, uno stato di equilibrio  $x_e$  è stabile asintoticamente se è stabile (nel senso della definizione precedente) e se, inoltre, quando la perturbazione iniziale è limitata (da un numero  $\delta_a$  che può dipendere anche da  $t_0$ ) l'evoluzione perturbata converge, per  $t \rightarrow \infty$ , allo stato  $x_e$  stesso. Da un punto di vista fisico si può dire che, in questo caso, perturbazioni limitate non solo danno effetti limitati, ma assicurano che l'evoluzione converga asintoticamente al punto di equilibrio.

È importante notare che, in generale, la proprietà indicata con la (3.2) è indipendente da quella indicata con la (3.1). Può cioè aversi convergenza ad  $x_e$  dell'evoluzione perturbata anche se  $x_e$  non è stabile (basti riflettere al fatto che la stabilità di  $x_e$  impone una condizione su  $x(t)$  per ogni valore di  $t$  mentre la (3.2) impone una condizione su  $x(t)$  solo per valori di  $t$  molto elevati). Per sottolineare questo fatto si usa parlare di quasi-stabilità asintotica nel caso in cui lo stato  $x_e$  soddisfi alla sola condizione (3.2). Sulla base di questa terminologia si può allora dire che uno stato di equilibrio è stabile asintoticamente se è simultaneamente stabile e quasi-stabile asintoticamente.

Anche nel caso di stabilità asintotica è possibile analizzare la dipendenza da  $t_0$  ed introdurre concetti di uniformità. Per illustrare questo punto si osservi che l'esistenza del limite indicato nella (3.2) implica ed è implicata dal fatto che, fissato comunque un valore  $\eta > 0$ , esista in corrispondenza un istante di tempo  $t_a$  tale che risulti  $\|x(t) - x_e\| < \eta$  per ogni  $t > t_a$ . Il valore  $t_a$  dipende da  $\eta$  (come previsto dalla definizione di limite) ma può dipendere anche dall'istante iniziale  $t_0$ . Sulla base di queste considerazioni si può allora concludere che la dipendenza da  $t_0$  della proprietà in esame si manifesta sia nel fatto che dipende da  $t_0$  l'ampiezza dell'intorno cui deve appartenere la perturbazione iniziale (il valore  $\delta_a$ ) sia nel fatto che dipende da  $t_0$  la rapidità di convergenza a 0 di  $\|x(t) - x_e\|$  (quest'ultima può essere misurata dall'ampiezza dell'intervallo di tempo che intercorre tra  $t_0$  e  $t_a$  e cioè dalla differenza  $t_a - t_0$ ). Se entrambi  $\delta_a$  e  $(t_a - t_0)$  non dipendono da  $t_0$ , si usa parlare di quasi-stabilità asintotica uniforme.

Combinando il concetto ora introdotto con quello di stabilità uniforme, si dice che uno stato di equilibrio  $x_e$  è stabile asintoticamente uniformemente se esso è stabile uniformemente e quasi-stabile asintoticamente uniformemente.

**Stabilità asintotica globale**: uno stato di equilibrio si dice stabile asintoticamente globalmente se esso è stabile e se, inoltre:

$$(3.3) \quad \forall x(t_0) \in X \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

In altri termini, uno stato di equilibrio  $x_e$  è stabile asintoticamente globalmente se è stabile e se l'evoluzione perturbata converge

asintoticamente allo stato  $x_e$  quale che sia l'entità della perturbazione iniziale. È chiaro che la definizione di stabilità asintotica globale impone una condizione molto più forte, più restrittiva, di quella imposta dalla stabilità asintotica; in generale la prima (stabilità globale) implica la seconda (stabilità locale), ma non viceversa. Nel caso in cui la stabilità è asintotica ma non globale, si possono individuare nello spazio di stato delle regioni tali che, se lo stato iniziale è ad esse interno, si ha convergenza verso il punto di equilibrio, mentre se è esterno si ha divergenza. Tali regioni prendono il nome di regioni di stabilità e, chiaramente, ve ne è una per ogni punto di equilibrio. Nel caso di stabilità asintotica globale la regione di stabilità comprende tutto lo spazio.

**Stabilità esponenziale**: uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice stabile esponenzialmente se esiste un valore  $\lambda > 0$  tale che:

$$(3.4) \quad \forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon) : \forall x(t_0) \in T(t_0) \quad \text{Non } \delta(\varepsilon, t_0)$$

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$\forall t \in T(t_0)$$

In altri termini uno stato di equilibrio si dice stabile esponenzialmente se ogni evoluzione perturbata che ha origine nell'intorno di tale stato è limitata, in norma, da una funzione esponenziale decrescente. Si noti che l'evoluzione perturbata tende asintoticamente ad  $x_e$ , ma non è detto che vi tenda secondo una legge di tipo esponenziale: essa vi tende secondo una legge che è «maggiorata» da una legge di tipo esponenziale.

Può essere interessante mostrare il fatto che la stabilità esponenziale è anche asintotica uniforme. A questo scopo si incominci con l'osservare che, se vale la (3.4), vale a maggior ragione la:

$$\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon) :$$

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \in T(t_0)$$

(in quanto  $e^{-\lambda(t-t_0)}$  è sempre inferiore ad 1). Questa relazione coincide con la (3.1) ed, inoltre, in essa il valore  $\delta$  non dipende da  $t_0$ ; si può allora concludere che per  $x_e$  sussiste la stabilità uniforme. Si consideri poi nuovamente la (3.4) e si attribuisca ad  $\varepsilon$  un valore prefissato  $\bar{\varepsilon}$ ; grazie alla convergenza a zero di  $e^{-\lambda(t-t_0)}$  si può dedurre che:

$$(3.5) \quad \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\bar{\varepsilon}) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

e cioè che  $x_e$  è quasi-stabile asintoticamente. Per quanto riguarda il

limite che figura nella (3.5) è immediato dedurre, grazie ancora alla (3.4), che, fissato comunque  $\eta > 0$ , risulta  $\|x(t) - x_e\| < \eta$  per ogni  $t$  maggiore del valore  $t_a$  dato dalla formula:

$$(3.6) \quad t_a = t_0 + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\bar{\varepsilon}}{\eta}$$

Di conseguenza la differenza  $t_a - t_0$  non dipende da  $t_0$  e, pertanto, la quasi-stabilità asintotica di  $x_e$  è anche uniforme, il che completa la prova di quanto asserito.

**Stabilità di un moto:** un moto:

$$(3.7) \quad \mathbb{M} = \{(t, x(t)) \in T \times X : t \in T(t_0), x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u)\}$$

si dice stabile se:

$$(3.8) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) :$$

$$\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x, u) - \varphi(t, t_0, x_0, u)\| < \varepsilon, \forall t \in T(t_0)$$

La definizione è sostanzialmente simile a quella data per gli stati di equilibrio; lo aspetto essenziale che occorre tener presente è il seguente: un moto è stabile se, per piccole perturbazioni dello stato iniziale, ad ogni istante  $t$  successivo all'istante  $t_0$  l'evoluzione perturbata si mantiene vicina alla evoluzione non perturbata.

Questo non significa che, se la traiettoria associata al moto originario  $\varphi(t, t_0, x_0, u)$  e quella associata al moto perturbato  $\varphi(t, t_0, x, u)$  sono vicine, il moto sia necessariamente stabile: infatti

le due traiettorie potrebbero essere vicine ma percorse con legge temporale diversa. Ad un dato istante  $t$  la distanza tra  $\varphi(t, t_0, x_0, u)$  e  $\varphi(t, t_0, x, u)$  potrebbe essere superiore ad  $\varepsilon$  (cfr. fig. 3.2).

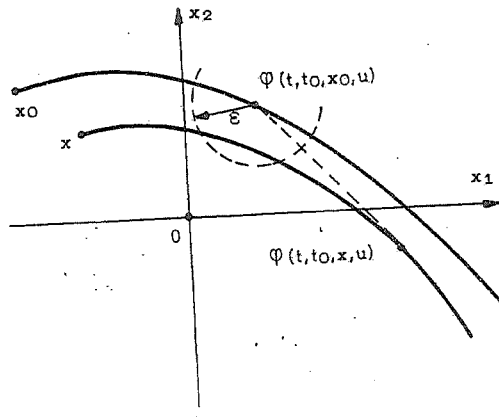


Fig. 3.2

Anche e  
implicato

**1.4 - Alcune proprietà delle rappresentazioni lineari.**

Si dedurranno ora alcune interessanti proprietà delle rappresentazioni lineari.

**Proposizione 4.1.** In una rappresentazione lineare l'insieme degli stati di equilibrio è un sottospazio dello spazio di stato. In particolare, l'origine dello spazio di stato è sempre uno stato di equilibrio.

**Prova.** Se  $x_{e1}$  ed  $x_{e2}$  sono due stati di equilibrio della rappresentazione in questione, si ha, per definizione:

$$x_{e1} = \varphi(t, t_0, x_{e1}, 0) \quad \forall t \in T(t_0) \quad \text{dal}$$

$$x_{e2} = \varphi(t, t_0, x_{e2}, 0) \quad \forall t \in T(t_0) \quad \text{per}$$

da cui, per la linearità di  $\{\varphi(t, t_0, x, 0)\}$  rispetto ad  $x$ , si deduce che:

$$c_1 x_{e1} + c_2 x_{e2} = \varphi(t, t_0, c_1 x_{e1} + c_2 x_{e2}, 0) \quad \forall t \in T(t_0)$$

essendo  $c_1 \in \mathbb{C}$  e  $c_2 \in \mathbb{C}$ . Ne consegue che lo stato  $c_1 x_{e1} + c_2 x_{e2}$  è uno stato di equilibrio, il che prova l'asserto.

**Proposizione 4.2.** In una rappresentazione lineare, se esiste più di uno stato di equilibrio, la stabilità di uno qualsiasi di essi implica ed è implicata da quella di un qualsiasi altro.

**Prova.** È sufficiente provare che la stabilità di un qualsiasi stato  $x_e$  implica ed è implicata da quella dell'origine  $0$  dello spazio di stato. A tal fine, si ricordi che, se  $x_e$  è uno stato di equilibrio stabile, comunque si scelga  $\varepsilon$ , esiste  $\delta(\varepsilon, t_0)$  tale che:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0, 0) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \in T(t_0)$$

Il secondo membro di questa proposizione, tenendo presente il fatto che:

$$x_e = \varphi(t, t_0, x_e, 0)$$

e la linearità di  $\varphi(t, t_0, x, 0)$  rispetto ad  $x$  può essere riscritto come:

$$\|\varphi(t, t_0, x_0 - x_e, 0)\| < \varepsilon$$

Posto allora:

$$x_0 - x_e = z_0$$

si può scrivere che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \|z_0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, z_0, 0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in T(t_0).$$

Quest'ultima proposizione esprime appunto la stabilità dell'origine 0 dello spazio di stato della rappresentazione in questione, il che prova la prima parte dell'enunciato. La seconda parte può essere facilmente provata ripercorrendo la stessa dimostrazione in senso inverso.

**Proposizione 4.3.** In una rappresentazione lineare uno stato di equilibrio è stabile se e solo se esiste una coppia di numeri positivi  $\varepsilon$  e  $\delta$  per i quali si abbia:

$$(4.1) \quad \|x_0\| < \bar{\delta} \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \bar{\varepsilon} \quad \forall t \in T(t_0).$$

**Commento.** Si noti che questa condizione è più debole della (3.1) in quanto fa riferimento ad una sola coppia di valori  $\varepsilon, \delta$ .

Si noti inoltre che nella (4.1), grazie al risultato precedente, si fa riferimento all'origine 0 dello spazio di stato anziché al particolare stato di equilibrio  $x_e$ .

**Prova.** Risulta evidente che, se la (3.1) è soddisfatta (per  $x_e = 0$ ), vale anche la (4.1). Per provare il viceversa, si moltiplichino per un numero  $\alpha > 0$  entrambi i termini a primo e secondo membro della (4.1); ne risulterà, ove si tenga presente la linearità di  $\varphi(t, t_0, x, 0)$  rispetto ad  $x$ , la proposizione:

$$\|\alpha x_0\| < \alpha \bar{\delta} \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, \alpha x_0, 0)\| < \alpha \bar{\varepsilon} \quad \forall t \in T(t_0).$$

Essendo  $\alpha$  arbitrario, è lecito considerare la quantità  $\alpha \bar{\varepsilon}$  come una quantità arbitraria positiva. Posto allora:

$$\begin{aligned} \alpha \bar{\varepsilon} &= \varepsilon \\ \delta(\varepsilon) &= \alpha \bar{\delta} = \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{\bar{\varepsilon}} \\ \alpha x_0 &= z_0 \end{aligned}$$

la proposizione precedente assicura che, comunque si scelga  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta(\varepsilon)$  tale che:

$$\|z_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, z_0, 0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in T(t_0)$$

e cioè la (3.1) particolarizzata al caso in esame.

**Proposizione 4.4.** In una rappresentazione lineare:

- si può avere stabilità asintotica solo per lo stato di equilibrio  $x_e = 0$  e solo quando quest'ultimo è l'unico stato di equilibrio del sistema;

- la stabilità asintotica locale dello stato  $x_e = 0$  implica la sua stabilità asintotica globale.

**Prova.** Per quanto riguarda il primo punto, va osservato che, se vi sono più stati di equilibrio (un sottospazio lineare, per quanto mostrato in precedenza), uno qualsiasi di essi  $x_e$  è punto di accumulazione di altri stati di equilibrio. Di conseguenza, comunque piccolo sia  $\delta_\alpha$ , esiste sempre la possibilità di scegliere  $x_0$  coincidente con un altro stato di equilibrio  $\bar{x}_e \neq x_e$ . Per definizione di punto di equilibrio risulta allora  $x(t) = \bar{x}_e$  per ogni  $t \geq t_0$  e quindi non si può avere convergenza verso  $x_e$ . Da ciò si deduce che la quasi-stabilità asintotica si può avere solo quando lo stato di equilibrio è un punto isolato. Nel caso di rappresentazioni lineari questo avviene solo quando l'origine dello spazio di stato è l'unico punto di equilibrio del sistema.

La dimostrazione che la stabilità asintotica locale implica quella globale può essere effettuata con gli stessi argomenti utilizzati nella prova precedente.

**Proposizione 4.5.** In una rappresentazione lineare l'origine dello spazio di stato è stabile esponenzialmente se e solo se è stabile asintoticamente.

**Prova.** La necessità della condizione è già stata mostrata in generale nello studio della relazione tra le due proprietà di stabilità menzionate.

Per quanto riguarda la sufficienza, si tenga innanzitutto presente che, per definizione, uno stato di equilibrio stabile asintoticamente uniformemente è stabile uniformemente e quasi-stabile asintoticamente uniformemente. La prima di queste proprietà, nel caso di rappresentazioni lineari e con riferimento all'origine dello spazio di stato, si traduce nella condizione (cfr. Proposizione 4.3) che esistano due numeri positivi  $\varepsilon$  e  $\bar{\delta}$  (di cui  $\bar{\delta}$  non dipende da  $t_0$ ) per cui valga la:

$$(4.2) \quad \|x_0\| < \bar{\delta} \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in T(t_0).$$

La seconda di queste proprietà si traduce nella condizione che esista un numero positivo  $\delta_\alpha$  (non dipendente da  $t_0$ ) e, in corrispondenza ad ogni numero positivo  $\eta$ , un valore  $\bar{t}$  (dipendente da  $\eta$  ma non da  $t_0$ ) per cui valga la:

$$(4.3) \quad \|x_0\| < \delta_\alpha \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \eta \quad \forall t \geq t_0 + \bar{t}(\eta).$$

Introducendo ora l'ipotesi che la rappresentazione sia lineare, è utile notare che dalle (4.2) e (4.3) (cfr. prova della Proposizione 4.3), scelto comunque un numero positivo  $\alpha$ , discendono le implicazioni:

$$(4.2') \quad \|x_0\| < \alpha \bar{\delta} \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \alpha \bar{\varepsilon} \quad \forall t \geq t_0$$



$$(4.3') \quad \|x_0\| < \alpha \delta_\alpha \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \alpha \eta \quad \forall t \geq t_0 + \bar{\tau}(\eta).$$

Partendo dalle (4.2'), (4.3) e (4.3') si dedurrà ora che, se  $\|x_0\|$  è limitato opportunamente, è possibile dare per  $\|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\|$  una limitazione del tipo indicato in fig. 4.1.

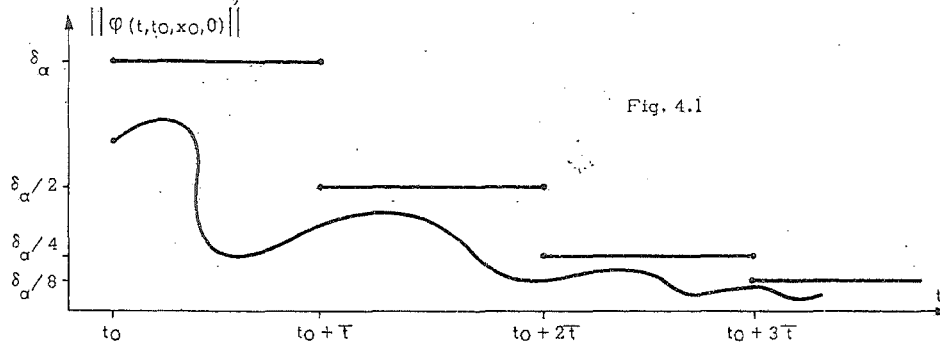


Fig. 4.1

Se infatti si assume  $\|x_0\| < \delta_\alpha$  e si sceglie nella (4.3)  $\eta = \delta_\alpha/2$ , risulta<sup>(1)</sup>:

$$(4.4) \quad \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \frac{\delta_\alpha}{2} \quad \text{per } t \geq t_0 + \bar{\tau}.$$

D'altra parte, scelto  $\alpha = 1/2$  nella (4.3') si ha:

$$(4.5) \quad \|x_0\| < \frac{\delta_\alpha}{2} \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \frac{\delta_\alpha}{4} \quad \text{per } t \geq t_0 + \bar{\tau}.$$

Grazie alla (4.4), si può assumere che la condizione a sinistra è verificata all'istante  $t_0 + \bar{\tau}$ ; dunque si può dedurre (sostituendo  $t_0 + \bar{\tau}$  al posto di  $t_0$  nella (4.5)):

$$\|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \frac{\delta_\alpha}{4} \quad \text{per } t \geq t_0 + 2\bar{\tau}.$$

Allo stesso modo si procede per tutti gli intervalli successivi.

Per quanto riguarda l'intervallo  $[t_0, t_0 + \bar{\tau}]$ , la limitazione indicata:

$$\|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| < \delta_\alpha \quad \text{per } t \geq t_0$$

può essere ottenuta dalla (4.2') scegliendo  $\alpha = \delta_\alpha/\varepsilon$ , purché sia  $\|x_0\| < \delta_\alpha \bar{\delta}/\varepsilon$ .

(1) - Si tenga presente che la scelta di  $\eta$  influisce sul valore di  $\bar{\tau}$ .

Se allora  $\|x_0\|$  è inferiore al più piccolo dei due numeri  $\delta_\alpha$  e  $\delta_\alpha \bar{\delta}/\varepsilon$ , vale la limitazione indicata in fig. 4.1. Tale limitazione può essere a sua volta maggiorata con la funzione:

$$\delta_\alpha e^{-\frac{\ln 2}{\bar{\tau}}(t-t_0-\bar{\tau})}$$

come è facile verificare osservando che tale funzione assume, negli istanti  $t_0 + \bar{\tau}, t_0 + 2\bar{\tau}, \dots$ , i valori  $\delta_\alpha, \delta_\alpha/2, \dots$

Si conclude allora che, posto:

$$\delta = \min \{ \delta_\alpha, \delta_\alpha \bar{\delta}/\varepsilon \}, \quad \varepsilon = \delta_\alpha e^{\ln 2}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\bar{\tau}}$$

si ha:

$$(4.6) \quad \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \in T(t_0)$$

la quale, nei casi di rappresentazioni lineari, garantisce la stabilità esponenziale dell'origine dello spazio di stato<sup>(1)</sup>.

Prima di concludere questo paragrafo, si ritiene utile far notare che, sia nel caso in cui vi sia un solo stato di equilibrio (l'origine 0, che può essere stabile, stabile asintoticamente oppure instabile) o che vi siano infiniti stati di equilibrio (un sottospazio di X, i cui elementi possono essere o tutti stabili o tutti instabili) è lecito attribuire le proprietà di stabilità alla rappresentazione anziché al singolo stato di equilibrio. Non vi è infatti possibilità di confusione tra le diverse situazioni in quanto il sussistere o meno di una o l'altra delle proprietà di stabilità è indipendente dallo stato di equilibrio considerato. Si potrà allora parlare di stabilità, stabilità asintotica, instabilità di una rappresentazione lineare.

### 1.5 - Condizioni di stabilità per rappresentazioni lineari a dimensione finita.

In questo paragrafo si considererà il caso di rappresentazioni lineari a dimensione finita e si dedurranno le condizioni che devono essere soddisfatte affinché sussistano l'una o l'altra delle diverse proprietà di stabilità illustrate nel paragrafo 1.2. L'evoluzione libera del-

(1) - Il passaggio dalla (4.6) alla (3.4) è identico a quello che consente di passare dalla (4.1) alla (3.1).

lo stato a partire da uno stato iniziale  $x_0$  si esprime, come è noto, nella forma:

$$(5.1) \quad \varphi(t, t_0, x_0, 0) = \Phi(t, t_0) x_0$$

nella quale  $\Phi(\cdot, \cdot)$  è una matrice  $n \times n$  di funzioni definite su  $(T \times T)^*$ . È quindi possibile, anzi opportuno, enunciare le condizioni di stabilità sotto forma di proprietà della matrice di transizione dello stato.

**Teorema 5.1.** L'origine dello spazio di stato, in una rappresentazione lineare a dimensione finita, è stabile se e solo se esiste una costante  $k$ , eventualmente dipendente da  $t_0$ , tale che si abbia:

$$(5.2) \quad \|\Phi(t, t_0)\| < k(t_0) \quad \forall t \in T(t_0)$$

**Prova.** Per provare che tale condizione è sufficiente, si osservi che, se vale la (5.2), per ogni evoluzione libera si può scrivere:

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t, t_0) x_0\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \cdot \|x_0\| < k(t_0) \|x_0\|$$

da cui, fissato  $\bar{\varepsilon} > 0$ , se si sceglie  $\bar{\delta} = \varepsilon / k(t_0)$ , si ha:

$$\|x_0\| < \bar{\delta} \Rightarrow \|x(t)\| < \bar{\varepsilon} \quad \forall t \in T(t_0)$$

e cioè la (4.1).

Per provare la necessità della (5.2) si mostrerà che, se la condizione non è soddisfatta, allora si ha instabilità. A tale scopo, occorre tradurre in termini formali sia il fatto che la (5.2) non sia soddisfatta, sia il concetto di instabilità. Per quanto riguarda il primo punto, si osservi che negare la (5.2) equivale ad asserire che in corrispondenza ad ogni costante  $k > 0$  (comunque elevata) è possibile trovare un istante di tempo  $\bar{t} \in T(t_0)$  tale che  $\|\Phi(\bar{t}, t_0)\| \geq k$ ; ricordando poi le definizioni di norma nello spazio  $C^n$ , ciò equivale ad asserire che, in corrispondenza ad ogni  $k > 0$ , esiste un elemento di  $\Phi(\cdot, \cdot)$  - ad es. quello di posto  $(i, k)$  - ed un istante  $\bar{t}$  tale che si abbia:

$$|\varphi_{ik}(\bar{t}, t_0)| \geq k$$

Per quanto riguarda l'instabilità si osservi che negare la (3.1) equivale ad asserire che esiste un valore  $\varepsilon > 0$  in corrispondenza al quale, comunque (piccolo) si scelga  $\delta > 0$  è possibile trovare uno stato iniziale  $x_0$  soddisfacente la condizione  $\|x_0 - x_e\| < \delta$  ed un istante di tempo  $\bar{t} \in T(t_0)$  tale che risulti:

$$\|\varphi(\bar{t}, t_0, x_0, 0) - x_e\| \geq \varepsilon$$

Ciò premesso, è facile mostrare che se non è soddisfatta la (5.2), si ha instabilità. Si consideri infatti in numero  $\varepsilon > 0$  prefissato e sia  $\eta > 0$  un numero piccolo a piacere; se non vale la (5.2) si ha che:

$$(5.3) \quad \forall \eta, \exists \bar{t} : |\varphi_{ik}(\bar{t}, t_0)| \geq \frac{2\varepsilon}{\eta}$$

Considerando inoltre uno stato iniziale  $x_0$  definito nel modo seguente:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} x_{0j} &= 0 & \text{per } j \neq k \\ x_{0k} &= \eta/2 \end{aligned}$$

si ha che:

$$(5.5) \quad \|\varphi(t, t_0, x_0, 0)\| = \|\Phi(t, t_0) x_0\| \geq |\varphi_{ik}(t, t_0)| \eta/2$$

Calcolando il terzo membro della (5.5) per  $t = \bar{t}$  si conclude allora che, per ogni  $\eta > 0$ , è possibile trovare un  $x_0$  soddisfacente la condizione  $\|x_0\| < \eta$  (lo stato  $x_0$  definito con la (5.4)) ed un istante di tempo  $\bar{t}$  tale che risulti  $\|\varphi(\bar{t}, t_0, x_0, 0)\| \geq \varepsilon$  e cioè l'instabilità dell'origine dello spazio di stato delle rappresentazione in esame.

**Teorema 5.2.** L'origine dello spazio di stato, in una rappresentazione lineare a dimensione finita, è stabile asintoticamente se e solo se esiste una costante  $k$ , eventualmente dipendente da  $t_0$ , tale che sia:

$$(5.6) \quad \|\Phi(t, t_0)\| < k(t_0) \quad \forall t \in T(t_0)$$

ed inoltre,

$$(5.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0) = 0$$

**Prova.** La prima condizione è ovviamente quella del teorema precedente. Per quanto riguarda la seconda, si osservi che, in base alla (5.1), se vale la (5.7) si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

e cioè la quasi-stabilità asintotica dell'origine dello spazio di stato. La prova che la (5.7) è anche necessaria si può condurre in modo analogo a quanto fatto nel teorema precedente, considerando un opportuno stato iniziale. <

Rappresentazioni Stazionarie.

Passando ora a particularizzare i risultati enunciati nei Teoremi 5.1 e 5.2 per il caso di rappresentazioni stazionarie, è conveniente distinguere i sistemi a tempo-continuo da quelli a tempo-discreto e riferirsi alla forma implicita della rappresentazione con lo spazio di stato (valida, nel caso di tempo-continuo, in ipotesi di regolarità).

Tenendo presente che, nel caso di tempo continuo,

$$e^{At} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t}$$

è facile verificare i seguenti risultati.

**Teorema 5.3.** L'origine dello spazio di stato in una rappresentazione lineare e stazionaria, a dimensione finita, regolare è stabile se e solo se:

- a) gli autovalori di **A** con molteplicità geometrica unitaria ( $m_i = 1$ ) hanno parte reale negativa o nulla;
- b) gli autovalori di **A** con molteplicità geometrica maggiore di uno hanno parte reale negativa.

**Teorema 5.4.** L'origine dello spazio di stato in una rappresentazione lineare e stazionaria, a dimensione finita, regolare è stabile asintoticamente se e solo se gli autovalori di **A** hanno tutti parte reale negativa.

**Commento.** Riflettendo alla collocazione degli autovalori di **A** nel piano complesso, i due teoremi precedenti possono essere riassunti nel seguente modo: Si ha stabilità asintotica se e solo se gli autovalori di **A** sono tutti a sinistra dell'asse immaginario; si ha stabilità se non vi sono autovalori a destra dell'asse immaginario e se gli eventuali autovalori sull'asse immaginario hanno molteplicità geometrica unitaria. <

Nel caso dei sistemi a tempo discreto i risultati corrispondenti sono i seguenti:

**Teorema 5.5.** L'origine dello spazio di stato in una rappresentazione lineare e stazionaria, a dimensione finita, di un sistema a tempo discreto è stabile se e solo se:

- a) gli autovalori di **A** con molteplicità geometrica unitaria hanno modulo inferiore o uguale ad uno;
- b) gli autovalori di **A** con molteplicità geometrica maggiore di uno hanno modulo inferiore ad uno.

$$\lambda = |\lambda| e^{j\theta}$$

**Teorema 5.6.** L'origine dello spazio di stato in una rappresentazione lineare e stazionaria, a dimensione finita, di un sistema a tempo discreto è stabile asintoticamente se e solo se gli autovalori di **A** hanno tutti modulo inferiore ad uno. <

I risultati precedenti si provano immediatamente tenendo presente che:

$$A^t = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_i^{t-k+1}$$

**Commento.** Con riferimento alla disposizione di autovalori nel piano complesso, si ha stabilità asintotica se e solo se questi sono tutti interni al cerchio unitario; si ha stabilità se non vi sono autovalori esterni al cerchio unitario e se quelli eventualmente presenti sul cerchio unitario hanno molteplicità geometrica non superiore ad uno. <

Prima di concludere questo paragrafo, si ritiene importante sottolineare il fatto che, come del resto è implicito nelle definizioni stesse, le proprietà di stabilità sono relative alla particolare rappresentazione con lo spazio di stato che si sta esaminando e, pertanto, possono risultare diverse se si passa a considerare un'altra rappresentazione con lo spazio di stato dello stesso sistema.

Nel caso delle rappresentazioni lineari a dimensione finita ha particolare interesse considerare la classe delle rappresentazioni che si ottengono, a partire da una assegnata, mediante una trasformazione di coordinate nello spazio di stato ed esaminare se le proprietà di stabilità si conservano nell'ambito di tale classe.

In proposito è opportuno ricordare che, se si effettua una trasformazione di coordinate nello spazio di stato introducendo una nuova variabile:

$$(5.8) \quad \hat{x}(t) = T(t) x(t)$$

(con **T**(·) matrice n × n non-singolare di funzioni definite su T), la matrice **Φ**(·, ·) di transizione dello stato si trasforma nella:

$$(5.9) \quad \hat{\Phi}(t, \tau) = T(t) \Phi(t, \tau) T^{-1}(\tau)$$

Con riferimento a queste notazioni è allora immediato verificare il seguente risultato.

**Proposizione 5.7.** Sia data una rappresentazione lineare a dimensione finita nella quale l'origine dello spazio sia stabile (asintoticamente). In

ogni altra rappresentazione da essa dedotta mediante una trasformazione di coordinate del tipo (5.8) l'origine dello spazio di stato è stabile (asintoticamente) se esistono due costanti  $k_1$  e  $k_2$  tali che:

$$(5.10) \quad \|\mathbf{T}(t)\| \leq k_1 \quad \forall t \in T$$

$$(5.11) \quad \|\mathbf{T}^{-1}(t)\| \leq k_2 \quad \forall t \in T$$

Prova. Dalla (5.9) è immediato constatare che:

$$\|\hat{\Phi}(t, t_0)\| \leq \|\mathbf{T}(t)\| \cdot \|\Phi(t, t_0)\| \cdot \|\mathbf{T}^{-1}(t_0)\|$$

per cui, se valgono le (5.10) e (5.11), dalla (5.2) discende immediatamente che:

$$\|\hat{\Phi}(t, t_0)\| < k_1 k_2 \quad \forall t \in T(t_0)$$

e, rispettivamente, dalla (5.7), che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{0}$$

Queste condizioni assicurano la stabilità (asintotica) dell'origine dello spazio di stato nella nuova rappresentazione.  $\triangleleft$

La Proposizione sopra enunciata esprime dunque una condizione sufficiente affinché si abbia invarianza delle proprietà di stabilità nell'ambito di una classe di rappresentazioni. Come si può osservare, la classe individuata è più ristretta di quella che si ottiene considerando tutte le rappresentazioni deducibili mediante trasformazioni di coordinate nello spazio di stato. Se, tuttavia, la rappresentazione assegnata è stazionaria e si vogliono prendere in considerazione soltanto rappresentazioni stazionarie, il risultato della Proposizione 5.7 può essere rinforzato nel modo seguente.

**Proposizione 5.2.** Sia data una rappresentazione lineare a dimensione finita stazionaria nella quale l'origine dello spazio di stato sia stabile (asintoticamente). In ogni altra rappresentazione stazionaria da essa dedotta mediante una trasformazione di coordinate l'origine dello spazio di stato è stabile (asintoticamente).

Prova. È conseguenza del fatto che, in questo caso, nella trasformazione di coordinate (5.8) la matrice  $\mathbf{T}(t)$  risulta indipendente da  $t$  e, pertanto, le (5.10) e (5.11) sono sicuramente soddisfatte.

## 1.6 - Il metodo di Lyapunov.

I risultati del paragrafo precedente consentono di stabilire se un'assegnata rappresentazione lineare sia stabile oppure no, a seconda che siano verificate o meno opportune condizioni sulla matrice di transizione dello stato. In molti problemi applicativi, tuttavia, una rappresentazione con lo spazio di stato può essere disponibile soltanto in forma implicita (l'equazione  $\mathbf{x}(t+1) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  nel caso di tempo-discreto o l'equazione  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  nel caso di tempo-continuo); in questo caso, per poter verificare se le condizioni di stabilità siano soddisfatte o meno, occorre preventivamente risolvere le equazioni che definiscono la rappresentazione in esame e dedurre così la forma esplicita della rappresentazione stessa. Considerazioni di questo genere giustificano immediatamente, da un punto di vista pratico, l'interesse a ricercare criteri che consentano di verificare la stabilità a partire da caratteristiche della funzione  $f(\dots)$  stessa, senza che sia necessario risolvere la corrispondente equazione<sup>(1)</sup>.

Il più noto di questi criteri è quello che va sotto il nome di metodo di Lyapunov; tale metodo verrà esposto in questo paragrafo con riferimento a rappresentazioni stazionarie a dimensione finita, regolari (nel caso di sistemi a tempo-continuo) anche se la sua validità è stata estesa a classi più generali di sistemi.

Rappresentazioni di questo genere sono individuate, nel caso di tempo-continuo, da una equazione del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

con  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n$ . Poiché ai fini dello studio della stabilità, si considera il caso in cui  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ , è abituale riscrivere l'equazione in esame nella forma:

$$(6.1) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

ed a questa si farà riferimento nel seguito.

Per poter presentare il teorema fondamentale di Lyapunov sulla stabilità è necessario introdurre preliminarmente alcuni concetti. Più precisamente, si consideri una funzione scalare del vettore di stato  $\mathbf{x}$ :

$$V(\mathbf{x})$$

(1) - I Teoremi 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, che sono riferiti a proprietà della matrice  $\mathbf{A}$ , potrebbero apparire criteri di stabilità che soddisfano alle esigenze sopra menzionate. In effetti essi fanno riferimento a proprietà degli autovalori di  $\mathbf{A}$ , la cui determinazione costituisce il primo e più importante passo nella soluzione della equazione ( $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  o  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ ); per tale motivo, di fatto, questi risultati vengono classificati tra le condizioni di stabilità relative a proprietà della forma esplicita di una rappresentazione.

e si supponga che questa funzione sia continua e derivabile (rispetto alle  $n$  componenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) in una regione  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  attorno al punto  $x_e$ . Per una funzione di questo tipo è abituale dare le seguenti:

**Definizione 6.1.** La funzione  $V(x)$  si dice definita positiva in  $S(x_e, r)$  se:

- a)  $V(x_e) = 0$   
 b)  $V(x) > 0$  ;  $x \neq x_e$  ,  $x \in S(x_e, r) = \{x : \|x - x_e\| \leq r\}$

cioè se  $V(x_e)$  è uguale a zero e se  $V(x)$  è positiva per tutti gli  $x$  diversi da  $x_e$  e contenuti nell'insieme  $S(x_e, r)$  (una sfera di centro  $x_e$  e raggio  $r$ ).  $\triangleleft$

In altri termini, si considera un particolare punto  $x_e$  dello spazio di stato ed, intorno a questo punto, una sfera di raggio  $r$ ; se la funzione  $V$  è nulla al centro della sfera e in tutti gli altri punti è maggiore di zero, si dice definita positiva in quella sfera.

**Definizione 6.2.** La funzione  $V(x)$  si dice definita negativa se  $-V(x)$  è definita positiva. Ciò vuol dire che  $V(x)$  in  $x_e$  è uguale a zero e negli altri punti di  $S(x_e, r)$  è minore di zero.

**Definizione 6.3.** La funzione  $V(x)$  si dice semidefinita positiva in  $S(x_e, r)$  se:

- a)  $V(x_e) = 0$   
 b)  $V(x) \geq 0$  ;  $x \neq x_e$  ,  $x \in S(x_e, r)$

La semidefinitezza è un vincolo più lasco; nel punto  $x_e$  la  $V(x)$  è ancora zero, mentre negli altri punti di  $S(x_e, r)$  è maggiore o uguale a zero.  $\triangleleft$

La definizione di funzione semidefinita negativa può essere data in modo analogo.

**Esempio.** Si supponga:

$$x_e = 0$$

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

e sia:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

allora la  $V(x)$  è chiaramente definita positiva intorno all'origine, perchè nell'origine si annulla e nell'intorno di esso assume valori solo positivi.

La stessa funzione, se si assume:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

è semidefinita positiva perchè si annulla non solo nell'origine, ma anche in qualsiasi punto dell'asse di  $x_3$ . Cioè si annulla per:

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$x_3 \neq 0$$

e negli altri punti è invece positiva.  $\triangleleft$

Se si considera ora soluzione  $x(\cdot)$  della equazione (6.1), la funzione:

$$(6.2) \quad V(x(t))$$

risulta una funzione reale della variabile reale  $t$ , continua e derivabile per ogni  $t$  tale che sia  $x(t) \in \Omega$ . La derivata della (6.2) rispetto al tempo si calcola semplicemente con la formula:

$$(6.3) \quad \frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t))$$

essendo  $f_i(x(t))$  la  $i$ -esima riga di  $f(x(t))$ . L'ultimo membro, anzichè funzione di  $t$ , può anche essere riguardato come funzione della sola  $x$ , ponendo:

$$(6.4) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \triangleq \dot{V}(x)$$

Alla  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , che è una funzione scalare del vettore  $\mathbf{x}$ , si possono ancora - ovviamente - riferire i concetti di definitezza positiva, ecc. presentati sopra.

Introdotta questa terminologia sulle funzioni si può enunciare il teorema di Lyapunov:

**Teorema 6.1.** Uno stato  $\mathbf{x}_e$  di equilibrio di una rappresentazione stazionaria a dimensione finita regolare è stabile se esiste una funzione  $V(\mathbf{x})$  definita positiva in un opportuno intorno  $S(\mathbf{x}_e, r)$  e tale che  $\dot{V}(\mathbf{x})$  sia semidefinita negativa nello stesso intorno.

**Commento.** Si tratta di un criterio sufficiente e non necessario. Se si riesce a trovare una funzione  $V(\mathbf{x})$  che soddisfa alle condizioni richieste allora lo stato  $\mathbf{x}_e$  è stabile; se non si riesce a trovare una tale funzione non ci si può pronunciare.

**Commento.** Ovviamente si può dare una formulazione del teorema con  $V(\mathbf{x})$  definita negativa e  $\dot{V}(\mathbf{x})$  semidefinita positiva: in altri termini è arbitrario il segno di partenza. <

**Prova.** Si presenterà una prova di tipo geometrico, limitata al caso  $n=2$ ; le considerazioni che vengono svolte hanno, tuttavia, validità generale.

Si consideri una funzione  $V(\mathbf{x})$  definita positiva in un intorno  $S(\mathbf{x}_e, r)$  e la corrispondente superficie  $V = V(x_1, x_2)$  nello spazio cartesiano  $(x_1, x_2, V)$  (cfr. fig.6.1).

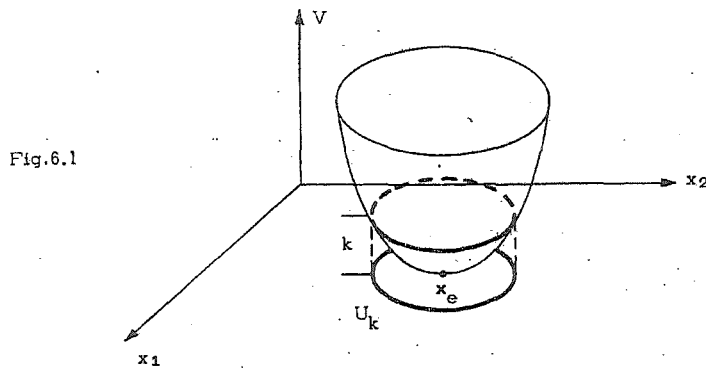


Fig.6.1

Intersecando tale superficie con piani perpendicolari all'asse  $V$ , definiti dalla equazione:

$$V = k$$

si ottengono delle curve le cui proiezioni sul piano  $(x_1, x_2)$  prendono il nome di linee di livello della funzione  $V(\mathbf{x})$ . Tali proiezioni possono essere formalmente rappresentate con la relazione:

$$U_k = \{ \mathbf{x} \in X : V(\mathbf{x}) = k \}$$

Essendo la funzione  $V(\mathbf{x})$  definita positiva, le linee di livello risultano chiuse, almeno per  $k$  sufficientemente piccolo, ed, inoltre, se  $k_1 < k_2$  la linea di livello relativa a  $k_1$  è interna a quella relativa a  $k_2$ . La situazione si presenta cioè come in fig.6.2.

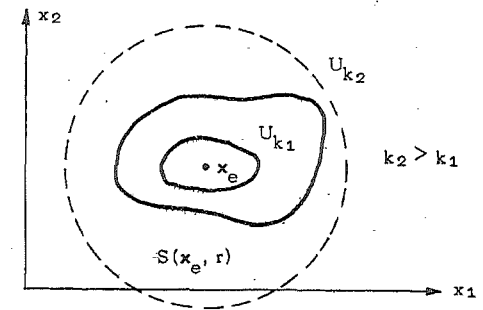


Fig.6.2

In base alla continuità della funzione  $V(\mathbf{x})$ , si può osservare che, fissato comunque un valore  $R_1$  compreso tra 0 ed  $r$  esiste certamente un valore  $k$  tale che la linea di livello  $U_k$  sia tutta interna ad  $S(\mathbf{x}_e, R_1)$  (basta considerare il valore minimo di  $V(\mathbf{x})$  sul contorno di  $S(\mathbf{x}_e, R_1)$  e prendere per  $k$  un valore ad esso inferiore). Inoltre, per il fatto che  $U_k$  è una curva chiusa che comprende  $\mathbf{x}_e$  al suo interno, è sempre possibile trovare un valore  $R_2$  tale che  $S(\mathbf{x}_e, R_2)$  sia tutta interna alla linea di livello  $U_k$ . Queste entità sono rappresentate nella fig.6.3.

Si consideri ora una traiettoria dello stato avente origine in un punto  $\mathbf{x}_0$  interno ad  $S(\mathbf{x}_e, R_2)$ . Calcolando i valori della funzione  $V(\mathbf{x})$  nei punti di questa traiettoria si ottiene

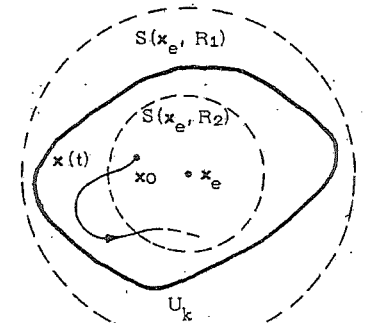


Fig.6.3

la funzione definita con la (6.2). Poichè la derivata rispetto al tempo di tale funzione è negativa o nulla (per ipotesi) per tutti i valori del tempo per cui  $\mathbf{x}(t) \in S(\mathbf{x}_e, r)$ , si deduce che, sul medesimo intervallo di tempo, la funzione  $V(\mathbf{x}(t))$  è non crescente. Grazie a questo fatto ed alla continuità di  $V(\mathbf{x}(t))$  rispetto a  $t$ , si può concludere che per ogni  $t$  la funzione  $V(\mathbf{x}(t))$  si mantiene inferiore ad  $U_k$  o, il che è lo stesso, che per ogni  $t$  lo stato  $\mathbf{x}(t)$  risulta interno ad  $S(\mathbf{x}_e, R_1)$ .

Si è così mostrato che, se  $V(\mathbf{x})$  è definita positiva e  $\dot{V}(\mathbf{x})$  è semi-definita negativa in  $S(\mathbf{x}_e, r)$ , allora:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < R_2 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < R_1 \quad \forall t \in T(t_0)$$

e, quindi, la stabilità di  $\mathbf{x}_e$ .  $\triangleleft$

Per quanto riguarda la stabilità asintotica, il teorema precedente viene rinforzato nel seguente modo:

**Teorema 6.2.** Uno stato  $\mathbf{x}_e$  di equilibrio di una rappresentazione stazionaria a dimensione finita regolare è stabile asintoticamente se esiste una funzione  $V(\mathbf{x})$  definita positiva in un opportuno intorno  $S(\mathbf{x}_e, r)$  di  $\mathbf{x}_e$  tale che  $\dot{V}(\mathbf{x})$  sia definita negativa nello stesso intorno.

**Prova.** Se  $\dot{V}(\mathbf{x})$  è definita negativa, la funzione (6.2) è di fatto decrescente lungo la traiettoria  $\mathbf{x}(t)$ ; poichè  $V(\mathbf{x}(t)) > 0$  per ogni  $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}_e$  in  $S(\mathbf{x}_e, r)$  si può allora asserire che, se  $\mathbf{x}_0 \in S(\mathbf{x}_e, R_2)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$$

Dall'ultima di queste uguaglianze, poichè in  $S(\mathbf{x}_e, r)$  la funzione  $\dot{V}(\mathbf{x})$  si annulla solo quando  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ , si può concludere che:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < R_2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$$

e cioè la quasi-stabilità asintotica di  $\mathbf{x}_e$ .  $\triangleleft$

L'utilità dei risultati stabiliti con i teoremi precedenti diviene concreta, sul piano applicativo, ove si sappia costruire, per il sistema in esame, una funzione  $V(\mathbf{x})$  che soddisfi alle condizioni previste per assicurare la stabilità o la stabilità asintotica. In effetti un notevole sforzo a livello di studio è stato fatto, e si continua a fare, allo scopo di fornire metodi per la costruzione di funzioni di questo genere (che prendono il nome di *funzioni di Lyapunov*). Parallelamente, si pone an-

che la domanda: se in una rappresentazione assegnata uno stato di equilibrio è stabile (o stabile asintoticamente) si può essere certi che almeno una funzione di Lyapunov esista? In effetti è stato dimostrato che, almeno nel caso di rappresentazioni stazionarie e a dimensione finita, la risposta a questa domanda è affermativa. Si può allora dire che l'esistenza di almeno una funzione di Lyapunov è condizione necessaria e sufficiente di stabilità.

Accanto ai teoremi di stabilità sono stati presentati anche teoremi di instabilità. Il più noto è il seguente:

**Teorema 6.3.** (Cetaev). Uno stato  $\mathbf{x}_e$  di equilibrio di una rappresentazione stazionaria a dimensione finita regolare è instabile se esiste una funzione  $V(\mathbf{x})$  tale che  $\dot{V}(\mathbf{x})$  sia definita positiva in un opportuno intorno  $S(\mathbf{x}_e, r)$  ed, inoltre, l'insieme dei punti nei quali  $V(\mathbf{x})$  assume valori positivi abbia  $\mathbf{x}_e$  come punto di accumulazione.

**Prova.** Il lettore interessato può consultare: V. Hahn, *Stability of Motion* (Springer, 1967), pag. 103.  $\triangleleft$

Prima di concludere il paragrafo è opportuno osservare che tutti i risultati enunciati in precedenza possono essere provati anche nel caso di rappresentazioni di sistemi a tempo-discreto, per le quali, in luogo della (6.1), andrà considerata l'equazione:

$$(6.5) \quad \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

I risultati rimangano inalterati purchè alla funzione (6.3) si sostituisca la funzione:

$$(6.6) \quad V(\mathbf{x}(t+1)) - V(\mathbf{x}(t)) = V[\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))] - V[\mathbf{x}(t)]$$

il che porta a considerare, in luogo della (6.4) la funzione:

$$(6.7) \quad \Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x})$$

$\Delta V$  si chiama *incremento*  
 $\Delta V$  si chiama *deficit*

### 1.7 - Applicazione del metodo di Lyapunov al caso di rappresentazioni lineari e stazionarie.

Si premettono alcune considerazioni. Una funzione  $V(\mathbf{x})$  si chiama forma quadratica omogenea se è del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

forma quadratica: semplice.

$$(7.1) \quad V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j$$

In tal caso la  $V(\mathbf{x})$  si può esprimere sinteticamente nel modo seguente:

$$(7.2) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

ove  $\mathbf{P}$  è una matrice avente per elementi i coefficienti  $p_{ij}$  della (7.1).

Se si considerano gli  $n^2$  termini che compaiono nella (7.1), figurano sia  $x_i x_j$  che  $x_j x_i$ , per cui si hanno termini del tipo:

$$p_{ij} x_i x_j + p_{ji} x_j x_i = (p_{ij} + p_{ji}) x_i x_j$$

Questo significa che, in realtà, della matrice  $\mathbf{P}$  non interessano i valori dei coefficienti, ma interessa solo la somma di quelli simmetrici rispetto alla diagonale. Quindi in particolare per definire una forma quadratica si possono prendere matrici simmetriche, con  $p_{ij} = p_{ji}$ .

Una matrice  $\mathbf{P}$  si dice definita (semidefinita) positiva se la funzione (7.2) è definita (semidefinita) positiva.

Per riconoscere se una matrice  $\mathbf{P}$  è definita positiva ci si può avvalere del seguente:

**Teorema 7.1 (Sylvester).** Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma quadratica del tipo (7.2), sia definita positiva, è che gli  $n$  minori:

$$D_1 = p_{11}$$

$$(7.3) \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \dots$$

della matrice  $\mathbf{P}$  siano tutti positivi.

**Commento.** In questo teorema si considera una matrice  $\mathbf{P}$  simmetrica. Se non è simmetrica la condizione è necessaria e non sufficiente.  $\triangleleft$

$$u_3 : S u_3 = \lambda u_3$$

$$\lambda (v_1^T X u_3 - v_2^T X u_3) = 0 = v_1^T T u_3$$

Si enuncerà ora un criterio necessario e sufficiente di stabilità asintotica, la cui dimostrazione - per quanto riguarda la sufficienza - si basa appunto sulla costruzione di una funzione di Lyapunov del tipo (7.2). Per la dimostrazione della necessità occorre premettere un risultato relativo alla soluzione delle equazioni lineari matriciali.

**Lemma 7.1.** Siano  $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$ , tre matrici  $n \times n$  ad elementi in  $\mathbb{C}$ . L'equazione:

$$(7.4) \quad \mathbf{R} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{S} = \mathbf{T}$$

nell'incognita matriciale  $\mathbf{X}$ , che ha dimensione  $n \times n$ , ammette soluzione unica se le due matrici  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{S}$  non hanno alcun autovalore in comune.  $\triangleleft$

**Teorema 7.2.** Sia data una rappresentazione:

$$(7.5) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$$

L'origine dello spazio di stato è stabile asintoticamente se e solo se, fissata comunque una matrice simmetrica  $\mathbf{P}$  definita positiva, l'equazione:

$$(7.6) \quad \mathbf{A}' \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = -\mathbf{P}$$

nell'incognita  $\mathbf{Q}$  ammette soluzione unica, simmetrica e definita positiva.

**Prova.** La condizione è sufficiente. Si supponga che, fissata  $\mathbf{P}$  simmetrica e definita positiva, la (7.6) ammetta soluzione unica, simmetrica e definita positiva  $\mathbf{Q}$ . Allora è definita positiva la funzione:

$$(7.7) \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

La funzione  $\dot{V}(\mathbf{x})$  risulta in questo caso data da:

$$(7.8) \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}}$$

Poichè si ha:



$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

$$\dot{x}'(t) = x'(t) A'$$

la (7.8) è pari a:

$$(7.9) \quad \dot{V}(x) = x' A' Q x + x' Q A x = x' (A' Q + Q A) x = -x' P x$$

ove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che vale la (7.6).

Siccome  $P$  è definita positiva per ipotesi, la funzione  $V(x)$  è definita negativa e quindi le ipotesi del Teorema di Lyapunov sono soddisfatte. Si può allora concludere che l'origine dello spazio di stato della rappresentazione (7.5) è stabile asintoticamente; in effetti la proprietà è globale in quanto la rappresentazione in questione è lineare (cfr. Proposizione (4.4)).

La condizione è necessaria. Si incominci con l'osservare che, se la rappresentazione in questione è stabile, gli autovalori di  $A$  hanno tutti parte reale negativa. In tal caso le matrici  $A'$  e  $-A$  non hanno autovalori in comune e quindi, grazie al Lemma 7.1, l'equazione (7.6) ammette soluzione unica. È facile constatare, per sostituzione diretta, che la matrice:

$$(7.10) \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A't} P e^{At} dt$$

$$Q A A' = \int_0^{\infty} e^{A't} P A e^{A't} dt A' = \int_0^{\infty} e^{A't} P e^{A't} dt - \int_0^{\infty} e^{A't} P e^{A't} dt = 0$$

(definibile in quanto l'integrando è continuo su  $[0, \infty)$  ed infinitesimo, per  $t \rightarrow \infty$ , di ordine superiore a qualsiasi potenza di  $t$ ) risolve detta equazione. Si ha infatti:

$$(7.11) \quad A' Q + Q A = \int_0^{\infty} A' e^{A't} P e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A't} P e^{At} A dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [e^{A't} P e^{At}] dt = [e^{A't} P e^{At}]_0^{\infty} = -P$$

Individuata così, con la (7.10), la soluzione unica della (7.6), per completare la prova basta mostrare che questa è definita positiva. In proposito si può osservare, con semplici passaggi, che:

$$(7.12) \quad x' Q x = \int_0^{\infty} x' e^{A't} P e^{At} x dt = \int_0^{\infty} z'(t) P z(t) dt \geq 0$$

in quanto, essendo per ipotesi  $P$  definita positiva, l'integrando  $z'(t) P z(t)$  è una funzione a valori sempre positivi.

**Commento.** Il precedente teorema fornisce un criterio di stabilità asintotica che opera direttamente su  $A$ . Si applica fissando una matrice arbitraria  $P$ , e vedendo se la (7.6) ammette soluzione unica, simmetrica e definita positiva. In pratica, per semplicità, si può assumere come matrice  $P$  la matrice identità. Risolvendo l'equazione matriciale (7.6) si ottiene un sistema in  $n(n+1)/2$  equazioni le cui incognite sono gli elementi di  $Q$ . Una volta ottenuti tali elementi, va ad essi applicato il teorema di Sylvester per stabilire se la  $Q$  è definita positiva o no. <

Si considererà ora un semplice esempio di applicazione di questo risultato.

**Esempio.** Sia data una rappresentazione lineare, a dimensione finita, stazionaria, con:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione matriciale:

$$A' Q + Q A = -P$$

ponendo  $P = I$  e:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix}$$

fornisce il seguente sistema:

$$\begin{aligned} -2q_{11} + 2q_{12} &= -1 \\ -3q_{12} + q_{22} &= 0 \\ q_{11} + q_{12} + q_{23} - 2q_{13} &= 0 \\ -4q_{22} &= -1 \\ q_{12} + q_{22} - 3q_{23} &= 0 \\ 2q_{13} + 2q_{23} - 2q_{33} &= -1 \end{aligned}$$

Tale sistema è immediatamente risolubile perchè triangolare e consente di trovare:

$$Q = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 21 & 3 & 14 \\ 3 & 9 & 4 \\ 14 & 4 & 36 \end{pmatrix}$$

Applicando a questa matrice il criterio di Sylvester si ottiene:

$$D_1 = 21$$

$$D_2 = 180$$

$$D_3 = 4/16$$

concludendo così che la matrice è definita positiva. Si può allora asserire, grazie al risultato del Teorema 7.2, che la rappresentazione è stabile asintoticamente. <

Nel caso di sistemi a tempo-discreto vale il seguente risultato analogo:

**Teorema 7.3.** Sia data una rappresentazione:

$$(7.13) \quad x(t+1) = Ax(t)$$

L'origine dello spazio di stato è stabile asintoticamente se e solo se, fissata comunque una matrice simmetrica P definita positiva, l'equazione:

$$(7.14) \quad A^T Q A - Q = -P$$

nell'incognita Q ammette soluzione unica, simmetrica e definita positiva.

**Prova.** Per provare la sufficienza, si applica il teorema di Lyapunov nella versione relativa a sistemi a tempo-discreto, usando, in luogo della funzione V(x), la (6.7). La prova è allora del tutto analoga a quella del teorema precedente.

Per provare la necessità, si può osservare che, se la rappresentazione data è stabile, comunque si fissi P definita positiva, la (7.14) ammette la soluzione (unica in base ad un risultato analogo a quello espresso dal Lemma 7.1):

$$(7.15) \quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k P A^k$$

(la verifica si effettua per sostituzione diretta). Inoltre, se P è definita positiva, anche Q lo è, come si può verificare facilmente costruendo la funzione:

$$(7.16) \quad x^T Q x = \sum_{k=0}^{\infty} x^T (A^T)^k P (A)^k x = \sum_{k=0}^{\infty} z^T(k) P z(k) > 0$$

### 1.8 - Criteri di Routh e di Jury.

Il criterio di Routh è un criterio per stabilire se le radici di un assegnato polinomio d(λ) sono tutte con parte reale negativa. Esso può evidentemente essere applicato al polinomio caratteristico:

$$d(\lambda) = |\lambda I - A|$$

per la verifica della stabilità asintotica di una rappresentazione lineare e stazionaria di un sistema a tempo-continuo.

All'esposizione di tale criterio è conveniente premettere una condizione necessaria, che assume la forma seguente:

le radici del polinomio:

$$(8.1) \quad d(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

hanno tutte parte reale negativa solo se gli n+1 coefficienti α<sub>0</sub>, α<sub>1</sub>, ..., α<sub>n-1</sub>, α<sub>n</sub> hanno tutti lo stesso segno.

Se la verifica prevista da questa condizione risulta soddisfatta, è allora possibile passare al criterio di Routh vero e proprio.

Questo criterio si esprime con riferimento al segno degli elementi della prima colonna della seguente tabella:

$\alpha_n$	$\alpha_{n-2}$	$\alpha_{n-4}$	...
$\alpha_{n-1}$	$\alpha_{n-3}$	$\alpha_{n-5}$	...
$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	...	...
$c_{n-3}$	$c_{n-5}$	...	...
.....			

nella quale gli elementi delle prime due righe sono formati con i coefficienti del polinomio (8.1), quelli della terza si ottengono dalle due righe precedenti con le formule:

$$(8.2) \quad b_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} = \frac{-1}{\alpha_{n-1}} \begin{vmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-4} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} = \frac{-1}{\alpha_{n-1}} \begin{vmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-5} \end{vmatrix}$$

.....

$$b_{n-2k} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2k} - \alpha_n \alpha_{n-2k-1}}{\alpha_{n-1}} = \frac{-1}{\alpha_{n-1}} \begin{vmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-2k} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2k-1} \end{vmatrix}$$

quelli della quarta riga si costruiscono a partire dalla seconda e dalla terza con formule perfettamente analoghe e così via per le righe successive.

Si intende che nello schema non figurano elementi che non possono essere calcolati con le (8.2) o analoghe, come avviene, ad esempio, per la terza riga in corrispondenza alla posizione  $n+1/2$  (per  $n$  dispari) o  $n+2/2$  (per  $n$  pari).

Le formule (8.2) cadono in difetto quando il denominatore è zero e, cioè, quando il primo elemento di una riga è nullo. In questo caso la tabella non si può continuare (cfr. più innanzi circa la possibilità di costruire tabelle complete quando le (8.2) cadono in difetto).

A ciascuna riga dello schema così costruito conviene associare un indice, uguale al pedice del suo primo elemento ( $n$  per la prima,  $n-1$  per la seconda ecc.); è facile constatare che la riga  $i$ -esima è composta di  $(i+2)/2$  o di  $(i+1)/2$  elementi (a seconda che  $i$  sia pari o dispari); l'ultima riga, quella di indice 0, ha un solo elemento; le righe sono quindi  $n+1$ .

La regola che ora si esporrà non si altera se tutti i coefficienti di una generica riga sono moltiplicati per una stessa costante positiva, ciò che può essere fatto allo scopo di avere valori numerici più maneggevoli ovvero per semplificare il calcolo delle (8.2) moltiplicandole ad esempio per il valore assoluto del denominatore.

Inoltre la regola rimane valida se si opera un cambiamento di scala della variabile passando ad un polinomio nella variabile  $\lambda' = K\lambda$ .

Fatte queste precisazioni il criterio può essere enunciato nel modo seguente<sup>(1)</sup>:

- condizione necessaria e sufficiente affinché gli zeri del polinomio (8.1) abbiano tutti parte reale negativa è che, supposto  $\alpha_n > 0$  tutti gli  $n+1$  elementi della prima colonna della tabella siano positivi.

Si mette in evidenza il fatto che questa condizione implica che la tabella possa essere completata e, cioè, che non si incontri il caso degenerare di un elemento nullo nella prima colonna (in caso contrario, infatti, non si disporrebbe di tutti gli  $n+1$  elementi cui applicare la regola).

L'algoritmo di Routh, che porta alla costruzione della tabella, oltre a fornire gli elementi per la verifica della stabilità, secondo il criterio ora esposto, consente nel caso di instabilità di ottenere indicazioni sul numero di radici con parte reale positiva e sulle eventuali radici simmetriche rispetto all'origine (immaginarie coniugate, reali opposte o a quaterne simmetriche).

A questo proposito si può anzitutto osservare che se la tabella può venire completata (e, cioè, non si incontra il caso degenerare di elementi nulli nella prima colonna) si può escludere l'esistenza di radici con parte reale nulla ed il numero delle radici con parte reale positiva è dato dal numero delle variazioni di segno che si presentano nella prima colonna della tabella.

Se la tabella non può essere completata conviene distinguere due casi. Uno è quello in cui è nullo il primo elemento di una riga ma non tutti gli altri elementi della riga stessa; in questo caso si può costruire la tabella per un polinomio ottenuto da quello di partenza moltiplicando per il fattore  $(\lambda+z)$  (con  $z$  positivo); a questo polinomio la regola delle variazioni di segno risulta generalmente applicabile e fornisce indicazioni complete sul polinomio di partenza, in quanto il numero di radici con parte reale positiva è rimasto inalterato passando al nuovo polinomio; un altro metodo consiste nel sostituire all'elemento nullo una quantità  $\epsilon$  infinitesima e nel proseguire la costruzione della tabella applicando poi agli elementi della sua prima colonna la regola sopra esposta.

L'altro caso è quello in cui sono nulli tutti gli elementi di una riga. In questo caso il polinomio di partenza è il prodotto di un polinomio  $P_1(\lambda)$ , sulla parte reale delle cui radici si ottengono indicazioni dai segni degli elementi della prima colonna della tabella costruita fino

(1) - La prova del criterio di Routh può essere dedotta a partire dal metodo di Lyapunov. Il lettore interessato può consultare L. Schwarz, B. Friedland, *Linear Systems* (Mc Graw Hill, 1965), pagg. 413-416.

alla riga nulla, e di un polinomio  $P_2(\lambda)$ , in cui figurano solamente potenze pari e che si costruisce moltiplicando gli elementi della riga precedente quella nulla per potenze di  $\lambda$  uguali al loro pedice; detto, cioè, l'indice (necessariamente dispari) della riga costituita da elementi tutti nulli e detti  $\alpha_{i+1}$ ,  $\alpha_{i-1}$ ,  $\alpha_{i-3}$  ecc. gli elementi della riga precedente, il polinomio  $P_2$  è:

$$P_2(\lambda) = \alpha_{i+1} \lambda^{i+1} + \alpha_{i-1} \lambda^{i-1} + \alpha_{i-3} \lambda^{i-3} + \dots + \alpha_0$$

Il polinomio  $P_2$ , come tutti quelli costituiti da sole potenze pari, ha radici a due opposte (quindi a coppie di immaginarie coniugate o a quaterne aventi parti reali e immaginarie dello stesso valore assoluto e con tutte le quattro combinazioni di segno); se il polinomio  $P_2$  è di grado basso (2 o 4) se ne possono trovare facilmente le radici (la situazione si verifica, ad esempio, in corrispondenza al caso, non raro, di una coppia di radici immaginarie coniugate); comunque, in generale, è possibile stabilire quante sono le sue radici con parte reale positiva contando le variazioni di segno che si presentano a partire dalla riga  $i$ -esima della prima colonna della tabella, completata sostituendo agli elementi della riga nulla i coefficienti del polinomio che si ottiene derivando  $P_2$ .

**Esempi.** Si daranno ora alcuni esempi di applicazione di quanto sopra presentato.

Per ogni esempio è riportata, accanto al polinomio, la tabella di Routh con l'indicazione a sinistra dell'indice di ciascuna riga ed a destra del fattore per il quale tutti gli elementi della riga stessa sono stati divisi; ad ogni esempio segue inoltre una breve illustrazione.

a) caso del polinomio  $\lambda^5 + 8\lambda^4 + 25\lambda^3 + 40\lambda^2 + 34\lambda + 12$

5	1	25	34	(1)
4	2	10	3	(4)
3	20	32,5		(1)
2	6,75	3		(1)
1	23,61			(1)
0	3			(1)

Tutte le radici hanno parte reale negativa.

b) caso del polinomio  $\lambda^5 + 7\lambda^4 + 17\lambda^3 + 17\lambda^2 + 36\lambda + 30$

5	1	17	36	(1)
4	7	17	30	(1)
3	14,57	3,17		(1)
2	225,5	437,1		(14,57)
1	-5653,6			(1)
0	437,1			(1)

Si hanno due variazioni di segno nella prima colonna e quindi 2 radici hanno parte reale positiva e 3 parte reale negativa.

c) caso del polinomio  $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$$

4	1	1	1
3	1	1	
2	0	1	

Le radici non sono tutte con parte reale negativa; si può anche dire che non si hanno coppie di radici simmetriche rispetto all'origine. Per calcolare il numero delle radici con parte reale positiva, si può sostituire a zero una quantità  $\epsilon$  sufficientemente piccola, ottenendo.

4	1	1	1
3	1	1	
2	$\epsilon$	1	
1	$\frac{\epsilon-1}{\epsilon}$		
0	1		

Se  $\epsilon > 0$ ,  $(\epsilon-1)/\epsilon < 0$  (supponendo  $\epsilon < 1$ ), si hanno quindi due variazioni che si osservano per  $\epsilon \rightarrow 0$ ; considerazioni analoghe val-

gono per  $\epsilon < 0$ . Dunque si hanno due radici con parte reale positiva e due con parte reale negativa.

Allo stesso risultato si può pervenire analizzando un polinomio ottenuto moltiplicando quello dato per un altro polinomio le cui radici abbiano posizione nota sul piano  $\lambda$ . Scelto per quest'ultimo ad esempio il binomio  $\lambda + 2$  in modo che il nuovo polinomio sia:

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

si ha:

5	1	3	3
4	3	3	2
3	2	7/3	
2	-1/2	2	
1	31/3		
0	2		

Si hanno due variazioni di segno e quindi due radici con parte reale positiva. Una delle tre radici con parte reale negativa è evidentemente quella del binomio  $\lambda + 2$ .

d) caso del polinomio  $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$

5	1	1	1
4	1	1	1
3	0	0	

La riga di indice 3 ha tutti gli elementi nulli; questo fatto denuncia la presenza di quattro radici a due a due simmetriche rispetto all'origine. Il polinomio  $P_1$ , di grado 1, ha la radice con parte reale negativa non essendoci variazioni di segno fra i primi elementi delle righe di indice 5 e 4.

Per quanto riguarda il polinomio  $P_2$ , le sue radici possono essere determinate direttamente risolvendo la:

$$P_2 = p^4 + p^2 + 1 = 0$$

Le radici risultano:

$$\pm \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si hanno quindi due radici con parte reale positiva. Quest'ultimo risultato si può ottenere anche completando la tabella dopo aver sostituito agli elementi della riga di indice 3 i coefficienti della derivata di  $P_2$ ; si ottiene in tal caso la tabella

5	1	1	1
4	1	1	1
3	4	2	
2	1/2	1	
1	-6		
0	1		

che presenta appunto due variazioni dopo la riga 3. <

Il criterio di Jury è un criterio per stabilire se le radici di un assegnato polinomio  $d(\lambda)$  sono tutte con modulo inferiore ad uno. Esso può evidentemente essere applicato al polinomio caratteristico per la verifica della stabilità asintotica di una rappresentazione lineare e stazionaria di un sistema a tempo-discreto.

Tale criterio comporta la costruzione di una tabella del tipo:

$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	...	$\alpha_{n-2}$	$\alpha_{n-1}$	$\alpha_n$
$\alpha_n$	$\alpha_{n-1}$	$\alpha_{n-2}$	$\alpha_{n-3}$	...	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_0$
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	...	$b_1$	$b_0$	
$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{n-2}$		
$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	...	$c_0$		
.....							
$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$				
$s_3$	$s_2$	$s_1$	$s_0$				
$t_0$	$t_1$	$t_2$					
$t_2$	$t_1$	$t_0$					

dove:

$$(8.3) \quad b_0 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & \alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad b_k = \begin{vmatrix} \alpha_p & \alpha_{n-k} \\ \alpha_n & \alpha_k \end{vmatrix}$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}, \quad \text{ecc.}$$

Ciò posto, condizione necessaria e sufficiente perchè le radici di  $d(\lambda)$  abbiano modulo minore di 1 è che sia:

$$(8.4) \quad d(1) > 0$$

$$(-1)^n d(-1) > 0$$

ed inoltre:

$$(8.5) \quad |\alpha_n| > |\alpha_0|$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|$$

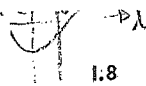
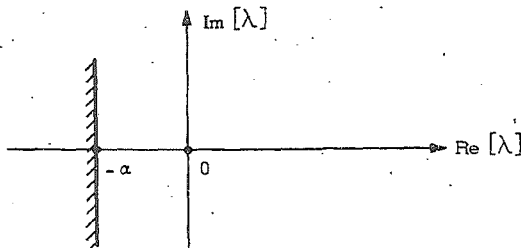
$$\vdots$$

$$|t_0| > |t_2|$$

**Commento.** I criteri di stabilità esposti sopra possono essere utilizzati, con varianti più o meno immediate, anche per risolvere altri problemi relativi all'alocazione (sul piano complesso) degli autovalori di una matrice  $A$  o delle radici di un polinomio  $d(\lambda)$ .

Per esempio, si potrebbe considerare il caso in cui si desidera verificare se le radici sono a sinistra di un asse che si trova a distanza  $a$  dall'asse immaginario (v. fig.8.1).

Fig.8.1



Questo problema ha un interesse notevole perchè non solo permette di dire che tutti i modi naturali tendono a zero per  $t$  tendente all'infinito, ma anche che il modo meno smorzato, quello cioè che tende più lentamente a zero, è un modo cui è associata una legge temporale del tipo  $e^{-at}$  (con costante di tempo  $1/a$ ). Questo in certe applicazioni tecniche può essere interessante: ad esempio quando si richiede che gli effetti dei disturbi agenti in un sistema decadano con una sufficiente rapidità. Il criterio di Routh permette di risolvere immediatamente questo problema senza nessuna complicazione. Basta infatti porre nel polinomio (8.1) al posto di  $\lambda$ , la quantità  $\lambda - a$  e studiare il polinomio risultante:

$$(8.6) \quad d(\lambda - a) = (\lambda - a)^n + a_{n-1}(\lambda - a)^{n-1} + \dots + a_0$$

con il suddetto criterio. Lo stesso risultato può essere peraltro conseguito utilizzando l'equazione matriciale di Lyapunov (7.6) con  $A + aI$  in luogo di  $A$ .

Un altro problema interessante è quello di stabilire se le radici sono contenute nella zona indicata in fig.8.2.

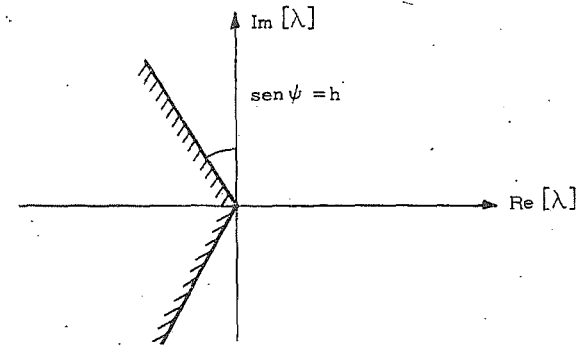


Fig.8.2

Questo caso corrisponde a imporre che i modi pseudoperiodici abbiano un coefficiente di smorzamento non inferiore ad un certo valore  $\zeta$ . Mentre nel caso di fig.8.1 si possono avere coefficienti di smorzamento sia grandi che molto piccoli, ora, nel caso di fig.8.2, si impone un vincolo ben definito sullo smorzamento dei modi pseudoperiodici. Anche questo caso può essere trattato mediante opportuna applicazione del criterio di Routh, verificando se le radici del polinomio:

$$\lambda_1^i e^{+j\psi} = \lambda_i \quad \lambda_k^i e^{-j\psi} = \lambda_k$$

$$(8.7) \quad d(\lambda e^{j\psi}) d(\lambda e^{-j\psi})$$

nell'incognita  $\lambda$ , abbiano tutte parte reale negativa oppure no.

È infatti immediato constatare che, se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  sono le radici di  $d(\lambda)$ , le radici del polinomio (8.7) saranno rispettivamente  $\lambda_1 e^{-j\psi}, \lambda_1 e^{+j\psi}, \lambda_2 e^{-j\psi}, \lambda_2 e^{+j\psi}, \dots, \lambda_r e^{-j\psi}, \lambda_r e^{+j\psi}$ . Queste ultime risulteranno con parte reale negativa se e solo se le radici di  $d(\lambda)$  sono comprese nel settore indicato in fig. 8.2.

### 1.9 - Analisi della stabilità di rappresentazioni non-lineari per mezzo dell'approssimazione lineare.

È molto diffusa sul piano pratico l'abitudine a ricondurre lo studio della proprietà di stabilità locale (intorno ad un punto di equilibrio o ad un moto) all'analisi della stabilità di una rappresentazione linearizzata. Il metodo di Lyapunov fornisce alcuni importanti risultati generali sui limiti di validità di questa procedura, dando le condizioni nelle quali dalle proprietà di stabilità della rappresentazione linearizzata si possono inferire proprietà di stabilità locali della rappresentazione originaria.

Per introdurre il concetto di rappresentazione linearizzata associata ad una data rappresentazione non-lineare, si consideri il caso in cui questa ultima - supposta regolare - sia assegnata in forma implicita mediante l'equazione differenziale:

$$(9.1) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

e si assuma che  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  sia dotata di derivate parziali prime continue rispetto alle componenti di  $\mathbf{x}$ . Sia inoltre  $\mathbf{x}_e$  uno stato di equilibrio, cioè uno stato che soddisfa la relazione:

$$(9.2) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$$

Definendo un cambiamento di variabile:

$$(9.3) \quad \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$$

e considerando lo sviluppo di  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  in serie di Taylor attorno al punto  $\mathbf{x}_e$ , dalla (9.1) si può scrivere, per ciascuna delle componenti di  $\boldsymbol{\xi}(t)$ :

$$(9.4) \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}_i(t) = [\mathbf{f}(\mathbf{x}_e)]_i + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} \cdot \xi_j(t) + h_i(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\xi}(t))$$

avendo indicato con  $h_i(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\xi})$  una espressione opportuna del resto dello sviluppo in serie.

Le derivate parziali delle funzioni  $f_i(\mathbf{x})$  rispetto alle componenti  $x_j$  di  $\mathbf{x}$  possono essere ordinate nella matrice quadrata:

$$(9.5) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

che prende il nome di matrice Jacobiana della funzione  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ; anche essa è, in generale, una funzione di  $\mathbf{x}$ . Tenendo ora presente la (9.2) e ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$  nella (9.5) si ha, dalla (9.4):

$$(9.6) \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\xi}(t))$$

Se si assume ora che il resto presente nella (9.6) sia una funzione di  $\boldsymbol{\xi}$  infinitesima, per  $\|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0$ , di ordine superiore a  $\|\boldsymbol{\xi}\|$  e cioè che sia:

$$(9.7) \quad \lim_{\|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\xi})\|}{\|\boldsymbol{\xi}\|} = 0$$

è ragionevole assumere che, se  $\boldsymbol{\xi}(t)$  si mantiene in norma piccola (cioè tale che la quantità  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\xi}(t))$  si possa ritenere trascurabile rispetto a  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_e) \boldsymbol{\xi}(t)$  nella (9.6)), alla (9.6) stessa si possa sostituire l'espressione:

$$(9.8) \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) \boldsymbol{\xi}(t)$$

che può essere interpretata come forma implicita di una rappresentazione lineare, a dimensione finita, stazionaria.

La (9.8) prende il nome di rappresentazione linearizzata associata alla (o linearizzazione della) rappresentazione non-lineare (9.1). Per il modo in cui è stata dedotta, si può concludere che la rappresentazione linearizzata è in grado di fornire una descrizione approssimata delle evoluzioni dello stato relative alla rappresentazione data e che questa approssimazione è tanto più valida quanto più l'evoluzione stessa si mantiene in un intorno sufficientemente ristretto dello stato di equilibrio  $x_e$ .

Utilizzando la rappresentazione linearizzata è possibile stabilire un certo numero di risultati a proposito della stabilità. Il primo di questi concerne i punti di equilibrio ed è espresso dal seguente:

**Teorema 9.1.** Se la matrice Jacobiana  $J(x_e)$  è non singolare, lo stato di equilibrio  $x_e$  è isolato.

**Prova.** Se  $x_e$  non fosse isolato allora, fissato comunque un intorno di  $x_e$  esisterebbero in esso valori  $x'_e$  tali da annullare la funzione  $f(x)$ . Se è valida la (9.8), dovrebbero allora esistere valori  $\xi'_e = x'_e - x_e$  tali da soddisfare la:

$$0 = J(x_e) \xi'_e$$

il che sarebbe vero solo se  $J(x_e)$  fosse singolare. Di conseguenza, se  $J(x_e)$  non è singolare, tali valori non possono esistere ed  $x_e$  è un punto di equilibrio isolato.  $\triangleleft$

**Commento.** Si noti che non è in generale vera la proprietà inversa: può accadere infatti che se  $x_e$  è isolato,  $J(x_e)$  è singolare. A questo proposito si può esaminare il seguente caso:

$$\dot{x}_1 = x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = x_2$$

in cui l'unico stato di equilibrio è  $x_e = (0,0)$  mentre

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{x=x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è singolare.  $\triangleleft$

Il risultato del teorema precedente è interessante in quanto, come è noto, si può avere stabilità asintotica per un punto di equilibrio, solo se questo è un punto isolato. L'uso delle rappresentazioni linearizzate consente peraltro di ottenere anche risultati di maggior interesse ai fini dello studio della stabilità. Questi sono basati sui seguenti:

**Teorema 9.2.** La stabilità asintotica dell'origine dello spazio di stato nella rappresentazione linearizzata implica la stabilità asintotica locale dello stato  $x_e$  nella rappresentazione originaria.

**Prova.** È basata sull'applicazione del Teorema 7.2. Si consideri una forma quadratica, nella variabile  $\xi$ , del tipo:

$$(9.9) \quad V(\xi) = \xi' Q \xi$$

e si calcoli la funzione  $\dot{V}(\xi)$  corrispondente all'equazione (9.6). Si ha allora:

$$(9.10) \quad \dot{V}(\xi) = \xi' [J'(x_e) Q + Q J(x_e)] \xi + h'(x_e, \xi) Q \xi + \xi' Q h(x_e, \xi)$$

Se la rappresentazione linearizzata è stabile, esiste certamente (vedi Teorema 7.2) una matrice  $Q$  tale che sia:

$$(9.11) \quad \xi' Q \xi > 0 \quad , \quad \text{per} \quad \xi \neq 0$$

$$(9.12) \quad \xi' [J'(x_e) Q + Q J(x_e)] \xi < 0 \quad , \quad \text{per} \quad \xi \neq 0$$

D'altra parte, se vale la (9.7), il secondo e terzo addendo nella (9.10) sono infinitesimi (per  $\|\xi\| \rightarrow 0$ ) di ordine superiore a  $\|\xi\|^2$  mentre il primo addendo è infinitesimo dello stesso ordine di  $\|\xi\|^2$ . Ne consegue che esiste certamente un intorno  $S(0, r)$  del punto  $\xi = 0$  (cioè del punto  $x = x_e$  rispetto alla variabile originaria) in cui il segno della (9.10) coincide con il segno del primo addendo a secondo membro. Tenendo allora presente le (9.11) e (9.12) si può concludere che la (9.9) è una funzione di Lyapunov per la rappresentazione in esame, il che completa la prova.  $\triangleleft$

**Teorema 9.3.** Se la rappresentazione linearizzata è instabile a causa del fatto che  $J(x_e)$  ha almeno un autovalore con parte reale positiva, allora nella rappresentazione originaria lo stato di equilibrio  $x_e$  è instabile.



**Prova.** È analoga a quella del Teorema precedente.

**Commento.** L'enunciato del Teorema 9.3 non può essere esteso sostituendo alla ipotesi che  $J(x_e)$  abbia almeno un autovalore con parte reale negativa l'ipotesi, più debole, che la rappresentazione linearizzata sia stabile. Se si assumesse questa nuova ipotesi  $J(x_e)$  potrebbe avere anche non avere autovalori con parte positiva ed avere autovalori con parte reale nulla di molteplicità geometrica non unitaria. In tal caso l'equazione matriciale di Lyapunov corrispondente alla rappresentazione linearizzata non ammetterebbe soluzione e, quindi non sarebbe più possibile ricorrere all'impiego del Teorema 7.2 così come indicato nella prova precedente.  $\triangleleft$

Per illustrare questi risultati è utile esaminare alcuni esempi:

**Esempio.** Si desidera studiare la stabilità degli stati di equilibrio della seguente rappresentazione:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 - x_2^2 - x_3$$

Gli stati di equilibrio sono i seguenti:

$$x_{e1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{e2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{e3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{e4} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiana assume l'espressione:

$$J(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & -1 \end{pmatrix}$$

ed i suoi autovalori risultano essere  $2x_1, -2x_2, -1$ .

In corrispondenza ad  $x_{e1}, x_{e3}, x_{e4}$  almeno uno degli autovalori è positivo; pertanto, grazie al Teorema 9.3, si conclude che lo stato di equilibrio è instabile. Nel caso  $x_{e2}$ , viceversa, tutti gli autovalori so-

no negativi e ciò, grazie al Teorema 9.2, assicura la stabilità locale dello stato di equilibrio.  $\triangleleft$

I teoremi 9.2 e 9.3 non contemplano il verificarsi del caso in cui, nella rappresentazione linearizzata, la matrice  $J(x_e)$  non ha autovalori con parte reale positiva ma ha qualche autovalore con parte reale nulla. Tale situazione può corrispondere sia ad un caso in cui la rappresentazione linearizzata è stabile ma non asintoticamente (gli autovalori di  $J(x_e)$  con parte reale nulla hanno molteplicità geometrica unitaria) sia ad un caso in cui la rappresentazione linearizzata è instabile (gli autovalori di  $J(x_e)$  con parte reale nulla hanno molteplicità geometrica non unitaria). Questo caso prende il nome di caso critico e non può essere studiato mediante il ricorso alla rappresentazione linearizzata; per avere indicazioni sulla stabilità è opportuno cercare di applicare i teoremi di Lyapunov direttamente sulla rappresentazione originaria.

**Esempio.** Sia data la rappresentazione:

$$\dot{x}_1 = \gamma x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = \lambda x_2$$

con  $\lambda < 0$ . La matrice jacobiana, calcolata nell'unico stato di equilibrio  $x_e = (0, 0)$  assume l'espressione:

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} 3\gamma x_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}_{x=x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ed ha un autovalore nullo. Si è quindi in presenza di un caso critico.

Si consideri allora la forma quadratica:

$$V(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 - \gamma x_2^2)$$

in corrispondenza alla quale si ha:

$$\dot{V}(x) = \gamma x_1^4 - \gamma \lambda x_2^2$$

Se  $\gamma < 0$ , risulta  $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$  per ogni  $x \neq 0$ ; di conseguenza, per il Teorema 6.2, lo stato  $x_e$  è stabile asintoticamente. Se

viceversa  $\gamma > 0$  risulta  $\dot{V}(x) > 0$  per ogni  $x \neq 0$  e  $V(x) > 0$  per lo meno nei punti della retta  $x_2 = 0$  (escluso l'origine); lo stato di equilibrio è allora punto di accumulazione di punti in cui  $V(x) > 0$  e quindi, per il Teorema 6.3, è instabile.  $\triangleleft$

### 1.10 - Le regioni di stabilità asintotica.

È stato già osservato nel paragrafo 1.3 che il concetto di stabilità asintotica di un punto di equilibrio esprime una proprietà *locale*; la definizione stessa, in particolare, specifica che se un punto di equilibrio è stabile asintoticamente esiste un intorno sferico di raggio  $\delta_a$  del punto per il quale si verifica che tutte le traiettorie aventi origine al suo interno convergono, per  $t \rightarrow \infty$ , al punto di equilibrio stesso.

Dal punto di vista applicativo è spesso molto importante sapere non solo che esiste *almeno un intorno* sferico di  $x_e$  che gode di questa proprietà ma anche individuare, se possibile, il luogo di tutti i punti dello spazio di stato a partire dai quali le traiettorie convergono verso  $x_e$ . Tale insieme è già stato indicato come *regione di stabilità asintotica* associata allo stato di equilibrio  $x_e$ .

In effetti, in taluni casi è possibile individuare precisamente la regione di stabilità asintotica di uno stato di equilibrio mentre in altri, poichè la determinazione precisa potrebbe implicare calcoli di notevole complessità, si preferisce determinarne una approssimazione per difetto. All'esame di alcune di queste situazioni è dedicato il presente paragrafo.

In proposito, è utile considerare innanzitutto il seguente:

**Teorema 10.1** (La Salle). Sia data una funzione  $V(x)$  e sia  $\Omega_l$  il luogo dei punti in cui  $V(x) < l$ .

Si supponga inoltre  $\Omega_l$  limitata e che sia:

$$V(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \Omega_l, \quad x \neq x_e$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in \Omega_l, \quad x \neq x_e$$

Allora lo stato di equilibrio  $x_e$  è stabile asintoticamente ed ogni traiettoria che ha origine all'interno di  $\Omega_l$  converge ad  $x_e$  per  $t \rightarrow \infty$ .

**Prova.** È sostanzialmente basata sugli stessi argomenti adatti nelle Prove dei Teoremi 6.1 e 6.2. La frontiera della regione  $\Omega_l$  coincide, per definizione, con la linea di livello  $V_l$  e, per l'ipotesi di limitatezza di

$\Omega_l$ , è una linea chiusa. Sulla base di questa considerazione è immediato dedurre, applicando gli stessi argomenti già utilizzati in precedenza, che una traiettoria avente origine in  $\Omega_l$  converge, per  $t \rightarrow \infty$ , ad  $x_e$ .  $\triangleleft$

Si darà ora un semplice esempio di applicazione di questo criterio.

**Esempio.** Si consideri la rappresentazione:

$$\dot{x}_1 = x_1(x_2^2 - 1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_1^2 - 1)$$

per la quale i punti di equilibrio sono:

$$x_0 = (0,0), \quad x_1 = (1,1), \quad x_2 = (1,-1), \quad x_3 = (-1,1), \quad x_4 = (-1,-1)$$

Il punto  $x_0$  è stabile asintoticamente in quanto la matrice jacobiana:

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} x_2^2 - 1 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 - 1 \end{pmatrix}_{x=x_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori negativi.

Si vuole determinare una approssimazione della regione di stabilità del punto  $x_0$  (la quale, per ovvie ragioni, non conterrà i punti  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ).

Considerata una funzione:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = \\ &= 2x_1^2(x_2^2 - 1) + 2x_2^2(x_1^2 - 1) = -2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1^2x_2^2) \end{aligned}$$

La funzione  $V(x_1, x_2)$  è definita positiva in tutto il piano.

La funzione  $\dot{V}(x_1, x_2)$  è definita negativa per valori di  $(x_1^2 + x_2^2)$  sufficientemente piccoli (potendosi in tal caso trascurare la quantità  $4x_1^2 x_2^2$ ), ma non per tutti i valori di  $(x_1, x_2)$ .

È peraltro abbastanza facile, data la simmetria rispetto ad  $x_1$  ed  $x_2$ , valutare il luogo dei punti in cui  $V(x_1, x_2)$  è nulla. Dall'equazione:

$$-2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1^2 x_2^2) = 0$$

posto:

$$\xi = x_1^2 - \frac{1}{2}, \quad \eta = x_2^2 - \frac{1}{2}$$

si ha:

$$-2(\xi + \eta + 1) + 4\left(\xi\eta + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{4}\right) = 4\xi\eta - 1 = 0$$

Quest'ultima equazione rappresenta, nel piano  $(\xi, \eta)$ , una iperbole riferita agli assi. Di conseguenza è facile concludere, sulla base delle trasformazioni di coordinate sopra introdotte, che i luoghi in cui  $\dot{V}(x_1, x_2)$  è nulla assumono la forma indicata in fig.10.1.

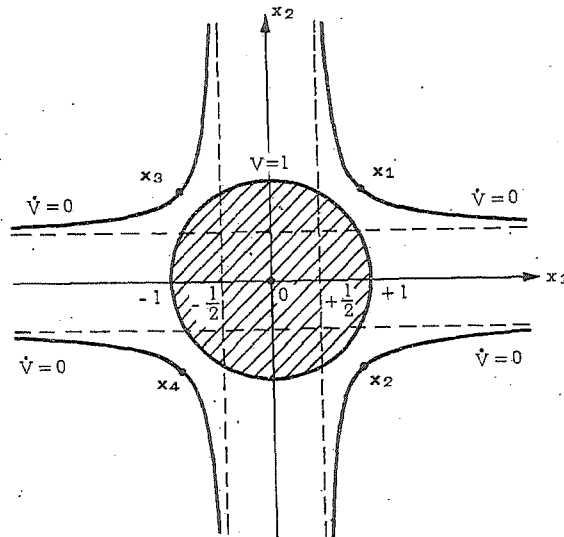


Fig.10.1

La linea di livello:

$$V(x_1, x_2) = 1$$

coincide con il cerchio avente centro in  $(0,0)$  e raggio unitario. Poiché al suo interno  $V(x_1, x_2)$  è definita positiva e  $V(x_1, x_2)$  è definita negativa, si può concludere che essa delimita un insieme contenuto nella regione di stabilità.  $\triangleleft$

Oltre al risultato espresso dal Teorema 10.1, che consente una valutazione per difetto della regione di stabilità, sono anche disponibili risultati che consentono una valutazione esatta. Il più importante di essi è quello espresso dal Teorema seguente:

**Teorema 10.2** (Zubov). Se esiste una funzione  $V(\mathbf{x})$  continua e dotata di derivate parziali prime con le seguenti proprietà:

a)  $V(\mathbf{x})$  è definita in un dominio semplicemente connesso  $\Omega$  contenente al suo interno il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e$ ;

b)  $V(\mathbf{x}_e) = 0$ ;

c)  $0 < V(\mathbf{x}) < 1$ , per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$  interno ad  $\Omega$ ;

d)  $V(\mathbf{x}) = 1$  nei punti di frontiera di  $\Omega$  e, inoltre, se  $\Omega$  è illimitato  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = 1$ ;

e)  $V(\mathbf{x})$  risolve, in corrispondenza ad almeno una funzione  $W(\mathbf{x})$  positiva per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$  e nulla per  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ , l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$(10.1) \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -W(\mathbf{x}) \cdot (1 - V(\mathbf{x})) \sqrt{1 + \|f(\mathbf{x})\|^2}$$

allora  $\Omega$  coincide con la regione di stabilità relativa ad  $\mathbf{x}_e$ .

**Commento.** Il criterio contenuto nel Teorema precedente si basa sulla individuazione di una coppia di funzioni  $V(\mathbf{x})$  e  $W(\mathbf{x})$  per le quali sia possibile verificare l'uguaglianza (10.1). Se ciò è possibile, il luogo dei punti in cui  $V(\mathbf{x}) = 1$  fornisce la frontiera della regione di stabilità.

Come si è precisato nell'enunciato la (10.1) è una equazione alle derivate parziali nell'incognita  $V(\mathbf{x})$ , come è immediato constatare osservando che il primo membro assume la forma (6.4).

Si noti infine che una funzione  $V(\mathbf{x})$  che soddisfi le ipotesi del Teorema è certamente una funzione di Lyapunov.  $V(\mathbf{x})$  è infatti positi-

va per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$  interno ad  $\Omega$  mentre la funzione  $V(\mathbf{x})$ , in base alla espressione che risulta dal secondo membro della (10.1), è negativa per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$  interno ad  $\Omega$ ; quest'ultima proprietà è conseguenza del fatto che  $W(\mathbf{x})$  è positiva per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$ , che  $(1 - V(\mathbf{x}))$  è positiva per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$  interno ad  $\Omega$  e che  $\sqrt{1 + \|f(\mathbf{x})\|^2}$  è positiva per ogni  $\mathbf{x}$ . Il Teorema afferma dunque che la linea di livello corrispondente al valore 1 per la funzione di Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  è la frontiera della regione di stabilità.

**Prova.** Il lettore interessato può consultare: W. Hahn, *Stability of Motion* (Springer, 1967), pagg. 161-165. <

A titolo di applicazione è utile considerare il seguente:

**Esempio.** Sia data la rappresentazione:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

in cui il solo punto di equilibrio è  $\mathbf{x}_e = (0,0)$ . Quest'ultimo è stabile in quanto la matrice jacobiana:

$$J(\mathbf{x}_e) = \begin{pmatrix} -1 & 2x_1^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori negativi.

Scegliendo:

$$W(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{1 + \|f(\mathbf{x})\|^2}}$$

si ottiene per  $V(\mathbf{x})$  l'equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} (-x_1 + 2x_1^2 x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-x_2) = -(x_1^2 + x_2^2) (1 - V)$$

È facile verificare, per sostituzione, che la soluzione di questa equazione assume l'espressione:

$$V(x_1, x_2) = 1 - \exp \left[ -\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2(1 - x_1 x_2)} \right]$$

Si osservi ora che la funzione  $V(x_1, x_2)$  assume valori unitari nei punti del piano in cui è  $x_1 x_2 = 1$ , cioè lungo le due iperboli equilateri indicate in fig.10.2. Risulta inoltre:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(x_1, x_2) = 1$$

Nella zona compresa tra le due iperboli (zona tratteggiata) l'argomento della funzione  $\exp [ \ ]$  nella  $V(x_1, x_2)$  assume valori negativi, il che implica che la funzione stessa assume valori inferiori ad 1. La funzione  $V(x_1, x_2)$  soddisfa allora in tale regione le condizioni previste dal Teorema 10.2.

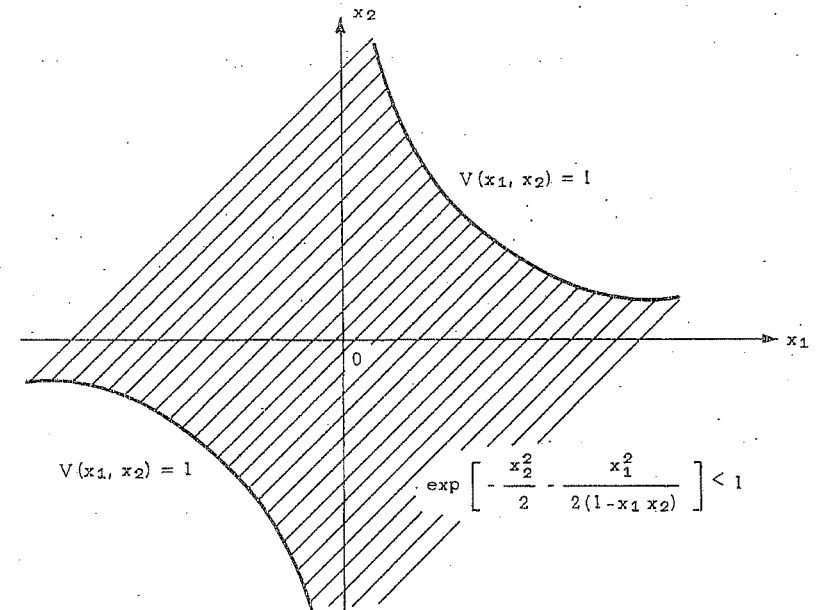


Fig.10.2

Poichè peraltro  $W(\mathbf{x})$  è definita positiva in tutto  $X$ , si può concludere che tutte le condizioni previste dal Teorema 6.2 sono soddisfatte e che la zona tratteggiata di fig.10.2 coincide con la regione di stabilità del punto di equilibrio.

Accanto ai metodi che consentono di valutare la regione di stabilità asintotica, nel caso di stabilità locale, esistono anche criteri che consentono di stabilire in quali casi la stabilità è globale (in quali casi, cioè, la regione di stabilità asintotica coincide con l'intero spazio di stato). Il più semplice e noto di questi criteri è il seguente:

**Teorema 10.3.** Sia data una funzione  $V(\mathbf{x})$  che goda delle seguenti proprietà:

a)  $V(\mathbf{x}) > 0$  per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$ ,  $V(\mathbf{x}_e) = 0$ ;

b)  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$ ,  $\dot{V}(\mathbf{x}_e) = 0$ ;

c)  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$

Allora il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  è stabile asintoticamente globalmente.

**Prova.** È ancora conveniente riferirsi ad una prova di tipo geometrico. Se:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$$

ogni linea di livello è una linea chiusa (se ciò non fosse, esisterebbe una direzione lungo la quale, per  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , la funzione  $V(\mathbf{x})$  tenderebbe ad un valore finito). È allora possibile utilizzare ancora gli stessi argomenti già esposti nelle prove dei Teoremi 6.1 e 6.2 per concludere che ogni traiettoria avente origine all'interno di un'arbitraria linea di livello  $U_k$  tende ad  $\mathbf{x}_e$  per  $t \rightarrow \infty$ . Poiché  $U_k$  è arbitraria ne consegue la stabilità asintotica globale di  $\mathbf{x}_e$ .

**Esempio.** Sia data la rappresentazione:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3$$

che ammette il solo punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0,0)$ .

Sceglia una funzione:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

si ottiene:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_2^4$$

Poiché  $V(x_1, x_2)$  è definita positiva in tutto  $X$ ,  $\dot{V}(x_1, x_2)$  è definita negativa in tutto  $X$  e:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(x_1, x_2) = \infty$$

l'origine dello spazio di stato è stabile asintoticamente globalmente.  $\triangleleft$

Un altro risultato di notevole interesse per lo studio della stabilità asintotica globale è il seguente:

**Teorema 10.4 (Krasovskii).** Sia data una rappresentazione del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$$

e si supponga  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  dotata di derivate parziali prime continue. Se esiste una costante  $\alpha > 0$  tale che, per ogni  $\mathbf{x}$ , gli autovalori della matrice:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}'(\mathbf{x})$$

a vale per  $\forall \mathbf{x}$   
e non  $\alpha(\mathbf{x})$

abbiano parte reale inferiore a  $-\alpha$ , allora lo stato di equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  è stabile asintoticamente globalmente.

**Prova.** Il lettore interessato può consultare: W.Hahn, *Stability of Motion* (Springer, 1967), pag.135.

**Esempio.** Sia data la rappresentazione:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

che ammette l'origine come unico punto di equilibrio. Si calcoli ora la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}'(\mathbf{x})$  prevista nell'enunciato del Teorema 10.4; si ottiene:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2-6x_2^2 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico vale:

$$d(\lambda, \mathbf{x}) = (\lambda + 6)(\lambda + 2 + 6x_2^2) - 4 = \lambda^2 + (8 + 6x_2^2)\lambda + (8 + 36x_2^2)$$

Per individuare se esiste una costante  $\alpha$  che soddisfa il criterio di Krasovckii, conviene utilizzare le osservazioni svolte nel Commento alla fine del par.8. Si tratta allora di vedere se esiste  $\alpha > 0$  tale che  $d(\lambda - \alpha, x)$  abbia le radici con parte reale negativa per ogni valore di  $x$ . Poichè:

$$d(\lambda - \alpha, x) = \lambda^2 + [8 + 6x_2^2 - 2\alpha] \lambda + [8 + 36x_2^2 + \alpha^2 - (8 + 6x_2^2)\alpha]$$

particolarizzando il criterio di Routh al caso di un polinomio di secondo grado, si conclude che la condizione può essere soddisfatta se e solo se esiste  $\alpha > 0$  per il quale sia:

$$8 + 6x_2^2 - 2\alpha > 0$$

$$8 + 36x_2^2 + \alpha^2 - (8 + 6x_2^2)\alpha > 0$$

Scegliendo per esempio  $\alpha = 1$ , tali disequaglianze si riducono alle:

$$6 + 6x_2^2 > 0$$

$$1 + 30x_2^2 > 0$$

che sono soddisfatte per ogni  $x$ . Si può allora concludere che per ogni  $x$  gli autovalori di  $J(x) + J'(x)$  hanno parte reale inferiore a  $-1$  e, per il Teorema 10.4, che lo stato  $x_e = 0$  è stabile asintoticamente globalmente.

### 1.11 - La stabilità «esterna» nelle rappresentazioni lineari.

Accanto al tipo di stabilità presentato nei paragrafi precedenti, basato sulla considerazione della risposta nello stato in evoluzione libera, è usuale introdurre anche uno basato sulla considerazione della risposta nell'uscita in evoluzione forzata. Più precisamente, si considera il comportamento in evoluzione forzata corrispondente a stati iniziali arbitrari e ad ingressi limitati e, sostanzialmente, si richiede che, in tale situazione, le corrispondenti risposte in uscita si mantengano anch'esse limitate. Per tale motivo è usuale riferirsi a questo tipo di stabilità con la denominazione «stabilità ingresso-limitato uscita-limitata»; per brevità qui si userà la dizione di stabilità esterna.

BIBO

Più precisamente, si consideri un sistema descritto dalla funzione di transizione dello stato (2.1') e dalla trasformazione di uscita (2.1''). tale sistema si dice stabile esternamente se, comunque si sceglie un  $M > 0$  e comunque si sceglie il valore  $x_0$  assunto dallo stato all'istante  $t_0$ , esiste un numero  $N > 0$ , eventualmente dipendente da  $M$  da  $x_0$  e da  $t_0$ , tale che, se la funzione ingresso è limitata da  $M$  per tutti i  $t \geq t_0$ , allora la corrispondente funzione di uscita risulta limitata da  $N$  per tutti i  $t \geq t_0$ , quale che sia lo stato iniziale  $x_0$ . In formule, dunque:

$$(11.1) \quad \forall M > 0, \quad \forall x_0 \in X, \quad \exists N_{M, x_0, t_0} > 0 :$$

$$\|u(t)\| < M, \quad \forall t \in T(t_0) \Rightarrow \|y(t)\| < N_{M, x_0, t_0}, \quad \forall t \in T(t_0)$$

dove con  $y(t)$  si è indicata la risposta in uscita corrispondente all'ingresso  $u$  ed allo stato iniziale  $x(t_0) = x_0$ .

Una proprietà di stabilità esterna più debole di quella definita sopra, si ottiene se nella relazione precedente si suppone che il valore dello stato iniziale sia fissato. In questo ambito è particolarmente interessante riferirsi alla situazione in cui  $x_0 = 0$ ; si parla in tal caso di stabilità esterna, nello stato zero. In formule, la condizione (11.1) diviene:

$$(11.2) \quad \forall M > 0, \quad \exists N_{M, t_0} > 0 :$$

$$\|u(t)\| < M, \quad \forall t \in T(t_0) \Rightarrow \|y(t)\| < N_{M, t_0}, \quad \forall t \in T(t_0)$$

se con  $y(t)$  si indica questa volta la risposta in uscita corrispondente all'ingresso  $u$  ed allo stato iniziale  $x(t_0) = 0$ .

Si passerà ora a dare condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità esterna di una rappresentanza lineare, a dimensione finita, stazionaria, di un sistema a tempo-continuo. Indicata con:

$$(11.3) \quad y(t) = \Psi(t) x_0 + \int_0^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

la risposta in uscita di tale sistema si può dimostrare il seguente:

**Teorema 11.1.** Una rappresentazione lineare, a dimensione finita, stazionaria è stabile esternamente se e solo se:

a) esiste una costante  $k_1 > 0$  tale che:

$$(11.4) \quad \|\Psi(t)\| < k_1 \quad \forall t \geq 0$$

b) esiste una costante  $k_2 > 0$  tale che:

$$(11.5) \quad \int_0^t \|\mathbb{W}(\tau)\| d\tau < k_2 \quad \forall t \geq 0$$

Prova. Per provare che tale condizione è sufficiente, si osservi che, dalla (11.3) si ha, per ogni  $t \geq 0$ ,

$$(11.6) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &\leq \|\Psi(t) \mathbf{x}_0\| + \left\| \int_0^t \mathbb{W}(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \|\Psi(t)\| \cdot \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t \|\mathbb{W}(t-\tau)\| \cdot \|\mathbf{u}(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

Se ora risulta:

$$(11.7) \quad \|\mathbf{u}(t)\| < M \quad \forall t \geq 0$$

dalle (11.4) e (11.5), si ha:

$$(11.8) \quad \|\mathbf{y}(t)\| \leq k_1 \|\mathbf{x}_0\| + k_2 M$$

e cioè la condizione espressa dalla (11.1), con  $N_{M, \mathbf{x}_0} = k_1 \|\mathbf{x}_0\| + k_2 M$ .

Per la prova della necessità della (11.4) si osservi che, se essa non è valida, esiste almeno un elemento di  $\Psi(t)$ , ad esempio quello di posto  $(i, k)$ , che è illimitato. Di conseguenza, scegliendo  $\mathbf{x}_0$  come nella prova del Teorema (5.1) ed  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ ,  $\forall t \geq 0$ , si ottiene una uscita illimitata.

Per la prova della necessità della (11.5) si osservi che, se essa non è valida, comunque si fissi un numero  $k > 0$  esiste un  $T$  (dipendente da  $k$ ) tale che:

$$(11.9) \quad \int_0^T \|\mathbb{W}(\tau)\| d\tau > k$$

Scegliendo come norma di  $\mathbb{W}(\tau)$  l'espressione:

$$(11.10) \quad \|\mathbb{W}(\tau)\| = \max_i \sum_{j=1}^p |w_{ij}(\tau)|$$

risulta:

$$(11.11) \quad \int_0^T \max_i \sum_{j=1}^p |w_{ij}(\tau)| d\tau > k$$

Di conseguenza, per almeno un valore di  $i$ , sia esso  $h$ , si ha:

$$(11.12) \quad \int_0^T \sum_{j=1}^p |w_{hj}(\tau)| d\tau > k$$

Si consideri ora un ingresso  $\mathbf{u}(\cdot)$  tale che sia<sup>(1)</sup>:

$$(11.13) \quad \begin{aligned} u_j(\tau) &= \operatorname{sgn} w_{hj}(T-\tau) \quad , \quad 0 \leq \tau \leq T \\ u_j(\tau) &= 0 \quad , \quad \tau \geq T \end{aligned}$$

La componente  $h$ -esima della risposta (11.3) a partire dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , assume, all'istante  $T$ , il valore:

$$(11.14) \quad \begin{aligned} y_h(T) &= \int_0^T \sum_{j=1}^p w_{hj}(T-\tau) u_j(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^p |w_{hj}(T-\tau)| d\tau = \int_0^T \sum_{j=1}^p |w_{hj}(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Per la (11.12) si ha allora:

$$(11.15) \quad y_h(T) > k$$

Essendo  $k$  arbitrario, tale disuguaglianza prova che  $\mathbf{y}(\cdot)$  non è limitata su  $[0, \infty)$ . Poichè l'ingresso cui essa corrisponde soddisfa invece la limitazione:

(1).- La funzione  $\operatorname{sgn} x$  è definita nel modo seguente:

$\operatorname{sgn} x = -1$ ,  $x < 0$ ;  $\operatorname{sgn} x = 0$ ,  $x = 0$ ;  $\operatorname{sgn} x = 1$ ,  $x > 0$

$$(11.16) \quad \|u(\tau)\| \leq 1 \quad \forall \tau \geq 0$$

risulta provato che, se la (11.5) non è soddisfatta, il sistema non è stabile esternamente.  $\triangleleft$

*Commento.* Da questa stessa prova si deduce immediatamente che un sistema lineare stazionario è stabile esternamente nello stato zero se e solo se vale la condizione (b).  $\triangleleft$

Tenendo ora presente il legame tra le matrici  $\Psi(t)$ ,  $W(t)$  e le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  che caratterizzano una rappresentazione implicita del sistema in esame è possibile dare una diversa caratterizzazione delle condizioni (a) e (b) di stabilità esterna. Infatti, in tal caso le trasformate di Laplace delle funzioni  $\Psi(t)$  e  $w(t)$  sono funzioni razionali proprie di  $s$ . È allora facile constatare che:

**Corollario 11.1.** Una rappresentazione lineare, a dimensione finita, stazionaria è stabile esternamente se e solo se:

a) tutti i poli semplici di  $\Psi(s)$  hanno parte reale non positiva e tutti quelli multipli hanno parte reale negativa;

b) tutti i poli di  $W(s)$  hanno parte reale negativa.

La condizione (b) è da sola necessaria e sufficiente per la stabilità esterna nello stato zero.  $\triangleleft$

La verifica di queste condizioni è una conseguenza diretta delle espressioni delle antitrasformate delle funzioni razionali.

Per la stabilità esterna nello stato zero è possibile dare anche un'ulteriore caratterizzazione, accanto a quelle espresse dalle due condizioni (b) di cui sopra. Si può infatti facilmente provare che esse sono entrambe equivalenti alla condizione che il limite di  $\|W(t)\|$  per  $t \rightarrow \infty$  sia 0. Per la verifica basta riferirsi, ad esempio, alla condizione sui poli di  $W(s)$ . Se  $W(s)$  ha solo poli con parte reale negativa, ne consegue che  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t)\| = 0$ ; se quest'ultima relazione è vera, viceversa,  $W(s)$ , che è una funzione razionale, ha tutti i poli con parte reale negativa. Riassumendo queste varie osservazioni, per comodità del lettore, si può affermare:

**Corollario 11.2.** Una rappresentazione lineare, a dimensione finita, stazionaria, è stabile esternamente nello stato zero se e solo se e solo se una qualunque delle tre seguenti condizioni è soddisfatta:

- esiste una costante  $k > 0$  tale che:

$$(11.17) \quad \int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < k \quad \forall t \geq 0$$

- tutti i poli della matrice delle funzioni di trasferimento hanno parte reale negativa:

- la matrice delle risposte impulsive ammette il limite:

$$(11.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t)\| = 0 \quad \triangleleft$$

Prima di concludere il paragrafo è interessante analizzare i legami che sussistono tra i due tipi di stabilità esterna sopra introdotti. Discende direttamente dalle definizioni che una rappresentazione stabile esternamente è anche stabile esternamente nello stato zero. In generale non è vero il viceversa; questo tuttavia si verifica se la rappresentazione in questione è raggiungibile, come si può constatare con la seguente dimostrazione per assurdo.

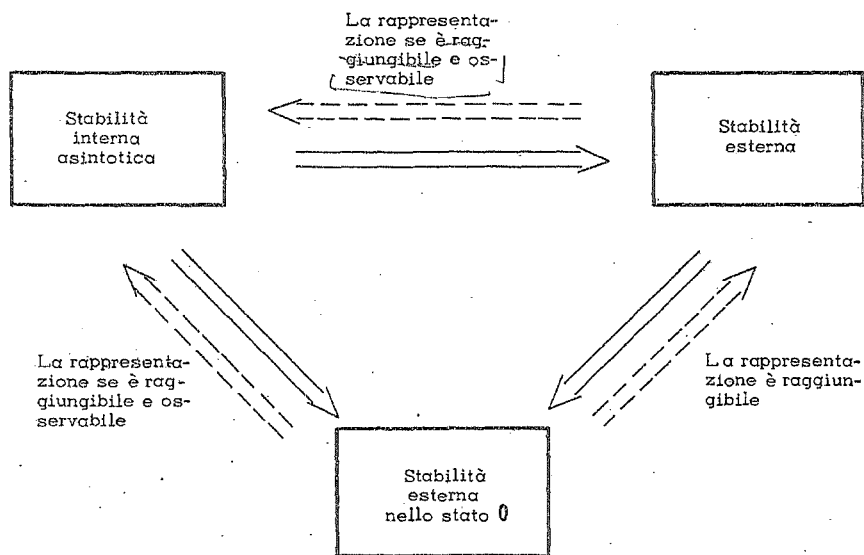


Fig. 11.1



Si supponga che una rappresentazione sia raggiungibile, stabile esternamente nello stato zero e non stabile esternamente. Per un tale sistema risulta verificata la condizione (b) [cfr. (11.5)], ma non la (a) [cfr. (11.4)], cioè almeno un elemento della matrice  $\Psi(t)$ , quello di posto  $(i, k)$ , è illimitato. Di conseguenza la risposta in uscita in evoluzione libera a partire dallo stato iniziale  $x_0$  scelto come nella prova del Teorema (5.1) è illimitata. Essendo però, per ipotesi, tale stato raggiungibile, esistono un istante finito  $T > 0$  ed un ingresso limitato  $u^*$  che trasferisce l'origine  $0$  dello spazio di stato in  $x_0$  all'istante  $T$ . Se si considera quindi il particolare ingresso limitato:

$$(11.19) \quad u(t) = \begin{cases} u^*(t) & , 0 \leq t \leq T \\ 0 & , T < t \end{cases}$$

la corrispondente risposta in uscita a partire dallo stato  $x_0 = 0$  coincide, per  $t \geq T$ , con quella in evoluzione libera a partire dallo stato  $x_0$  all'istante  $T$  ed è perciò illimitata. Dunque ad un ingresso limitato (ed a stato iniziale  $0$ ) corrisponde un'uscita illimitata e quindi la rappresentazione è instabile esternamente nello stato zero. Ciò contrasta con l'ipotesi e prova quanto asserito.

Per chiarezza, i legami tra i due tipi di stabilità esterna sono evidenziati in fig. 11.1.

### 1.12 - Sulle proprietà di stabilità interna delle realizzazioni di una matrice di risposte impulsive.

Si è più volte messo in evidenza che talune rappresentazioni possono essere descritte in modo completo dalla matrice delle risposte impulsive; si è anche chiarito il significato in cui ciò va inteso e si sono precisate le condizioni (raggiungibilità e osservabilità) sotto le quali ciò si verifica.

Si è mostrato, d'altra parte, nel paragrafo precedente, che le condizioni affinché un sistema sia stabile esternamente nello stato zero coinvolgono la sola matrice delle risposte impulsive. Talora anzi si sottolinea questo fatto attribuendo direttamente la proprietà di stabilità alla stessa matrice delle risposte impulsive e si dice che  $W(t)$  è stabile o instabile a seconda che soddisfa o no ad una delle tre condizioni elencate alla fine del paragrafo precedente.

Appare allora interessante il problema di esaminare se dalle proprietà di stabilità esterna nello stato zero (ossia, dalla stabilità di  $W(t)$ )

si possono dedurre informazioni sulle proprietà di stabilità interna. È evidente, per quanto detto all'inizio, che tale problema è ben posto solo con riferimento alla classe delle rappresentazioni raggiungibili e osservabili.

Il risultato che si può stabilire in proposito è il seguente: *le realizzazioni minime di una matrice  $W(t)$  stabile caratterizzano una rappresentazione asintoticamente stabile, internamente.* Talora si enuncia questo risultato anche dicendo che *nelle rappresentazioni raggiungibili e osservabili, la stabilità esterna nello stato zero implica quella interna asintotica.*

Per dimostrare questo risultato si osservi che, se  $W(t)$  è una matrice di risposte impulsive realizzabile esistono tre matrici  $A, B, C$  tali che:

$$(12.1) \quad C e^{At} B = W(t) \quad \forall t \in R$$

D'altra parte, l'ipotesi di stabilità di  $W(t)$  implica la validità della (11.18) o, il che è lo stesso:

$$(12.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$$

Da quest'ultima, tenendo presente la (12.1), si deduce anche che:

$$(12.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^i W(t)}{dt^i} = 0 \quad i \geq 0$$

*Handwritten notes:*  
 $f(t) = \frac{1}{t} \sin t^2$   
 $f'(t) = 2 \cos t^2 + \frac{1}{t^2}$

Tenuto conto ancora della (12.1) e posto  $i = h + k$  si ha poi:

$$(12.4) \quad \frac{d^i W(t)}{dt^i} = C A^i e^{At} B = C A^h e^{At} A^k B$$

dove l'ultimo passaggio è consentito dal fatto che  $A$  ed  $e^{At}$  commutano.

Si consideri ora la matrice:

$$(12.5) \quad S(t) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} e^{At} (B \ A \ B \ \dots \ A^{n-1} \ B) = Q e^{At} P$$

in cui simboli  $Q$  e  $P$ , introdotti per brevità, sono di ovvia interpretazione. Le (12.3) e (12.4) implicano allora:

$$(12.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$$

Se la terna  $A, B, C$  costituisce una realizzazione minima, essa individua una rappresentazione raggiungibile ed osservabile. Di conseguenza il primo fattore a secondo membro nella (12.5) ha le  $n$  colonne linearmente indipendenti e così il terzo fattore ha le  $n$  righe linearmente indipendenti. Si può quindi isolare  $e^{At}$  nel modo seguente:

$$(12.7) \quad e^{At} = [Q' Q]^{-1} Q' S(t) P' [PP']^{-1}$$

A questo punto la (12.6) implica:

$$(12.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

e cioè, per i risultati stabiliti nel paragrafo 7, la stabilità asintotica della rappresentazione associata alla realizzazione minima  $A, B, C$ . Essendo tutte le realizzazioni minime una classe di equivalenze rispetto ad una trasformazione di coordinate nello spazio di stato, tale proprietà di stabilità interna è valida per qualunque di esse.

Tenendo ora conto che la (12.8) implica sempre la (12.2) (la stabilità asintotica interna implica sempre la stabilità di  $W(t)$ ) si può riassumere quanto discusso sopra nel diagramma di fig. 11.1. In esso, per completezza, sono anche indicati i legami tra stabilità interna asintotica e stabilità esterna. L'implicazione della prima verso la seconda è conseguenza del fatto che la (12.8), oltre ad implicare la (12.2) implica anche la limitatezza di  $\Psi(t) = C e^{At}$ .

Il legame tra stabilità esterna e stabilità interna asintotica si può dedurre dai lati inferiori del diagramma stesso.

\*

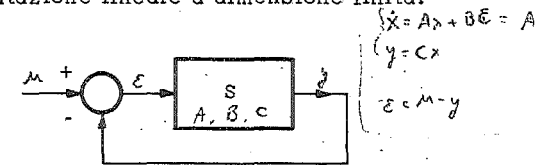
## CAPITOLO II

### STABILITA' DELLE RAPPRESENTAZIONI DI SISTEMI INTERCONNESSI (rappresentazioni lineari).

#### 11.1 - Considerazioni introduttive.

Lo scopo di questa introduzione è quello di mostrare che, nello studio della stabilità asintotica di un sistema interconnesso, nel caso in cui le singole parti siano dotate di rappresentazioni lineari a dimensione finita e le interconnessioni siano anch'esse lineari, è sempre possibile e talora conveniente ridursi allo studio della stabilità di un sistema interconnesso avente la struttura indicata in fig. 1.1, nella quale  $S$  è un sistema dotato di rappresentazione lineare a dimensione finita.

Fig. 1.1



A tale scopo è sufficiente osservare che un generico sistema interconnesso del tipo precisato è sempre rappresentabile mediante un grafo di flusso, nel quale ciascun nodo individua una variabile (eventualmente anche vettoriale) e ciascun ramo individua un sistema (eventualmente assegnato mediante una rappresentazione con lo spazio di stato).

Per passare da un grafo assegnato alla struttura di fig. 1.1 è sufficiente individuare i cicli chiusi presenti nel grafo e procedere poi ad effettuare tutte le operazioni di taglio di nodo che sono necessarie per passare dal grafo assegnato ad uno privo di cicli chiusi. Il grafo così ottenuto presenta allora, in generale, la struttura indicata in fig. 1.2, nella quale, accanto alle variabili di ingresso e di uscita  $u$  ed  $y$  sono

state esplicitate, per ciascuno dei nodi-tagliati, una variabile  $s_i$  associata alla relativa sorgente ed una variabile  $p_i$  associata alla relativa pozzo. Alla struttura così individuata si può dare una descrizione più compatta aggregando in un'unica variabile  $s$  le variabili  $s_i$  ed in un'unica variabile  $p$  le variabili  $p_i$ . Si può cioè pensare ad una struttura del tipo indicato (con il simbolismo degli schemi a blocchi anziché dei grafi di flusso) in fig.1.3.

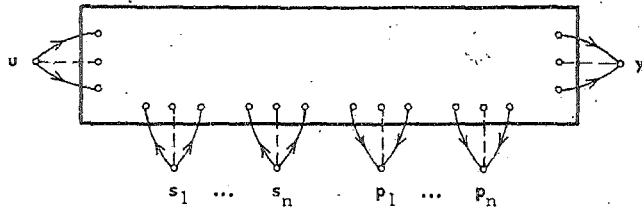


Fig.1.2

Per ritornare da questa struttura a quella originaria è sufficiente ripristinare le connessioni interrotte con il taglio dei nodi e cioè, con riferimento al simbolismo adottato in fig.1.3, istituire un legame unitario tra la variabile  $p$  e la variabile  $s$  (vedi fig.1.4).

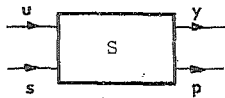


Fig.1.3

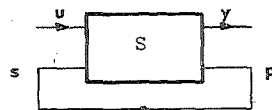


Fig.1.4

Il passaggio da un grafo di flusso generico ad una struttura avente la forma indicata in fig.1.4 è in genere conveniente in quanto ciò comporta la semplificazione del problema di determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema interconnesso a partire dalle rappresentazioni ingresso stato uscita delle singole parti. Il sistema indicato con  $S$  in fig.1.4 è infatti privo, per ipotesi, di cicli chiusi; una sua rappresentazione ingresso-stato-uscita si determina allora molto facilmente definendo come vettore di stato per  $S$  il vettore che si ottiene aggregando i vettori di stato delle singole parti e individuando poi i parametri della rappresentazione sulla base di una semplice ispezione delle rappresentazioni delle singole parti e delle relazioni di interconnessione.

Tutto quanto precede può essere ulteriormente chiarito considerando un semplice:

**Esempio.** Sia dato il sistema interconnesso indicato in fig.1.5 e siano:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$$

$$y_i = C_i x_i$$

le rappresentazioni con lo spazio di stato delle singole parti.

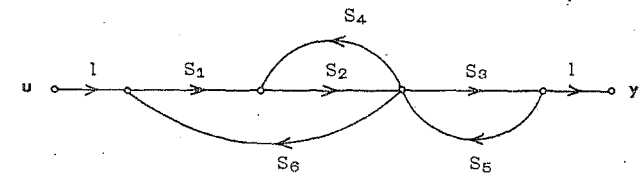


Fig.1.5

Procedendo al taglio dei nodi per eliminare i cicli chiusi si perviene al grafo di fig.1.6.

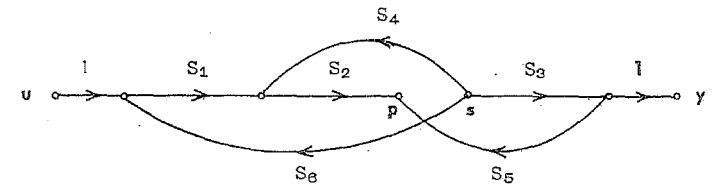
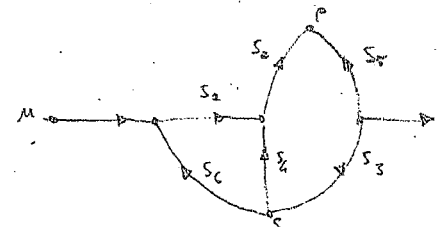


Fig.1.6

Il sistema associato al grafo di fig.1.6 secondo la struttura di fig.1.3 è allora descritto da una rappresentazione ingresso-stato-uscita del tipo:



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 \cdot C_6 \\ B_2 \cdot C_1 & A_2 & 0 & B_2 \cdot C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_5 \cdot C_3 & 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_3 \\ 0 & B_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & C_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

immediatamente deducibile per ispezione delle relazioni di interconnessione.  $\triangleleft$

Una volta determinata la rappresentazione con lo spazio di stato di  $S$ , che sarà della forma:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + (B_u \quad B_s) \begin{pmatrix} u(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = A x(t) + B_u u(t) + B_s \cdot C_p x(t) \\ \begin{pmatrix} y(t) \\ p(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_y \\ C_p \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

$p(t) = C_p x(t)$

per passare ad una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema di fig. 1.4 è necessario tenere presente la relazione di interconnessione:

$$s(t) = p(t)$$

grazie alla quale si ottiene:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_s C_p) x(t) + B_u u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \end{aligned}$$

È possibile allora concludere, a questo punto, che le proprietà di stabilità del sistema di fig. 1.4 coincidono con le proprietà di stabilità di un sistema avente la struttura indicata in fig. 1.1, nel quale  $S$  indichi il sistema definito dalla rappresentazione ingresso-stato-uscita:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B_s u(t) \\ y(t) &= -C_p x(t) \end{aligned}$$

La rappresentazione con lo spazio di stato del sistema di fig. 1.1 assumerebbe infatti in questo caso la forma:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_s C_p) x(t) + B_s u(t) \\ y(t) &= -C_p x(t) \end{aligned}$$



equivalente, ai fini dello studio della stabilità, alla rappresentazione del sistema di fig. 1.4.

**Commento.** Si è ritenuto utile segnalare la possibilità di ridurre, ai fini dello studio delle stabilità, un sistema interconnesso allo schema di figura 1.1 piuttosto che ad altri equivalenti, in vista del notevole interesse che l'analisi dello schema di fig. 1.1 riveste nell'ambito dello studio delle proprietà delle strutture di controllo a controreazione.

**Commento.** È interessante osservare che le proprietà di stabilità del sistema indicato in fig. 1.3 sono immediatamente deducibili a partire dalla conoscenza delle proprietà di stabilità delle singole parti del sistema interconnesso.

È infatti possibile mostrare che, in conseguenza del fatto che il sistema  $S$  non contiene cicli chiusi, il polinomio caratteristico associato alla matrice  $A$  che figura nella rappresentazione (1.1) del sistema  $S$  può essere espresso come prodotto dei polinomi caratteristici associati alle singole matrici  $A_i$  che figurano nelle rappresentazioni delle singole parti. (Per provare quanto asserito si può osservare che un grafo privo di cicli chiusi può essere semplificato, sino ad ottenere che ciascun ingresso sia collegato a ciascuna uscita da un singolo ramo, me-

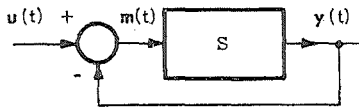
diante operazioni di eliminazione di nodi e che queste godono - nei riguardi dei legami tra polinomi caratteristici - della stessa proprietà sopra enunciata).

In conseguenza di ciò le radici con parte reale positiva del polinomio caratteristico di  $A$  si ottengono aggregando le radici con parte reale positiva di ciascuno dei polinomi caratteristici delle matrici  $A_i$ ; in particolare, se le rappresentazioni di ogni parte del sistema sono stabili asintoticamente, lo è anche la rappresentazione del sistema  $S$  (non altrettanto si può dire per il sistema di fig. 1.4, che differisce da  $S$  nella interconnessione tra la variabile  $p$  e la variabile  $s$ ).

## 11.2 - Una proprietà dei sistemi reazionati.

Lo scopo del presente paragrafo è quello di stabilire una importante relazione che consente l'analisi delle proprietà di stabilità di una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema reazionato indicato in fig. 1.1 a partire dalla conoscenza delle proprietà di stabilità di una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema  $S$  non reazionato.

Fig. 2.1



Come è noto, se è data una rappresentazione con lo spazio di  $S$  nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} m(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

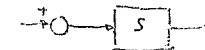
è possibile, per il sistema di fig. 2.1, associare una rappresentazione con lo spazio di stato nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si vuole ora stabilire un legame tra il polinomio caratteristico associato alla matrice  $A$  e quello associato alla matrice  $A - BC$ , cioè tra il polinomio caratteristico:

(2.3)

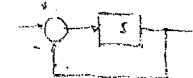
$$d_{AP}(s) = \det(sI - A)$$



relativo alla rappresentazione del sistema ad anello aperto ed il polinomio caratteristico:

(2.4)

$$d_{CH}(s) = \det(sI - A + \mathbf{B}\mathbf{C})$$



relativo alla rappresentazione del sistema ad anello chiuso.

In proposito, si ha la seguente:

**Proposizione 2.1.** Tra i polinomi (2.3) e (2.4) sussiste la relazione:

$$\frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = \det(I + \mathbf{F}(s)) \quad (2.5)$$

nella quale è:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(sI - A)^{-1} \mathbf{B} \quad (2.6)$$

**Comento.** Si noti che la (2.6) coincide con la matrice di trasferimento del sistema  $S$ .

**Prova.** Si incomincerà con il mostrare che, se  $\mathbf{P}$  è una matrice  $n \times m$  e  $\mathbf{Q}$  è una matrice  $m \times n$ , vale la relazione:

$$\det(I_{n \times n} + \mathbf{P}\mathbf{Q}) = \det(I_{m \times m} + \mathbf{Q}\mathbf{P}) \quad (2.7)$$

Allo scopo, si consideri l'identità

$$\begin{pmatrix} I_{m \times m} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{P} & I_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m \times m} & 0 \\ -\mathbf{P} & I_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m \times m} + \mathbf{Q}\mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix}$$

dalla quale discende che:

$$\det \begin{pmatrix} I_{m \times m} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{P} & I_{n \times n} \end{pmatrix} = \det(I_{m \times m} + \mathbf{Q}\mathbf{P}) \quad (2.8)$$

Si consideri poi ancora l'identità:

$$\begin{pmatrix} I_{m \times m} & -Q \\ P & I_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m \times m} & Q \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m \times m} & 0 \\ P & I_{n \times n} + PQ \end{pmatrix}$$

dalla quale discende che:

$$(2.8') \quad \det \begin{pmatrix} I_{m \times m} & -Q \\ P & I_{n \times n} \end{pmatrix} = \det (I_{n \times n} + PQ)$$

Confrontando allora le (2.8) ed (2.8') discende immediatamente la (2.7).

Utilizzando la relazione ora provata è immediato verificare i seguenti successivi sviluppi:

$$\begin{aligned} d_{CH}(s) &= \det (sI - A + BC) = \det \left[ (sI - A) \left( I + (sI - A)^{-1} B C \right) \right] \\ &= \det (sI - A) \det \left[ I + (sI - A)^{-1} B C \right] = \det (I + KC) \\ &= \det (sI - A) \det \left[ I + C (sI - A)^{-1} B \right] = \\ &= \det (sI - A) \det \left[ I + F(s) \right] = \\ &= d_{AP}(s) \det \left[ I + F(s) \right] \end{aligned}$$

che provano la (2.5).  $\triangleleft$

### II.3 - Stabilità dei sistemi reazionati ad un solo ingresso ed una sola uscita (criterio di Nyquist).

In questo paragrafo si mostrerà come la proprietà (2.5) può essere usata per dedurre un criterio di stabilità che può essere utilizzato quando si disponga della rappresentazione grafica della funzione  $F(j\omega)$ . Come precisato nel titolo, si fa riferimento - inizialmente - al caso in cui il sistema  $S$  ha un solo ingresso ed una sola uscita. In questo caso la (2.5) si riscrive nella forma:

$$(3.1) \quad \frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = I + F(s)$$

*razionali proprie*  
*grado numer < grado den*

*grado numer = grado den*

$\frac{M_{AP}}{I_{AP}(s + F(s))} \quad M_{CH} = M_{AP}$

Il criterio che si vuole esaminare è basato sulla considerazione della *variazione di fase* della funzione a secondo membro della (3.1) quando la variabile  $s$  percorre l'asse immaginario, da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

A tal fine è conveniente innanzitutto osservare che si considera un polinomio  $p(s)$  a coefficienti reali e si attribuiscono alla variabile complessa  $s$  valori immaginari puri ponendo  $s = j\omega$  si ottiene una funzione complessa  $p(j\omega)$  della variabile reale  $\omega$  il cui argomento (fase), quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ , subisce una variazione la cui entità può essere facilmente valutata se si conosce il numero di radici con parte reale positiva del polinomio stesso. In proposito si osservi infatti che, scritto  $p(s)$  nella forma:

$$(3.2) \quad p(s) = k(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

e cioè:

$$(3.2') \quad p(j\omega) = k(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n)$$

è possibile interpretare geometricamente la quantità a secondo membro nella (3.2') come prodotto della costante  $k$  per i vettori che congiungono gli zeri  $s_1, s_2, \dots, s_n$  al punto corrente dell'asse immaginario (di ordinata  $\omega$ ).

È chiaro che quando il punto corrente percorre l'asse immaginario da  $-\infty$  a  $+\infty$ , ciascuno dei vettori considerati compie una rotazione di  $\pi$  in senso antiorario per i vettori corrispondenti a radici con parte reale negativa (cfr. fig. 3.1a) ed in senso orario per quelli corrispondenti alle radici con parte reale positiva (cfr. fig. 3.1b). Da queste considerazioni segue che se il polinomio di grado  $n$  ha  $n_p$  radici con parte reale positiva e le rimanenti  $n - n_p$  con parte reale negativa, il vettore rappresentativo di  $p(j\omega)$  ruota di un angolo pari alla somma delle rotazioni dei suoi fattori e cioè, assumendo come positive le rotazioni in senso antiorario, ruota di  $-n_p \pi$  per le radici con parte reale positiva e di  $(n - n_p) \pi$  per le radici con parte reale negativa e, dunque, complessivamente di:

$$(3.3) \quad \varphi = (n - 2n_p) \pi$$

Questa relazione consente dunque, come si è detto, di porre in relazione la variazione di fase della funzione  $p(j\omega)$ , quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ , con il numero di radici con parte reale positiva di  $p(s)$ . Si noti anche che la (3.3) è stata dedotta nella tacita ipotesi che  $p(s)$  non abbia radici sull'asse immaginario.

Tornando ora alla (3.1), è facile mostrare che, utilizzando opportunamente la (3.3), è possibile valutare la variazione di fase della funzione a secondo membro quando  $s$  percorre l'asse immaginario da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Questa è evidentemente pari alla differenza tra la variazione di fase  $\varphi_{CH}$  del numeratore  $d_{CH}(j\omega)$  e  $\varphi_{AP}$  del denominatore  $d_{AP}(j\omega)$  della funzione razionale a primo membro. In proposito si ha:

$$(3.4) \quad \varphi_{CH} = (n - 2Z_p) \pi$$

$$(3.5) \quad \varphi_{AP} = (\pi - 2P_p) \pi$$

avendo indicato con  $Z_p$  il numero di radici con parte reale positiva di  $d_{CH}(s)$  e con  $P_p$  il numero di radici con parte reale positiva di  $d_{AP}(s)$  ed avendo ancora tacitamente supposto che nessuno dei due polinomi in questione abbia radici sull'asse immaginario (si rimuoverà più tardi questa limitazione).

In definitiva, la variazione di fase della funzione  $1 + F(j\omega)$  è pari a:

$$(3.6) \quad \varphi_{1+F} = -(Z_p - P_p) 2\pi$$

Si noti che il secondo membro della (3.6) è pari ad un multiplo intero dell'angolo giro; conviene allora valutare  $\varphi_{1+F}$  in termini di angoli giri. È inoltre abituale, in questo contesto, considerare positivi i giri compiuti in senso orario. Con queste convenzioni la (3.6) può essere riassunta dicendo che il numero  $N$  di giri che il vettore  $1 + F(j\omega)$  compie attorno all'origine in senso orario quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$  è pari alla differenza tra il numero delle radici con parte reale positiva di  $d_{CH}(s)$  e quello delle radici con parte reale positiva di  $d_{AP}(s)$ :

$$(3.7) \quad N = \frac{\varphi_{1+F}}{(-2\pi)} = Z_p - P_p$$

Si osservi inoltre che la curva descritta dall'estremo del vettore  $1 + F(j\omega)$  coincide con quella descritta dall'estremo del vettore  $F(j\omega)$  traslata verso destra di uno spostamento unitario e quindi le rotazioni della  $1 + F(j\omega)$  attorno all'origine coincidono con quelle della  $F(j\omega)$  attorno al punto  $(-1 + j0)$  (cfr. fig.3.2).

Alla regola espressa dalla (3.7) ci si può collegare per dedurre dei criteri di stabilità. Infatti condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del sistema reazionato è che le radici del polinomio caratteri-

stico  $d_{CH}(s)$  abbiano tutte parte reale negativa e che quindi, con le notazioni sopra introdotte, sia:

$$(3.8) \quad Z_p = 0$$

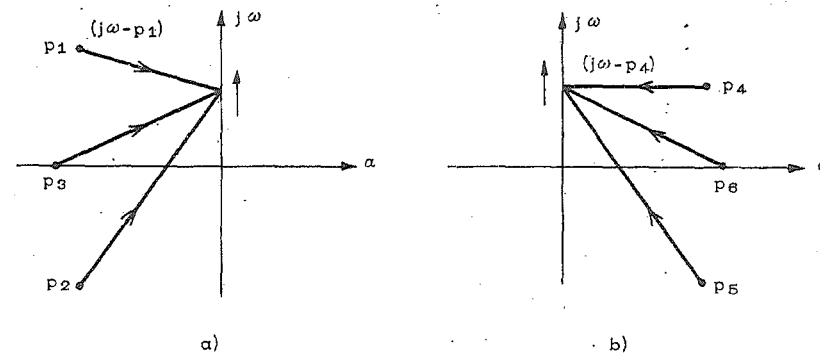


Fig. 3.1

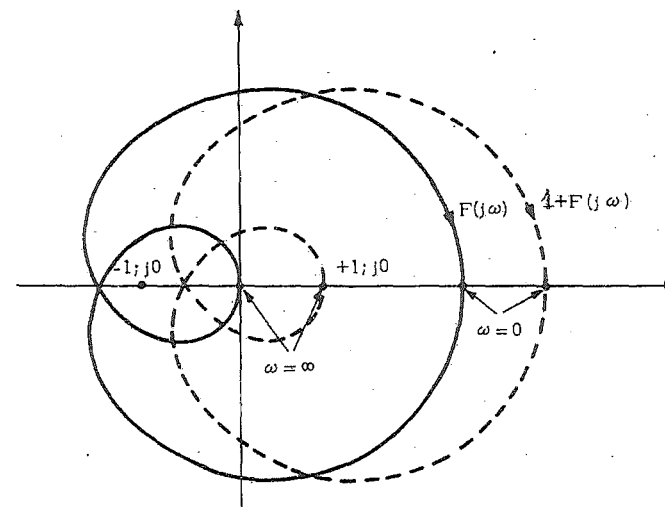


Fig. 3.2

Basta quindi introdurre questa condizione nell'espressione delle rotazioni dei vettori  $1 + F$  od  $F$ , per trovare un criterio di stabilità relativo appunto alle rotazioni delle rappresentazioni polari di quelle funzioni.

In proposito si può enunciare la seguente:

**Proposizione 3.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché la rappresentazione (2.2) di un sistema reazonato sia stabile asintoticamente è che il numero di giri, valutato per  $\omega$  variabile da  $-\infty$  a  $+\infty$ , che l'estremo del vettore rappresentativo della funzione  $1 + F(j\omega)$  compie intorno all'origine, pari al numero di giri che il vettore rappresentativo della funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(j\omega)$  compie intorno al punto  $(-1; j0)$ , sia uguale ed opposto al numero di autovalori con parte reale positiva della matrice  $\mathbf{A}$  che caratterizza la rappresentazione (2.1) del sistema non reazonato.*

Questo enunciato si compendia usualmente nella formula:

$$(3.9) \quad N = -P_p$$

Nel caso particolare, ma di notevole interesse, in cui la rappresentazione del sistema non reazonato è stabile asintoticamente e cioè la matrice  $\mathbf{A}$  non ha autovalori con parte reale positiva ( $P_p = 0$ ), il criterio si enuncia dicendo che la rappresentazione polare di  $1 + F(j\omega)$  non deve circondare l'origine o che quella di  $F(j\omega)$  non deve circondare il punto  $(-1; j0)$ ; deve essere, cioè:

$$(3.9') \quad N = 0$$

Il criterio è stato enunciato per la prima volta nel 1932 da Nyquist sotto questa forma (cioè con riferimento al caso particolare specificato) oggi si tende a dare il nome di criterio di Nyquist (generalizzato) alla enunciazione più estensiva compendiata nella formula (3.9) riservando la denominazione di criterio ridotto per il caso in cui si applica la (3.9').

La valutazione del numero  $N$  delle rotazioni in generale non presenta difficoltà se la rappresentazione su cui si opera è quella polare; nel caso in cui si disponga di rappresentazioni diverse si possono comunque adottare opportuni procedimenti. Si vuole sin d'ora precisare come occorra procedere quando la funzione  $F$  passa per il punto improprio oppure per il punto  $(-1; j0)$  (o per ambedue).

Il primo caso (passaggio per il punto improprio) corrisponde alla presenza di radici di  $d_{AP}(s)$  sull'asse immaginario (caso abbastanza frequente per quanto riguarda la presenza di una radice nell'origine dovuta ad un elemento integratore). Scegliendo, quindi, nel piano  $s$  un percorso uncinato che eviti le radici sull'asse immaginario (lasciandole, ad esempio, alla propria sinistra: cfr. fig.3.3 per il caso di una radice nel-

l'origine), al percorso infinitesimo intorno alla radice nulla (fig.3.3a) corrisponde un percorso (cfr. fig.3.3b) che lascia alla propria sinistra il punto improprio così come quello infinitesimo lasciava alla propria sinistra la radice nulla. Si può anche dire più rapidamente che la chiusura all'infinito va fatta in senso orario, se il percorso uncinato ha lasciato la radice alla sinistra. La rotazione corrispondente a questo percorso è di tante volte  $\pi$  quante volte ne indica la molteplicità della radice considerata.

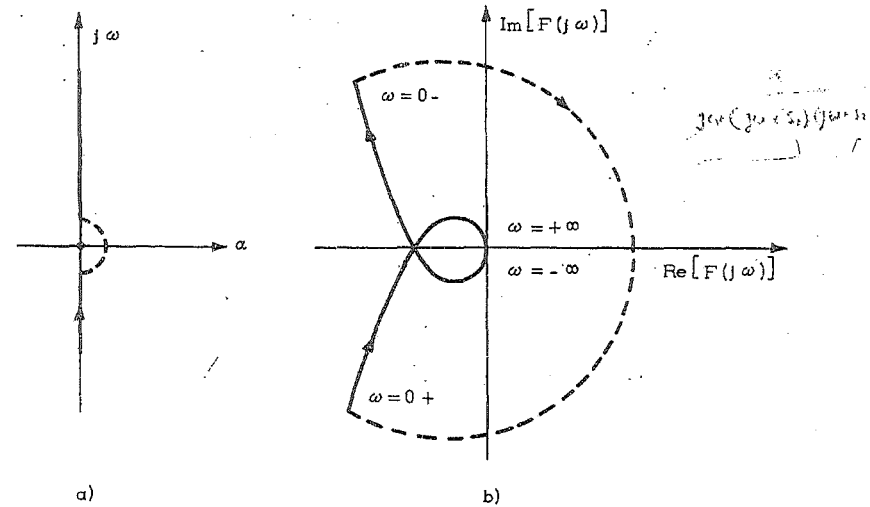


Fig.3.3

Il caso corrispondente ad una coppia di radici coniugate (semplici) sull'asse immaginario (di ordinata  $\pm j\omega_0$ ) è esemplificato in figura 3.4<sup>(1)</sup>.

Passando ora a considerare il caso in cui la curva  $F(j\omega)$  passa per il punto  $(-1; j0)$  si può anzitutto dire che la rappresentazione è senza dubbio non stabile asintoticamente in quanto  $d_{CH}(s)$  ha almeno

(1) - È chiaro che scegliendo percorsi che lascino alla propria sinistra le radici di  $F$  con parte reale nulla tali radici non devono essere considerate nel computo di  $P_p$  che figura nella (3.9). Se i percorsi uncinati fossero stati scelti in modo da lasciare le radici alla destra, i percorsi all'infinito scerebbero stati da considerare in senso antiorario (dando luogo così ad una diversa valutazione di  $N$ ) e naturalmente le radici avrebbero dovuto essere contate in  $P_p$ . Per semplificare l'applicazione del criterio (siccome spesso si hanno radici con parte reale nulla ma non maggiore di 0) si preferisce applicare il criterio scegliendo percorsi che lasciano le radici a sinistra.



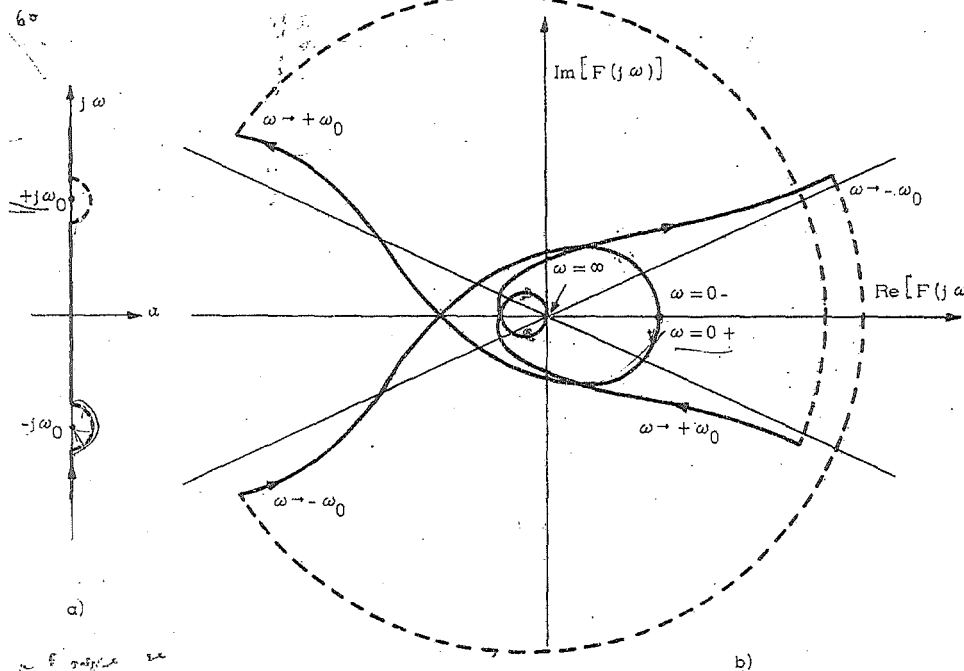


Fig. 3.4

una radice con parte reale nulla. È interessante, però, indagare se sussista o meno la proprietà di stabilità semplice e cioè se accanto alla radice (o alle radici) con parte reale nulla ce ne siano o no con parte reale positiva. Ciò può essere fatto deformando la curva nell'intorno del punto  $(-1; j0)$  in modo da lasciare quest'ultimo alla sinistra, seguendo la curva nel senso delle  $\omega$  crescenti, e applicando il criterio di Nyquist. Se dopo questa deformazione si constata che la (3.9) non è soddisfatta, si può senz'altro affermare che la rappresentazione è instabile (in quanto  $d_{CH}(s)$  ha radici con parte reale positiva). Se viceversa la (3.9) è soddisfatta,  $d_{CH}(s)$  non ha radici con parte reale positiva e quindi, per valutare la stabilità, occorre conoscere la molteplicità geometrica delle radici con parte reale nulla. In questo caso la soluzione del problema non può in generale essere ottenuta dall'analisi del grafico di  $F(j\omega)$ , fatta eccezione per il caso in cui, nel passaggio per il punto  $(-1; j0)$ , la funzione  $F(j\omega)$  subisce una variazione di fase di  $\pi$  (in senso orario); a

instabile a meno  
che non si  
possa dimostrare  
altrimenti

questo corrisponde infatti la presenza di una radice con parte reale nulla semplice nel polinomio  $d_{CH}(s)$  e cioè con molteplicità algebrica unitaria; poiché la molteplicità algebrica è sempre non inferiore a quella geometrica, si può allora concludere che la radice con parte reale nulla in questione ha molteplicità geometrica unitaria e non dà luogo a instabilità.

Le considerazioni precedenti consentono di rimuovere l'ipotesi, adottata nello scrivere la (3.7), di assenza di radici con parte reale nulla in  $d_{AP}(s)$  o in  $d_{CH}(s)$ . Per completezza, è utile tuttavia osservare che tali considerazioni verrebbero meno nel caso particolare in cui una stessa radice con parte reale nulla fosse comune a  $d_{AP}(s)$  e  $d_{CH}(s)$ . In tal caso infatti la curva  $1 + F(j\omega)$  non passerebbe né per il punto improprio, né per l'origine ma, tuttavia, la (3.7) non sarebbe applicabile. Anche in questo caso, peraltro, è possibile trarre immediatamente le conclusioni desiderate: se risulta che  $d_{AP}(s)$  abbia una radice con parte reale nulla e la curva  $F(j\omega)$  non passa per il punto improprio, necessariamente  $d_{CH}(s)$  ammette la stessa radice e quindi il sistema non è stabile asintoticamente.

Oltre alla valutazione di  $N$ , l'applicazione del criterio richiede la conoscenza preliminare del numero  $P_p$  di radici di  $d_{AP}(s)$  con parte reale positiva. Infatti, salvo nel caso in cui le rotazioni sono orarie e quindi si può affermare senz'altro che la rappresentazione è instabile, l'applicazione della (3.9) richiede che le rotazioni siano uguali a  $-P_p$ . La valutazione di  $P_p$  può in generale, essere risolta applicando alla rappresentazione del sistema non reazionato uno dei diversi criteri di stabilità esaminati nel capitolo precedente e si presenta più o meno agevole a seconda che sia o no disponibile direttamente la rappresentazione in questione.

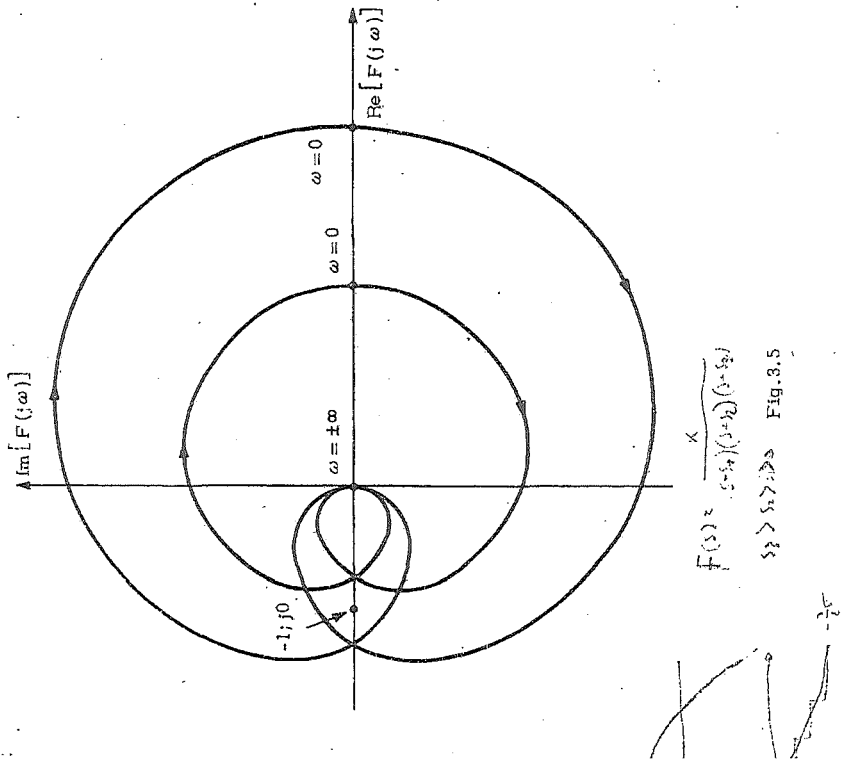
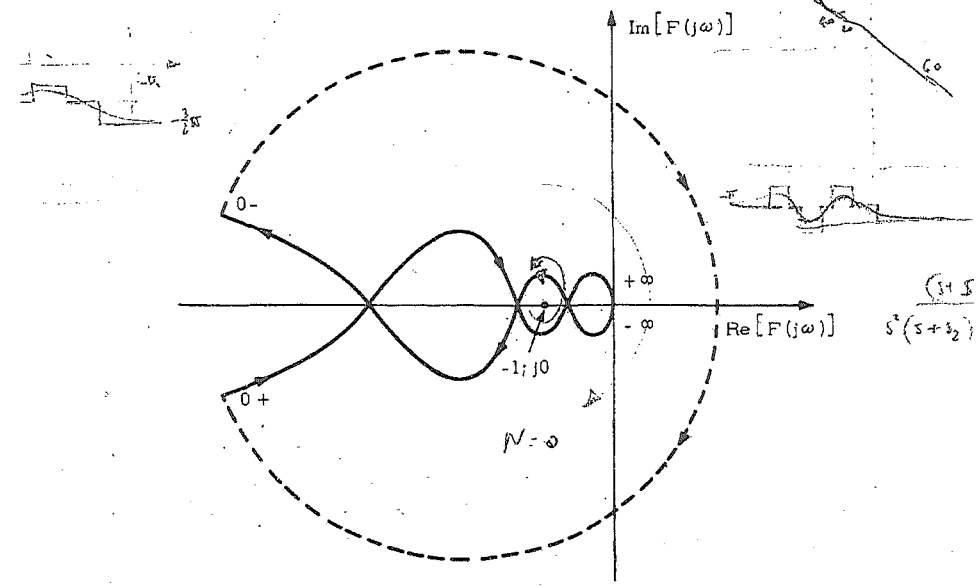
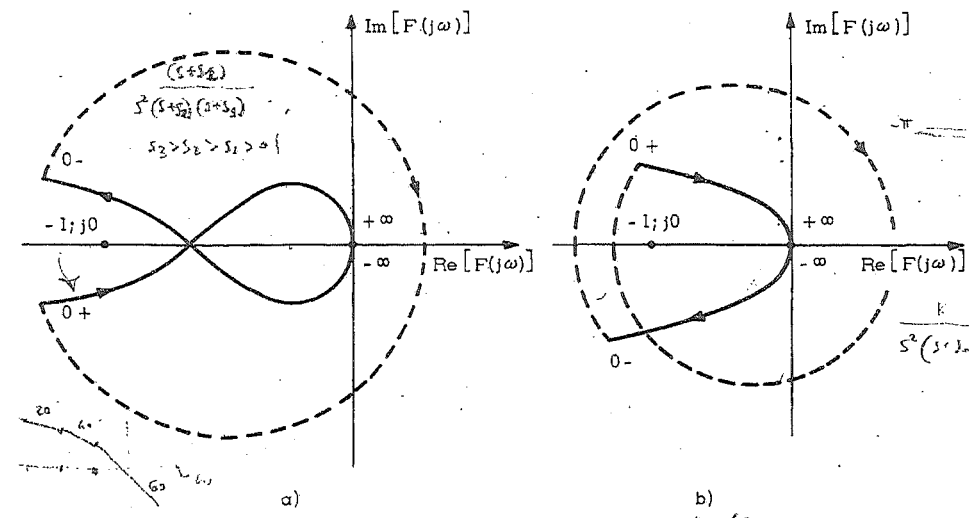
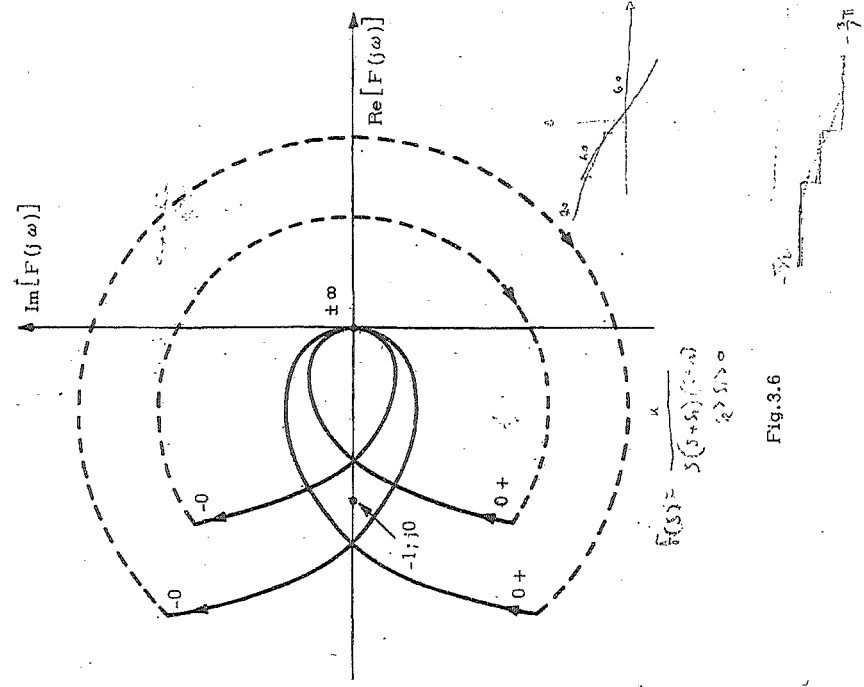
**Esempi.** A titolo di esempio si considereranno ora alcuni casi di applicazione del criterio.

Si considerano anzitutto sistemi di cui consti che  $d_{AP}(s)$  non ha radici con parte reale positiva e ai quali, quindi, si può applicare direttamente il criterio ridotto.

In fig. 3.5 è riportato un caso in cui  $F(j\omega)$  si mantiene sempre al finito: per le curve di figura l'applicazione del criterio è immediata, in quanto per quella interna risulta  $N = 0$  e quindi, il sistema corrispondente è stabile, e per quella esterna  $N = +2$  e quindi il sistema è instabile.

In fig. 3.6 è riportato un caso in cui  $d_{AP}(s)$  ha una radice all'origine; in corrispondenza la curva polare di  $F(j\omega)$  è aperta e per valutare le rotazioni bisogna introdurre un arco di chiusura all'infinito che colleghi  $0_-$  a  $0_+$  in senso orario dopo di che l'applicazione è im-

mediata e perfettamente analoga a quella relativa alla figura precedente ...  
 (N = 0 per la curva interna ed N = + 2 per quella esterna).



In fig.3.7 si hanno due casi in cui  $d_{AP}(s)$  ha una radice doppia nell'origine; in corrispondenza la rotazione all'infinito è di  $2\pi$  ed  $N$  è, rispettivamente,  $0$  e  $+2$ ; il sistema è stabile nel primo caso e instabile nel secondo.

Nel caso di fig.3.8 si ha un intreccio più complesso in cui, il punto  $(-1; j0)$  risulta interno al percorso chiuso formato da due archi - non corrispondenti, però, a valori contigui di  $\omega$  - dell'interna curva. Seguendo il percorso si trova  $N = 0$  e, quindi, il sistema è stabile.

Per il caso, invece, in cui non si può applicare il criterio ridotto, in fig.3.9 si considera una  $F(j\omega)$  piuttosto complicata, che consta corrisponda ad un caso in cui  $d_{AP}(s)$  ha due radici con parte reale po-

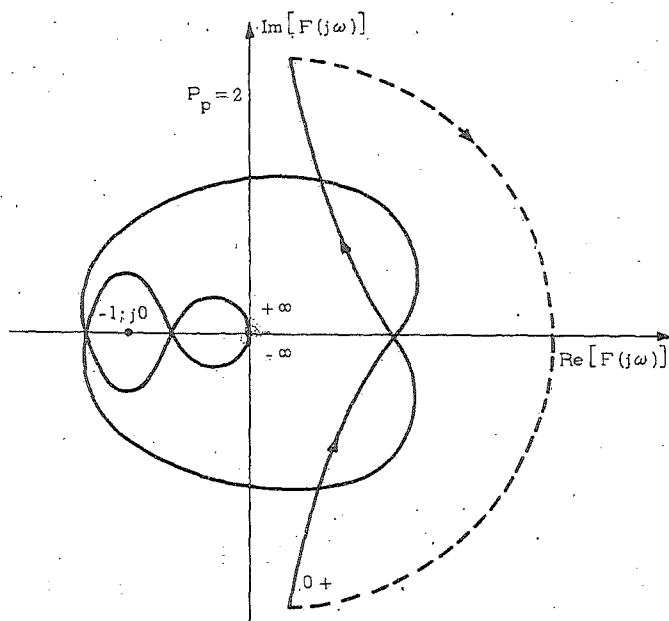


Fig.3.9

sitiva ( $P_p = 2$ ). Seguendo il tracciato si compiono, complessivamente 2 giri in senso antiorario intorno al punto  $(-1; j0)$  e, quindi, la condizione (3.9) risulta soddisfatta ed il sistema è stabile.

#### II.4 - Ulteriori considerazioni pratiche a proposito dell'impiego del criterio di Nyquist.

*Influenza del guadagno di  $F(s)$  sulla stabilità.* È interessante svolgere alcune considerazioni legate al problema dell'esame di come la stabilità di un sistema di struttura fissa (cioè con una  $F(s)$  di forma data) dipende dai parametri della  $F(s)$  stesso ed in particolare dal guadagno. Ci si limita a considerare l'influenza della modifica del guadagno sia per l'importanza del parametro sia per la facilità di variarlo (con un amplificatore in cascata sulla catena di azione diretta) sia infine perché l'analisi di tale influenza è particolarmente semplice; infatti variando il guadagno varia solo l'ampiezza del vettore  $F(j\omega)$  e non la sua fase cosicché le curve conservano la stessa forma. A questo proposito, anzi, si può dire che sarebbe possibile condurre l'analisi tenendo fissa la curva e variando la scala di rappresentazione (cioè spostando il punto  $(-1; j0)$ ).

In rapporto alle variazioni del guadagno usualmente i sistemi si distinguono in quelli a *stabilità regolare* ed in quelli a *stabilità condizionata*. I primi sono caratterizzati da un solo valore critico  $k_c$  del guadagno per il quale si è al limite di stabilità, cosicché il sistema è stabile per  $0 < k < k_c$  ed instabile per  $k > k_c$ ; questa situazione si verifica quando la parte della curva corrispondente alle  $\omega$  positive ha una sola intersezione con il semiasse reale negativo.

La denominazione di *regolare* è dovuta al fatto che in questi casi l'effetto della variazione di guadagno corrisponde all'intuizione fisica più diretta che associa il manifestarsi della instabilità a valori troppo elevati del segnale di reazione quando questo è in opposizione a quello di ingresso.

Casi di sistemi a stabilità regolare sono quelli corrispondenti alle figg. 3.5 e 3.6 (per i quali le curve sono rappresentate per due valori di guadagno) e 3.7a (per il quale risulta evidente che aumentando il guadagno si circonda il punto  $(-1; j0)$ ).

Nei sistemi a stabilità condizionata invece si hanno più intersezioni della  $F(j\omega)$  (per  $\omega > 0$ ) con il semiasse reale negativo e, quindi, più valori critici del guadagno.

Ciò avviene, ad esempio, nel caso di fig.3.8 e, come si vede, l'instabilità può manifestarsi non solo per aumenti ma altresì per diminuzioni di guadagno. In altri termini il campo di variazione del guadagno si può dividere in intervalli contigui, da un valore critico al successivo, tali che il sistema è alternativamente stabile ed instabile.

È bene osservare che i due casi considerati non esauriscano tutte le possibilità; si può verificare, infatti, anche il caso di fig.4.1a in

cui (per  $\omega > 0$ ) si ha una sola intersezione della  $F(j\omega)$  con il semiasse reale negativo; ma il sistema non è a stabilità regolare, perchè è stabile per i valori elevati del guadagno ed instabile per valori bassi. Talora per indicare questo tipo di dipendenza della stabilità dal guadagno si usa l'espressione di *stabilità paradossale*. L'espressione si usa talora anche per casi di stabilità condizionata del tipo di quello di fig. 4.1 b, permettere in evidenza il fatto che al crescere del guadagno dopo l'ultimo valore critico il sistema si mantiene stabile.

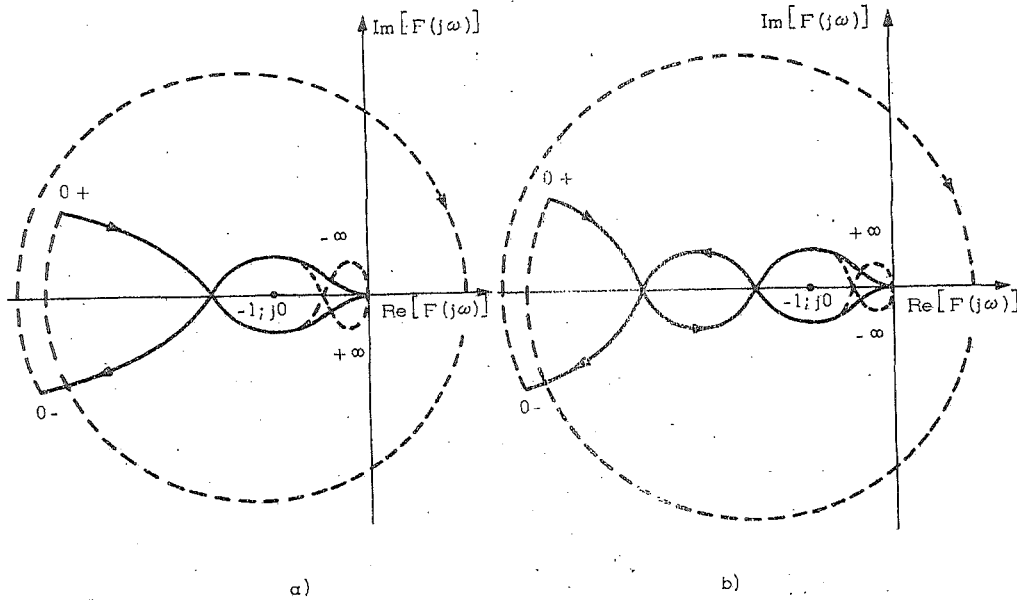


Fig. 4.1

Il caso considerato ha un interesse prevalentemente teorico: infatti i modelli che si adottano sono quasi sempre approssimati e in essi si trascura l'influenza di costanti di tempo molto piccole (corrispondenti a poli negativi lontani dall'asse immaginario); se se ne tenesse conto la curva taglierebbe il semiasse negativo anche nell'intorno dell'origine (cfr. a titolo di esempio l'andamento tratteggiato in fig. 4.1 a e b) e si cadrebbe così in casi comuni di stabilità condizionata (in cui all'aumentare del guadagno oltre un certo limite si ha instabilità).

Per gli stessi motivi, sistemi la cui  $F(j\omega)$  non taglia il semiasse reale negativo (come quello di fig. 4.2) e che quindi sembrerebbero stabili per qualsiasi valore del guadagno, rientrano, in effetti, tra

quelli a stabilità regolare quando si tiene conto con maggior precisione del comportamento alle frequenze più elevate (cioè intorno all'origine del piano di  $F$ ).

Sui procedimenti per la valutazione di  $N$ . Per applicare il criterio di Nyquist è necessario, come si è visto, determinare il numero  $N$  delle rotazioni compiute da un vettore applicato nel punto  $-1; j0$  quando il suo estremo segue il diagramma polare della  $F(j\omega)$  al variare di  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Una prima osservazione da fare in proposito è che, data la simmetria rispetto all'asse reale della parte corrispondente a valori positivi di  $\omega$  e di quella corrispondente a valori negativi, è sufficiente valutare la rotazione quando  $\omega$  varia da  $0$  a  $+\infty$  e raddoppiare il numero così ottenuto.

Nel caso in cui si disponga del diagramma polare la valutazione si può effettuare in modo diretto, tenendo conto ovviamente di eventuali archi all'infinito.

Quando però si dispone di altre rappresentazioni (modulo e fase, parte reale ed immaginaria ecc.) occorre, in generale, o ricostruire il diagramma polare (il che è sempre possibile, anche se talvolta inutilmente laborioso) ovvero tradurre le proprietà connesse al circondamento del punto  $(-1; j0)$  in proprietà direttamente verificabili sui diagrammi assegnati.

Ciò è particolarmente semplice per il caso dei sistemi a stabilità regolare, per i quali (cfr. fig. 4.3a) alla proprietà di non circondare il punto  $(-1; j0)$  corrisponde quella che la intersezione con il semiasse reale negativo sia a destra del punto stesso. Tale intersezione è caratterizzata dal fatto che ivi la fase è uguale a  $-\pi$  e, quindi, la condizione di stabilità si può esprimere dicendo che:

$$|F(j\omega)| < 1 \quad \text{quando} \quad \angle F(j\omega) = -\pi$$

Questa condizione è immediatamente verificabile sul diagramma di Bode (cfr. fig. 4.3b): basta infatti constatare che il modulo di  $F$  sia

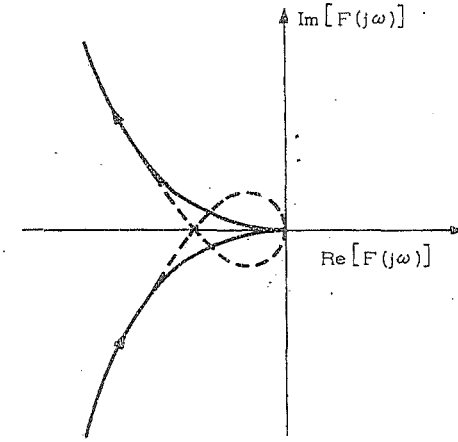


Fig. 4.2

minore di 1 e quindi il suo logaritmo sia negativo in corrispondenza al valore di  $\omega$  per il quale la fase vale  $-\pi$ .

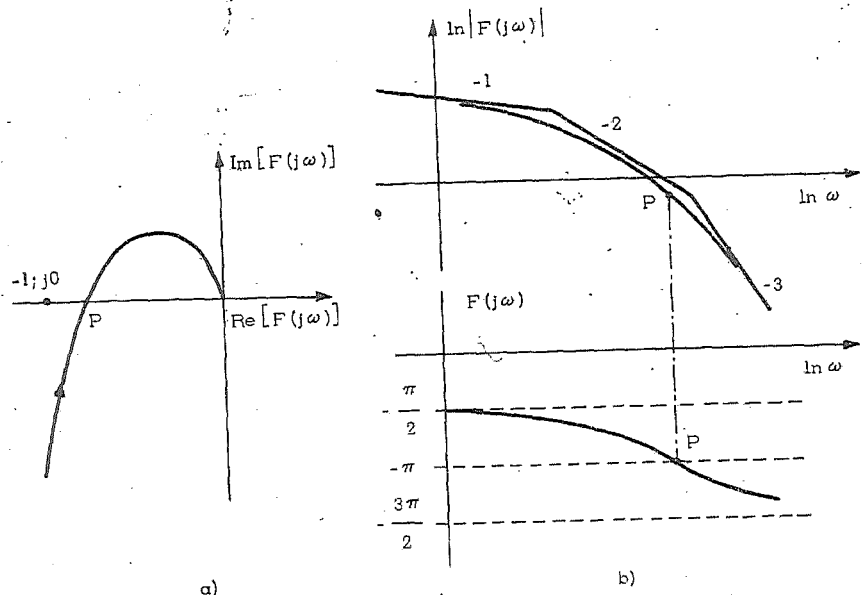


Fig. 4.3

Appare chiaro che un procedimento analogo si può applicare per i sistemi la cui  $F(j\omega)$  ha una rappresentazione polare che interseca una sola volta il cerchio unitario (fig. 4.4 a). In questo caso al mancato circondamento del punto  $(-1; j0)$  corrisponde la condizione che la intersezione avvenga sul semicerchio inferiore e, quindi, che:

$$F(j\omega) > -\pi \quad \text{quando} \quad |F(j\omega)| = 1$$

Anche questa condizione si verifica immediatamente sul diagramma di Bode (cfr. fig. 4.4 b).

— *Considerazioni sui margini di stabilità.* Quanto si è detto in questo paragrafo è riferito alla stabilità di rappresentazioni lineari e stazionarie i cui parametri siano esattamente definiti; la stabilità risulta quindi una caratteristica che la rappresentazione può possedere o no ed i vari criteri indicati consentono appunto di verificare se il modello la possiede.

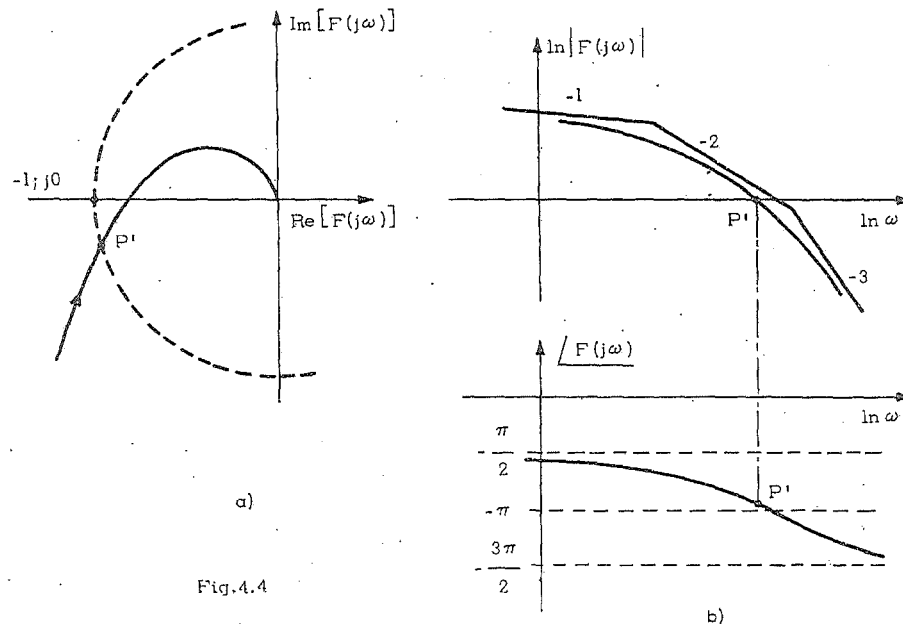


Fig. 4.4

Si pone però il problema di garantirsi del fatto che sia stabile anche il sistema effettivo al quale il modello corrisponde in una maniera pur sempre approssimata. Prescindendo dalle delicate questioni connesse alla linearizzazione, si può osservare che i coefficienti del modello sono sempre noti con un margine di incertezza dovuto alla imprecisione di misure o alla tolleranza della esecuzione dei vari componenti rispetto ai dati di progetto; bisogna inoltre tener conto del fatto che i parametri possono variare nel tempo per effetto di variazioni delle condizioni ambientali o di quelle operative.

È chiaro, quindi, l'interesse ad esaminare se la rappresentazione si conserva stabile anche quando i coefficienti sono variati in corrispondenza alle variazioni dei parametri che possono essere attribuite alle diverse ragioni esaminate. Si tratterà, dunque, di valutare in termini quantitativi, cioè attraverso margini di stabilità opportunamente definiti, la distanza del modello dalla situazione al limite di stabilità. La difficoltà di risolvere questo problema sta nel fatto che questa misura della distanza dalle condizioni limite deve essere fatta tenendo conto degli effetti delle variazioni parametriche prevedibili sulle grandezze o sulle curve che si prendono in considerazione per applicare i criteri di stabilità.

Nella sezione precedente si è visto che uno dei parametri di cui è facile valutare gli effetti sul comportamento del sistema dal punto di vista della stabilità è il guadagno della funzione di trasferimento a ciclo aperto; infatti variazioni di guadagno si possono ricondurre sostanzialmente a variazioni della scala di rappresentazione delle curve polari e cioè, ad una diversa posizione relativa del punto  $(-1; j0)$  rispetto alla curva  $F(j\omega)$ .

Nel condurre l'analisi dell'influenza del guadagno sul margine di stabilità conviene riferirsi anzitutto al caso dei sistemi a stabilità regolare. In questo caso (cfr. fig.4.3a) il sistema è stabile se la intersezione della curva polare con il semiasse reale negativo è a destra del punto  $(-1; j0)$  e siccome, variando il guadagno, il punto P si avvicina o si allontana da  $(-1; j0)$ , viene spontaneo individuare il margine di stabilità rispetto alle variazioni di guadagno<sup>(1)</sup> nella distanza di P dal punto  $(-1; j0)$ . Detto  $m'_g$  questo margine, esso risulta espresso in funzione di  $F(j\omega)$  dalla:

$$m'_g = 1 - |F(j\omega)|$$

quando:

$$\angle F(j\omega) = -\pi$$

La variazione  $\Delta K$  del guadagno dal valore effettivo  $K$  al valore limite  $K_c$ , cui corrisponde il passaggio della curva per il punto  $(-1; j0)$ , rapportata a  $K_c$  risulta:

$$\frac{\Delta K}{K_c} = m'_g$$

Il margine si può valutare anche con riferimento al rapporto fra  $K_c$  e  $K$  che esprime il valore massimo del fattore per cui si può moltiplicare  $F(j\omega)$  prima di raggiungere la condizione ai limiti di stabilità. Usualmente di questo margine si usa dare l'espressione logaritmica definendo quindi un:

$$m''_g = \lg \frac{K_c}{K}$$

(1) - Spesso il margine di stabilità rispetto alle variazioni di guadagno viene detto più semplicemente, *margine di guadagno*, attribuendo in questa dizione alla parola guadagno il significato di modulo della  $F(j\omega)$  e quindi in senso strettamente collegato a quello in cui si parlerà più innanzi di margine di fase.

Questo si può esprimere in funzione della  $F(j\omega)$  mediante la formula:

$$m''_g = \lg \frac{1}{|F(j\omega)|} = -\lg |F(j\omega)|$$

quando:

$$\angle F(j\omega) = -\pi$$

Quindi sul diagramma polare di fig.4.5a il margine  $m'_g$  è misurato dal segmento PC (da assumersi come positivo o negativo a seconda

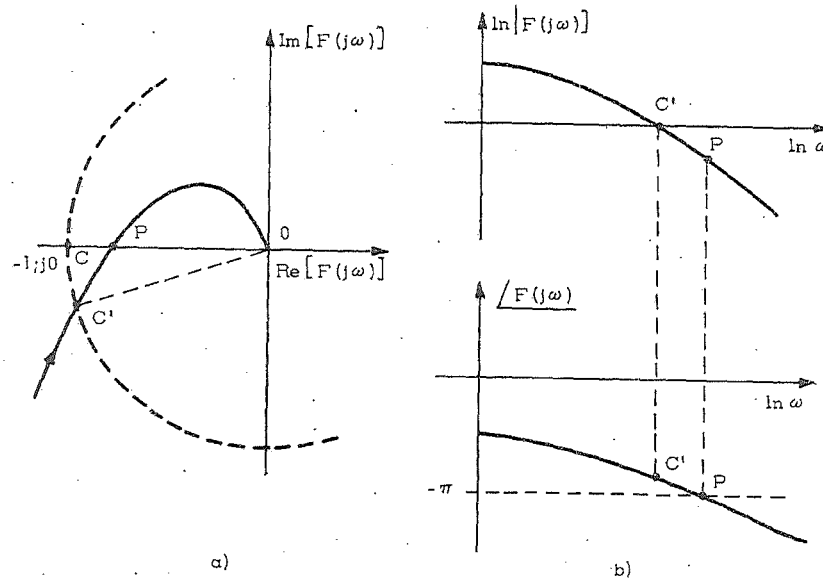


Fig.4.5

che P sia a destra o a sinistra di C), mentre il margine  $m''_g$  è l'opposto del logaritmo di OP è quindi è anch'esso positivo se OP è minore di 1 e cioè P è a destra di C. Il margine  $m''_g$  si rileva direttamente sul diagramma di Bode (fig.4.5b) dove è dato dall'opposto dell'ordinata del punto P del diagramma dei moduli; data questa sua interpretazione diretta sul diagramma di Bode esso viene espresso nelle

unità di misura di questo diagramma cioè in neper o in decibel (usualmente in decibel).

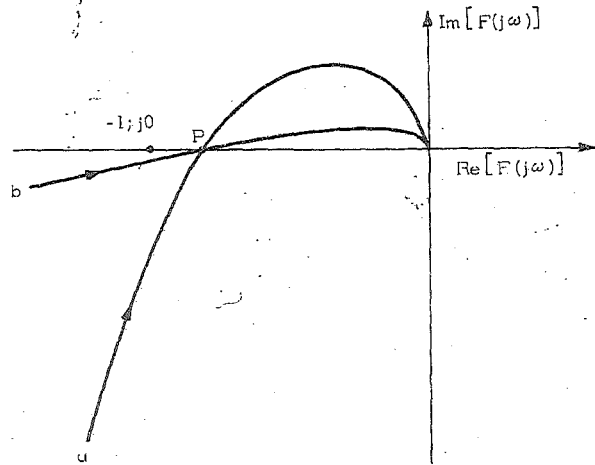


Fig.4.6

Naturalmente il considerare il margine di stabilità rispetto alle sole variazioni di guadagno non è esauriente. Si considera ad esempio il caso di fig.4.5 in cui due sistemi hanno lo stesso margine di stabilità rispetto al guadagno (cioè uguali valori di  $m_g$ ), mentre risulta intuitivo attribuire al sistema cui corrisponde la curva b un margine complessivo molto minore: a pari valore di K, infatti, una stessa variazione dei fattori che influenzano la fase può portare alla instabilità questo sistema e non l'altro. Per tener conto di questo aspetto è abituale introdurre un margine anche per le variazioni di fase, ciò che può essere giustificato sulla base delle seguenti considerazioni sul verificarsi della instabilità nei sistemi a stabilità regolare. Quando il sistema è al limite di stabilità, e cioè la  $F(j\omega)$  passa per il punto  $(-1; j0)$  in corrispondenza ad un certo valore  $\omega_c$  di  $\omega$ , un segnale sinusoidale di quella pulsazione può circolare nel sistema in evoluzione libera (cioè con ingresso nullo); si consideri infatti, ad esempio, la fig.4.7 e si applichi un segnale sinusoidale di pulsazione  $\omega_c$  in A": il segnale compare allora in B cambiato di segno, perchè la  $F(j\omega_c)$  vale -1, ed in A' cambiato ulteriormente di segno per l'azione del comparatore; il segnale in A' è dunque uguale a quello in A". La possibilità di questa libera circolazione del segnale sinusoidale di pulsazione  $\omega_c$  porta al

fatto che il sistema, abbandonato a se stesso in condizioni iniziali diverse da quelle di riposo, diviene sede di una oscillazione di quella pulsazione (con ampiezza dipendente dalle condizioni iniziali stesse).

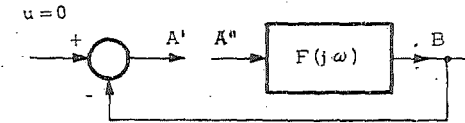


Fig.4.7

Si può dire allora che il passaggio all'instabilità si manifesta, nei sistemi a stabilità regolare che si stanno considerando, in corrispondenza al verificarsi contemporaneo (cioè per una stessa pulsazione) di due condizioni e cioè che il modulo della  $F$  sia unitario e la sua fase sia  $-\pi$ .

Per definire i margini di stabilità si può pensare, quindi di far riferimento alla situazione in cui è soddisfatta una delle due condizioni e valutare il margine che rimane per il verificarsi dell'altra. Il margine di guadagno è appunto stato definito considerando il punto di  $F(j\omega)$  in cui la fase vale  $-\pi$  e valutando il margine relativo al verificarsi della altra condizione (cioè  $|F(j\omega)| = 1$ ). Simmetricamente si usa definire un margine di fase, considerando la situazione in corrispondenza alla quale il modulo di  $F(j\omega)$  è uguale ad 1 e valutando quale margine vi sia per il verificarsi della condizione  $\angle F(j\omega) = -\pi$ . Precisamente si definisce margine di fase la quantità:

$$m_\varphi = \angle F(j\omega) - (-\pi) = \angle F(j\omega) + \pi$$

quando:

$$|F(j\omega)| = 1$$

Questa si valuta immediatamente sul diagramma di Nyquist considerando la intersezione con il cerchio di centro in 0 e di raggio unitario (cfr. punto C' in fig.4.5a) ed identificando  $m_\varphi$  con l'angolo COC' che risulta positivo quando il punto C' è ad ordinata negativa; altrettanto facilmente  $m_\varphi$  si valuta anche nei diagrammi di Bode, come ordinata del punto C' (cfr. fig.4.5b) riferita alla retta  $-\pi$  e quindi assumendolo come positivo quando C' è al di sopra di tale retta.

Conviene osservare che mentre i due  $m_g$  misurano in maniera diretta il margine di stabilità rispetto alle variazioni di un parametro ben definito (e cioè il guadagno), altrettanto non si può dire del margine di

fase, il quale tiene conto globalmente del margine di stabilità rispetto alle variazioni di tutti i parametri che influenzano lo sfasamento.

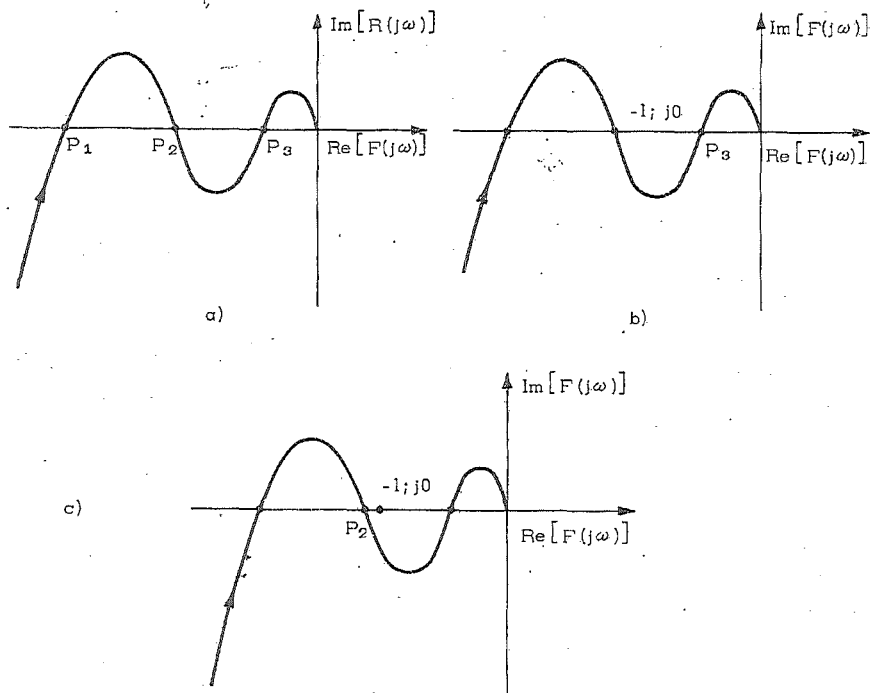


Fig.4.8

Quando si passa a considerare il caso di sistemi a stabilità condizionata, in cui si verificano più intersezioni con l'asse delle ascisse, la situazione è più delicata e non sempre è conveniente far riferimento a margini di stabilità definiti come in precedenza. Volendo farlo occorre esaminare la situazione particolare in cui ci si trova e, eventualmente, definire più margini. Si consideri, a titolo di esempio, il caso di figura 4.8 a in cui si hanno tre punti di intersezione con l'asse delle ascisse; delle varie situazioni possibili si consideri quella in cui il valore di  $K$  è tale che il punto  $P_2$  si trovi a sinistra di  $(-1; j0)$  ed il punto  $P_3$  a destra. Si vede immediatamente che occorre definire il margine di stabilità sia con riferimento a  $P_3$  (cfr. fig.4.8 b) sia con riferimento a  $P_2$  (cfr. fig.4.8 c) ed inoltre rispetto ad aumenti di guadagno

in  $P_3$  ed a diminuzioni in  $P_2$ ; per quest'ultimo caso, quindi, il margine va preso con segno opposto a quello considerato per i sistemi a stabilità regolare.

Considerazioni analoghe valgono per il margine di fase quando la  $F(j\omega)$  interseca in più punti il cerchio unitario con centro nell'origine (il che si può verificare anche per sistemi a stabilità regolare).

### II.5 - Stabilità dei sistemi reazionati a più ingressi e più uscite.

Nel caso di sistemi a più ingressi e più uscite si può ancora applicare, in linea di principio, il criterio di stabilità di Nyquist purchè, in luogo della rappresentazione polare della funzione  $1 + F(j\omega)$  si consideri quella della funzione  $\det(1 + F(j\omega))$ . La formula (3.7) conserva la sua validità purchè con  $N$  si indichi il numero di giri che il vettore  $\det(1 + F(j\omega))$  compie attorno all'origine in senso orario quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ ;  $Z_P$  e  $P_P$  indicano ancora, rispettivamente, il numero di radici con parte reale positiva di  $d_{CH}(s)$  (polinomio caratteristico relativo al sistema reazionato) e di  $d_{AP}(s)$  (polinomio caratteristico relativo al sistema non reazionato). Anche le considerazioni svolte relativamente alla presenza di radici con parte reale nulla in  $d_{AP}(s)$  (che corrisponde al passaggio della curva  $\det(1 + F(j\omega))$  per il punto improprio) o in  $d_{CH}(s)$  (che corrisponde al passaggio della curva  $\det(1 + F(j\omega))$  per l'origine) rimangono inalterate.

Da un punto di vista pratico si presenta la difficoltà della valutazione del determinante di una funzione razionale (la funzione  $1 + F(s)$ ) e del tracciamento del relativo diagramma polare. È tuttavia possibile, sotto ipotesi particolari, sostituire al computo del numero di giri compiuto dalla funzione  $\det(1 + F(j\omega))$  quello dei numeri di giri compiuti da alcune funzioni il cui grafico è più immediatamente disponibile. All'esame di tali situazioni è dedicato il presente paragrafo.

Per introdurre questo argomento è utile partire dalla considerazione del caso particolare in cui la matrice di trasferimento del sistema non reazionato è diagonale. In tale situazione risulta immediato procedere al calcolo della funzione  $\det[1 + F(j\omega)]$ , mediante l'espressione:

$$\begin{aligned} \det[1 + F(j\omega)] &= (1 + f_{11}(j\omega)) (1 + f_{22}(j\omega)) \dots (1 + f_{mm}(j\omega)) = \\ &= \prod_{i=1}^m (1 + f_{ii}(j\omega)) \end{aligned}$$

Di conseguenza, in base a note proprietà dei numeri complessi, si potrà dire che:



$$\varphi_{\det [I + F(j\omega)]} = \sum_{i=1}^m \varphi_{(1 + f_{ii}(j\omega))}$$

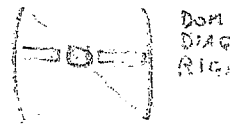
ovverosia:

$$N = \sum_{i=1}^m \nu_i$$

essendo  $N$  il numero di giri che il vettore  $\det [I + F(j\omega)]$  compie attorno all'origine, in senso orario, quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$  e  $\nu_i$  il numero dei giri che il vettore  $1 + f_{ii}(j\omega)$  compie attorno all'origine (ovvero il vettore  $f_{ii}(j\omega)$  compie attorno al punto  $-1$ ) nelle medesime condizioni. Il calcolo di  $N$  viene così ricondotto al calcolo delle rotazioni compiute dalle funzioni  $f_{ii}(j\omega)$ , che occupano gli elementi diagonali della matrice  $F(j\omega)$ .

Ci si domanda ora se è possibile ricondursi ad una tale possibilità anche in situazioni più generali. Da un punto di vista intuitivo, sembrerebbe ragionevole ritenere che tale possibilità sia verificata quando i valori assunti dagli elementi diagonali di  $F(j\omega)$  sono preponderanti rispetto ad i valori assunti dagli elementi fuori della diagonale. In effetti tale congettura intuitiva trova conferma in un preciso risultato che può essere stabilito una volta che vengano date le seguenti definizioni formali di matrice dominante diagonale.


**Definizione 5.1.** Una matrice  $Z(s)$  di funzioni di variabile complessa, con dimensioni  $m \times m$ , è detta dominante diagonale riga in un insieme  $\Omega$  di punti del piano complesso se valgono le seguenti condizioni:

$$(5.1) \quad |z_{ii}(s)| > \sum_{j \neq i} |z_{ij}(s)|$$


DOM.  
DIAG.  
RIGA

per ogni  $s \in \Omega$  e per  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Definizione 5.2.** Una matrice  $Z(s)$  di funzioni di variabile complessa, con dimensioni  $m \times m$ , è detta dominante diagonale colonna in un insieme  $\Omega$  di punti del piano complesso se valgono le seguenti condizioni:

$$(5.2) \quad |z_{ii}(s)| > \sum_{j \neq i} |z_{ji}(s)|$$


DOM.  
DIAG.  
COLONNA

per ogni  $s \in \Omega$  e per  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Commento.** Una matrice è dunque dominante diagonale riga in  $\Omega$  se, per ogni  $s \in \Omega$ , il valore del modulo dell'elemento diagonale, in ciascuna riga, è superiore alla somma dei moduli degli elementi fuori della diagonale. Se una proprietà analoga sussiste per ciascuna colonna, la matrice è dominante diagonale colonna.  $\triangleleft$

**Commento.** Se l'insieme  $\Omega$  comprende anche il punto all'infinito, le definizioni 5.1 e 5.2 devono essere estese richiedendo innanzitutto che la matrice  $Z(s)$  ammetta limite finito per  $s \rightarrow \infty$  e, quindi, che le (5.1) e (5.2) sussistano anche in corrispondenza a tali valori limiti e cioè si abbia:

$$(5.1') \quad \lim_{s \rightarrow \infty} |z_{ii}(s)| > \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{j \neq i} |z_{ij}(s)|$$

o:

$$(5.2') \quad \lim_{s \rightarrow \infty} |z_{ii}(s)| > \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{j \neq i} |z_{ji}(s)|$$

per  $i = 1, 2, \dots, m$ .  $\triangleleft$

Premesse queste considerazioni è ora possibile enunciare un risultato fondamentale ai fini del problema qui considerato:

**Teorema 5.3 (Gershgorin).** Se  $Z(s)$  è una matrice dominante diagonale, riga o colonna, nei punti dell'asse immaginario sul piano complesso, il numero  $N$  di giri compiuto attorno all'origine dal vettore rappresentativo della funzione  $\det [Z(j\omega)]$  per  $\omega$  che varia da  $-\infty$  a  $+\infty$  è pari alla somma dei numeri  $\nu_i$  di giri compiuti dai singoli vettori rappresentativi delle funzioni  $z_{ii}(j\omega)$  relative agli elementi diagonali. In simboli:

$$(5.3) \quad N = \sum_{i=1}^m \nu_i$$

**Prova.** Il lettore interessato può consultare in proposito: H. H. Rosenbrok, *Computer aided control systems design* (Academic Press, 1974), pagg. 24 - 27.  $\triangleleft$

Grazie al risultato espresso dal Teorema precedente è allora possibile, nel caso in cui la matrice  $I + F(j\omega)$  è dominante diagonale (riga o colonna), valutare il numero  $N$  di rotazioni compiute dal vettore rappresentativo della funzione  $\det(I + F(j\omega))$  come somma delle rotazioni  $\nu$  compiute dalle funzioni  $1 + f_{ii}(j\omega)$ .

Per applicare questo risultato a partire da una rappresentazione grafica delle funzioni che costituiscono gli elementi della matrice  $F(j\omega)$ , è utile servirsi di una procedura (proposta da Rosenbrok) che consenta di valutare direttamente la dominanza diagonale di  $I + F(j\omega)$ . In proposito considerando dapprima il caso della dominanza riga, si osservi che la (5.1), posto  $I + F(s)$  in luogo di  $Z(s)$  ed  $s = j\omega$  si può riscrivere come:

$$(5.4) \quad |1 + f_{ii}(j\omega)| > d_i(\omega)$$

essendo:

$$d_i(\omega) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |f_{ij}(\omega)|$$

La quantità a secondo membro è pari al valore della somma dei moduli degli elementi appartenenti alla riga  $i$ -esima di  $F(j\omega)$ , escluso l'elemento diagonale. La quantità a primo membro è pari al valore del modulo del vettore che ha origine nel punto  $-1$  del piano complesso e termina nell'estremo del vettore  $f_{ii}(j\omega)$  (vedi fig.5.1).

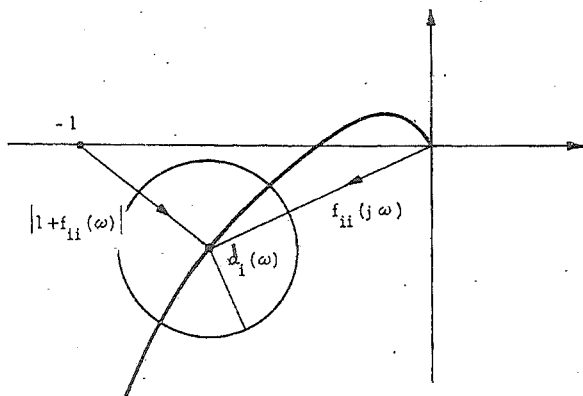


Fig.5.1

La (5.4) è allora soddisfatta, come si può constatare facilmente dall'esame della fig.5.1 stessa, se il cerchio che ha centro nell'estremo del vettore  $f_{ii}(j\omega)$  e raggio  $d_i(j\omega)$  non include il punto  $-1$ .

Naturalmente una verifica di questo genere deve essere ripetuta per ogni valore di  $\omega$ . In pratica si può procedere effettuando il tracciamento dei cerchi in corrispondenza ad un numero finito di valori di  $\omega$ , pervenendo ad una rappresentazione del tipo indicato in fig.5.2.

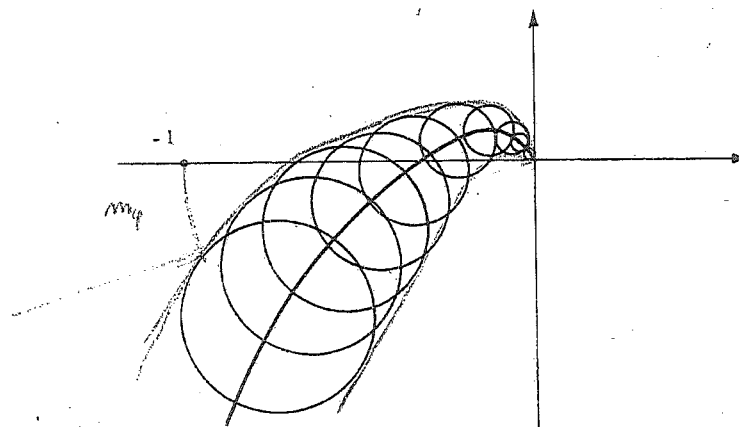


Fig.5.2

I cerchi di raggio  $d_i(\omega)$  individuano, attorno alla curva rappresentativa di  $f_{ii}(\omega)$ , una fascia, detta fascia di Gersghorin: se questa non include il punto  $-1$  si può affermare che la (5.4) è soddisfatta. È allora facile concludere che, se per ogni elemento diagonale di  $F(j\omega)$  le fasce di Gersghorin non includono il punto  $-1$ , la matrice  $I + F(j\omega)$  è dominante diagonale riga.

Una verifica grafica del tutto analoga si può eseguire anche per il caso della dominanza diagonale colonna sostituendo, al secondo membro della (5.4), la quantità:

$$d'_i(\omega) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |f_{ji}(\omega)|$$

Ciò premesso, risulta naturale procedere nel seguente modo, ai fini della valutazione della stabilità, nel caso in cui si abbia a che fare

con un sistema reazionato a più ingressi e più uscite:

- si tracciano i diagrammi polari delle funzioni  $f_{ij}(j\omega)$ , per  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, n$ ;

- si costruiscono le fasce di Gershgorin attorno ai diagrammi degli elementi diagonali;

- si verifica che le fasce di Gershgorin non includano il punto  $-1$ ;

- si passa a valutare il numero  $\nu_i$  di rotazioni compiute dal vettore  $f_{ii}(j\omega)$  attorno al punto  $-1$ , per  $\omega$  che varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ ;

- si verifica se è soddisfatta la relazione:

$$(5.5) \quad \sum_{i=1}^n \nu_i = -P_p$$

essendo  $P_p$  il numero di radici con parte reale positiva del polinomio  $d_{AP}(s)$ .

Se le verifiche di cui al terzo e quinto passo danno esito positivo, si può concludere che il sistema reazionato è stabile asintoticamente.

In proposito è opportuno osservare che è sufficiente eseguire le operazioni indicate al secondo e terzo passo o soltanto per il caso della dominanza riga (fasce di Gershgorin relative ai cerchi di raggio  $d_i(\omega)$ ) o soltanto per quello della dominanza colonna (fasce di Gershgorin relative ai cerchi di raggio  $d_j(\omega)$ ). Se la verifica della dominanza è negativa (qualcuna delle fasce di Gershgorin include il punto  $-1$ ) non si può procedere ulteriormente poiché non sono soddisfatte le ipotesi di applicabilità che Teorema 5.3. Se invece la verifica è positiva, la (5.5) è necessaria e sufficiente ai fini del sussistere della stabilità asintotica del sistema reazionato: se essa è verificata il sistema reazionato è stabile asintoticamente mentre se non lo è il polinomio  $d_{CH}(s)$  ha un numero di radici con parte reale positiva pari a:

$$(5.6) \quad Z_p = \sum_{i=1}^n \nu_i + P_p$$

Esempi.

Si consideri la matrice di funzioni di trasferimento relativa al sistema ad anello aperto:

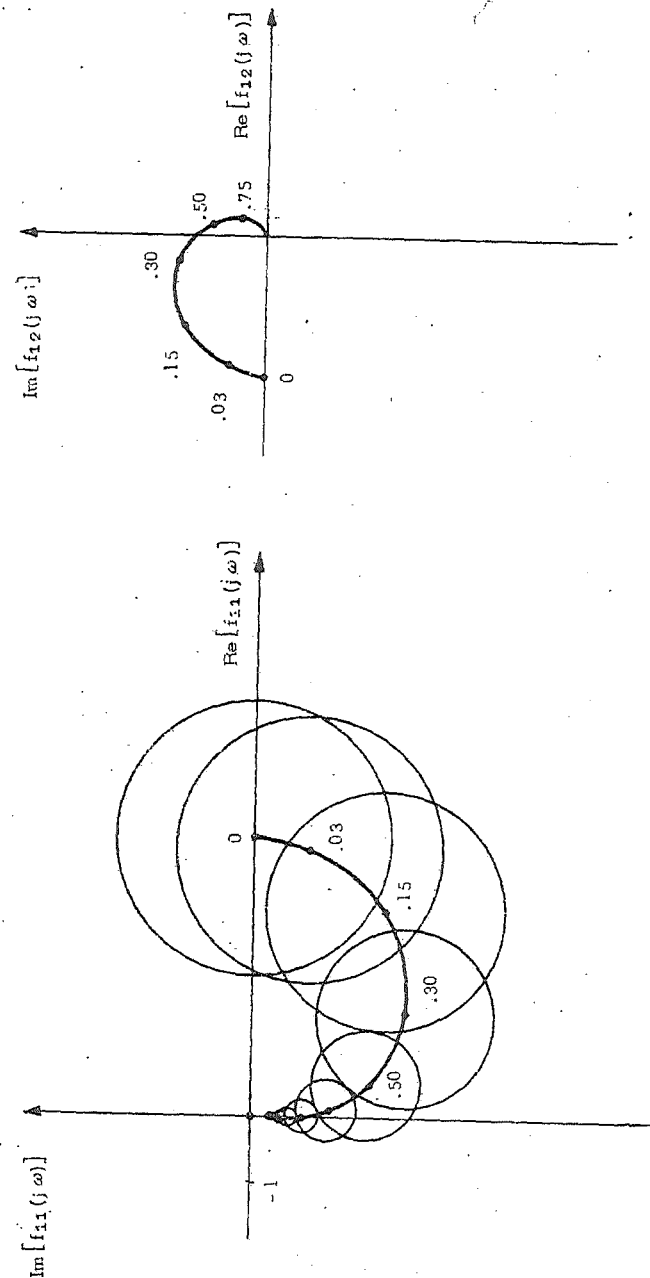


Fig. 5.3

$$F(s) = \begin{Bmatrix} \frac{4s+4}{1+5s+6s^2} & \frac{-2}{1+5s+6s^2} \\ \frac{-2}{1+5s+6s^2} & \frac{4s+4}{1+5s+6s^2} \end{Bmatrix}$$

Trattandosi di una matrice simmetrica, la proprietà di dominanza diagonale riga coincide con la proprietà di dominanza diagonale colonna. Inoltre, trattandosi di una matrice  $2 \times 2$ , la verifica della dominanza può essere limitata alla considerazione di una sola riga (o colonna).

La condizione di dominanza:

$$|1 + f_{11}(j\omega)| > |f_{12}(j\omega)|$$

può venire analizzata ricorrendo al tracciamento della fascia di Gershgorin, come indicato in fig. 5.3.

Poichè il punto  $(-1, 0)$ , nel diagramma a sinistra, non è compreso nella fascia di Gershgorin, si deduce che la matrice  $I + F(j\omega)$  è dominante diagonale e che, di conseguenza,

$$N = n_1 + n_2$$

In questo caso risulta inoltre  $n_1 = n_2 = 0$ . Si può allora concludere che, se  $P_p = 0$ , la rappresentazione del sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

Si consideri ora la matrice di funzioni di trasferimento relativa al sistema ad anello aperto:

$$F(s) = \begin{Bmatrix} \frac{20}{2s+3s^2+s^3} & \frac{5}{2s+s^2} \\ \frac{5}{2s+s^2} & \frac{20}{2s+3s^2+s^3} \end{Bmatrix}$$

Anche in questo caso valgono le considerazioni di simmetria svolte a proposito dell'esempio precedente. I grafici delle funzioni di  $\omega$  e la fascia di Gershgorin relativa alla funzione  $f_{11}(j\omega)$  sono riportate in fig. 5.4.

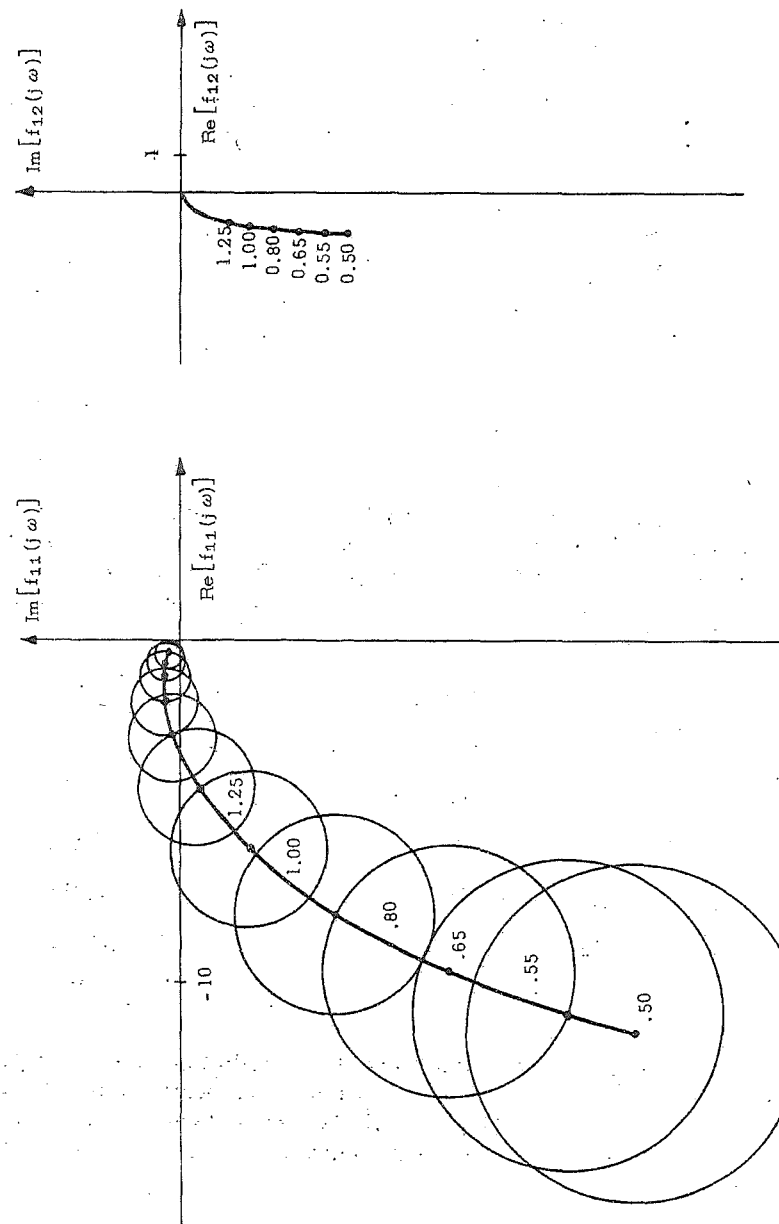


Fig. 5.4

Poichè il punto  $(-1, 0)$ , nel diagramma a sinistra, è compreso nella fascia di Gershgorin, non si può asserire che la matrice  $I + F(j\omega)$  sia dominante diagonale e, pertanto, non si può applicare il criterio di stabilità nella forma semplificata.

Per valutare la stabilità della rappresentazione del sistema ad anello chiuso occorre allora procedere in altro modo. Poichè si tratta di un caso in cui la matrice  $F(s)$  è  $2 \times 2$ , è molto agevole effettuare il calcolo il determinante di  $I + F(s)$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} \det(I + F(s)) &= (1 + f_{11}(s))^2 - (f_{12}(s))^2 = \\ &= \frac{(20 + 2s + 3s^2 + s^3)^2 - 25(s+1)^2}{(2s + 3s^2 + s^3)^2} = \\ &= \frac{s^6 + 6s^5 + 13s^4 + 52s^3 + 99s^2 + 30s + 375}{(2s + 3s^2 + s^3)^2} \end{aligned}$$

Ricordando ora che vale la (3.7), si proceda al calcolo del numero delle radici con parte reale positiva presenti nei polinomi a numeratore ed a denominatore della funzione  $\det [I + F(s)]$ . Per il numeratore, utilizzando il criterio di Routh e le notazioni adottate negli esempi del par. 8 del Cap. I, si ottiene la tabella:

6	1	13	99	375	(1)
5	6	52	30		(1)
4	26	564	2250		(6)
3	-127	-794			(1.625)
2	-2831	-15875			(7.05)
1	23452				(283.1)
0	-15875				(1)

da cui è immediato dedurre la presenza di tre radici con parte reale positiva. Il denominatore, viceversa, non ha radici con parte reale positiva ma solo due radici con parte reale nulla (si verifica per sostituzione diretta che il polinomio in questione ha radici in 0, in -1 e in -2, tutte doppie).

Si conclude allora che il rapporto  $d_{CH}(s)/d_{AP}(s)$  ha tre radici con parte reale positiva o, il che è lo stesso, che il polinomio  $d_{CH}(s)$  ha tre radici con parte reale positiva in più di quelle eventualmente possedute da  $d_{AP}(s)$  (peraltro non note). La rappresentazione del sistema ad anello chiuso è dunque certamente instabile.

\*

## CAPITOLO III

## STABILITÀ DELLE RAPPRESENTAZIONI DI SISTEMI INTERCONNESSI (rappresentazioni non lineari).

### III.1 - Definizione del problema.

In questa sezione si studierà la stabilità di un sistema a controreazione del tipo indicato in fig. 1.1, caratterizzato dalla presenza, nella catena diretta, di un dispositivo non lineare. Questo ultimo è supposto *istantaneo, stazionario, ad un solo valore* ed è quindi descrivibile attraverso una funzione:

$$(1.1) \quad m = f(e)$$

che stabilisce il legame tra il valore dell'ingresso e quello dell'uscita ad un qualunque istante  $t$ .

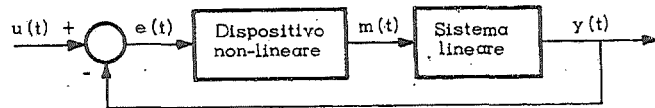


Fig. 1.1

Il sistema lineare può essere descritto mediante equazioni differenziali ingresso-stato-uscita, del tipo:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}m(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

(con  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  rispettivamente  $n \times n$ ,  $n \times 1$ ,  $1 \times n$ ) ovvero, in ipotesi di completa raggiungibilità e completa osservabilità dello spazio di stato associato alla (1.2), dalla funzione di trasferimento:

$$(1.3) \quad G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Nel seguito si assumeranno valide tali ipotesi.

La rappresentazione ingresso-stato uscita del sistema di fig. 1.1 si ottiene combinando le (1.2) con la (1.1) ed assume la forma:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}f(u(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Se la <sup>non</sup>linearità soddisfa la condizione:

$$(1.5) \quad f(0) = 0$$

L'origine dello spazio di stato del sistema descritto dalle (1), (4)<sup>(1)</sup> è un punto di equilibrio. Ha senso quindi investigare se è possibile stabilire condizioni sotto le quali detto punto di equilibrio è *asintoticamente stabile*, o, anche, *asintoticamente stabile in grande* (globalmente). A tale studio è dedicata la presente sezione.

### III.2 - La congettura di Aizerman.

Il problema formulato nel paragrafo precedente fu inizialmente considerato dal matematico M.A. Aizerman il quale, nel 1949, enunciò una famosa congettura intesa a risolvere il problema riconducendone lo studio a quello di un caso lineare.

**Congettura.** Si supponga di considerare il caso particolare in cui la funzione (1.1) risulta lineare (caratterizzata quindi da una relazione:

$$(2.1) \quad m = k e$$

(1) - Si ammette anche, implicitamente, che la funzione (1.1) sia tale garantire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni delle (1.4) e che questa soddisfi alle condizioni che caratterizzano le rappresentazioni ingresso-stato-uscita.

nella quale  $k$  assume il ruolo di coefficiente di guadagno) e si supponga che il sistema corrispondente sia, ad anello chiuso, asintoticamente stabile per tutti i valori di  $k$  compresi nell'intervallo:

$$(2.2) \quad k_1 < k < k_2$$

È corretto concludere che l'origine dello spazio di stato del sistema contenente il dispositivo non lineare è asintoticamente stabile in grande se la funzione non lineare soddisfa la condizione:

$$(2.3) \quad k_1 < \frac{f(e)}{e} < k_2$$

per ogni  $e \neq 0$ ?

In altre parole, è lecito giudicare la stabilità di un sistema non lineare considerando un sistema lineare associato in cui il guadagno dell'anello di reazione possa assumere tutti i possibili valori assunti dal rapporto  $f(e)/e$ ? In altri termini ancora, riferendosi al grafico di fig. 2.1,

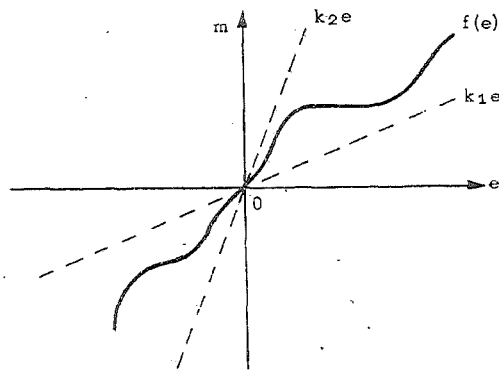


Fig. 2.1

se il grafico della funzione (1.1) è tutto incluso nella regione delimitata da due rette di pendenza  $k_1$  e  $k_2$  e se il sistema lineare che si ottiene sostituendo alla (1.1) un elemento lineare di guadagno  $k$  è stabile per tutti i valori di  $k$  compresi nell'intervallo  $(k_1, k_2)$ , si può dire che è stabile anche il sistema non lineare?

È stato mostrato che tale congettura è, in generale, falsa; è infatti possibile costruire sistemi che soddisfano alle condizioni poste dalla congettura ma che non ne rispettano le conclusioni.

Al di là dell'importanza, puramente storica, di tale congettura, rimane tuttavia l'interesse allo studio del problema della stabilità del sistema di fig. 1.1 nei termini considerati da Aizerman. Se non è vera la congettura, è possibile stabilire altre condizioni per la stabilità asintotica in grande del sistema di fig. 1.1, quando la funzione (1.1) sia caratterizzata mediante un vincolo del tipo (2.3) (o del tipo indicato in figura 2.1)? Tale problema prende anche il nome di *problema della stabilità assoluta* ed il suo interesse risiede soprattutto nel fatto che, in esso, si caratterizza il dispositivo non-lineare precisando *soltanto* il settore al quale appartiene il grafico della funzione (1.1). L'interesse di ciò, da un punto di vista ingegneristico, è evidente.

Prima di passare all'esposizione di condizioni che ne consentono la soluzione è opportuno, per familiarizzarsi con il problema, analizzare alcuni tipi di non linearità che possono presentarsi comunemente. In un fenomeno di saturazione (cfr. fig. 2.2a) si ha:

$$(2.4) \quad 0 < \frac{f(e)}{e} \leq k \quad (\text{per } e \neq 0)$$

mentre in uno di soglia (cfr. fig. 2.2b),

$$(2.5) \quad 0 \leq \frac{f(e)}{e} < k \quad (\text{per } e \neq 0)$$

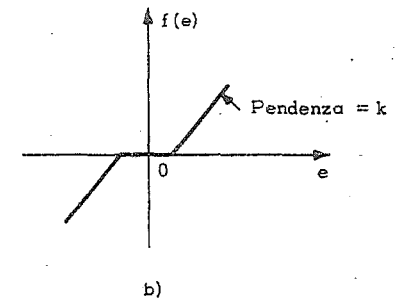
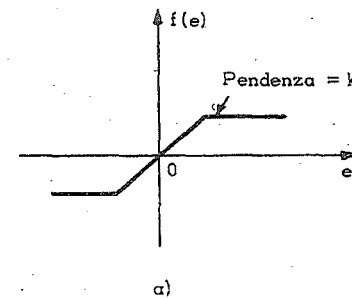


Fig. 2.2

Le (2.4) e (2.5) non sono precisamente della forma (2.3) per la presenza del segno di uguaglianza; è possibile tuttavia ricondursi ad essa ponendo, per la prima,  $k_1 = 0$  e  $k_2 = k + \epsilon$  e, per la seconda,  $k_1 = -\epsilon$  e  $k_2 = k$ , con  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere. Si esamineranno a fondo nella sezione successiva, le conseguenze di tali posizioni.

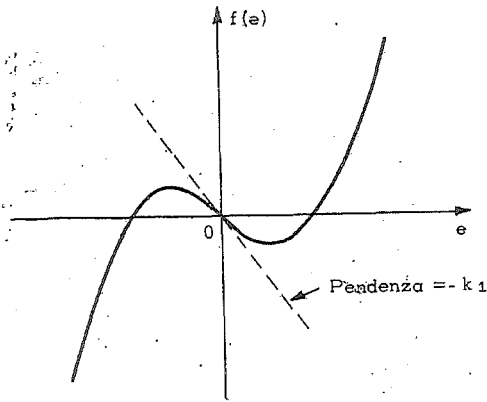


Fig. 2.3

Si noti infine che, per una non linearità di tipo cubico (cfr. figura 2.3), risulta:

$$(2.6) \quad -k_1 < \frac{f(e)}{e} < \infty \quad (\text{per } e \neq 0)$$

da cui si vede che, nella (2.3), è anche possibile che uno dei due valori  $k_1, k_2$  assuma valore infinito.

### III.3 - Il Teorema di Popov.

Il criterio di stabilità che si discuterà più avanti deriva dal seguente risultato, stabilito da V.M. Popov nel 1959:

**Teorema.** Sia dato il sistema descritto dalle equazioni (1.4). L'origine dello spazio di stato è asintoticamente stabile in grande se:

a) esiste un numero reale  $k > 0$  tale che si possa scrivere:

$$(3.1) \quad 0 < \frac{f(e)}{e} < k$$

b) esiste un numero reale  $\alpha$  tale che la funzione<sup>(1)</sup>:

(1) - Sono esclusi eventuali valori di  $\alpha$  tali che il fattore  $(1 + \alpha s)$  si cancelli con un uguale fattore a denominatore nella  $G(s)$ .

$$(3.2) \quad (1 + \alpha s) G(s) + \frac{1}{K}$$

sia una funzione reale positiva.

**Commento.** Una funzione  $F(s)$  di variabile complessa si dice reale positiva se:

- 1) non ha poli con parte reale positiva;
- 2) suoi poli con parte reale nulla sono tutti semplici e con residui reali e positivi;
- 3)  $\text{Re}[F(j\omega)] \geq 0$  per  $0 \leq \omega < \infty$ .

**Prova.** Il Teorema di Popov viene in genere provato mostrando l'esistenza di una funzione di Lyapunov per il sistema in esame. Il lettore interessato può consultare il volume di J.L. Willems: «Stability Theory of Dynamical Systems» (Nelson, 1970), alle pagg. 149-152. <

L'applicazione di questo risultato al problema della stabilità assoluta si traduce in un criterio di facile impiego. Per esaminare questo punto conviene distinguere alcune situazioni ed, innanzitutto, partire dalla considerazione del caso in cui la funzione  $G(s)$  non ha poli con parte reale positiva o nulla. In questo caso la condizione sulla funzione (3.2) si riduce alla condizione: *(Non controllato a zero)*

$$(3.3) \quad \text{Re} \left[ (1 + \alpha j\omega) G(j\omega) + \frac{1}{k} \right] \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, \infty]$$

che può essere utilizzata molto facilmente se si dispone del diagramma di Nyquist della funzione  $G(j\omega)$ .

Posto:

$$(3.4) \quad G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)]$$

e definita una funzione  $\bar{G}(j\omega)$  avente come parte reale la funzione  $\text{Re}[G(j\omega)]$  e come parte immaginaria la funzione  $j\omega \cdot \text{Im}[G(j\omega)]$ :

$$(3.5) \quad \bar{G}(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\omega \text{Im}[G(j\omega)]$$

la condizione (3.3) si riduce ad una condizione grafica sulla  $\bar{G}(j\omega)$ . Indicate con  $x$  ed  $y$  la parte reale e, rispettivamente, il coefficiente della parte immaginaria di tale funzione, la (3.3) diviene evidentemente:



$$(3.6) \quad x - ay + \frac{1}{k} \geq 0$$

ovvero:

$$(3.7) \quad x \geq ay - \frac{1}{k}$$

Tale condizione equivale, nel piano complesso, alla condizione che i punti di coordinate  $(x, y)$  (vettori rappresentativi di  $\bar{G}(j\omega)$ ) si trovino alla destra di una retta che interseca l'asse reale sul punto  $(-1/k)$  e di pendenza  $\alpha$ . La (3.3) è quindi soddisfatta se il grafico  $\bar{G}(j\omega)$  è tutto compreso nel semipiano a destra di tale retta (cfr. figura 3.1).

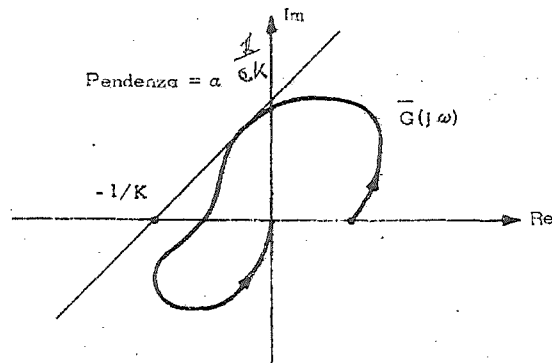


Fig. 3.1

Con questa interpretazione della (3.3) il Teorema di Popov può essere utilizzato, nel caso in esame, nel presente modo:

- si stabilisce se la non-linearità soddisfa ad una condizione del tipo (3.1) e si determina k;
- si costruisce, a partire dal grafico della funzione  $G(j\omega)$ , il grafico modificato  $\bar{G}(j\omega)$ ;
- si verifica se è possibile tracciare una retta, passante per il punto  $(-1/k + j0)$  che lasci il grafico di  $\bar{G}(j\omega)$  alla sua destra.

Se ciò è possibile le condizioni previste dal Teorema di Popov sono soddisfatte e, quindi, si può asserire che  $x = 0$  è uno stato di e-

quilibrio asintoticamente stabile in grande per il sistema in esame. Si noti che, essendo la condizione sufficiente, nulla si può dire nel caso che non sia possibile soddisfare alle condizioni del Teorema.

La procedura sopra descritta è una procedura di verifica di stabilità di un sistema assegnato. Si può tuttavia invertire il procedimento per ottenere indicazioni relative alla sintesi della funzione non-lineare (1.1), i passi sono i seguenti:

- si costruisce, a partire dal grafico della funzione  $G(j\omega)$ , il grafico modificato  $\bar{G}(j\omega)$ ;
- si verifica se è possibile tracciare una retta che lasci il grafico di  $\bar{G}(j\omega)$  alla sua destra;
- si determina l'intersezione  $-1/k$  di tale retta con l'asse reale.

Se ciò è possibile, il valore  $k$  è tale che, per tutte le non linearità che soddisfano alle condizioni:

$$(3.8) \quad 0 < \frac{f(e)}{e} < k.$$

il sistema in esame ha in  $x = 0$  uno stato di equilibrio asintoticamente stabile in grande. Si badi ancora che, essendo la condizione sufficiente, non è escluso che non linearità esterne al settore previsto dalla (3.8) possano comunque assicurare la stabilità.

È interessante confrontare l'applicazione del criterio di Popov con il criterio di Nyquist relativo al caso lineare. Riferendosi al cosiddetto caso della stabilità regolare [cioè al caso in cui la funzione  $G(j\omega)$  ha al più una sola intersezione con il semiasse reale negativo] e posto  $f(e) = \bar{k}e$  il criterio di Nyquist comporta la verifica che in corrispondenza a tale intersezione ( $\text{Im} [G(j\omega)] = 0$ ) si abbia:

$$(3.9) \quad \bar{k} \text{Re} [G(j\omega)] > -1$$

In termini di funzione  $\bar{G}(j\omega)$ , poichè questa differisce dalla  $G(j\omega)$  solo in quanto la parte immaginaria è moltiplicata per  $\omega$ , la (3.9) si riscrive negli stessi termini:

$$(3.10) \quad \bar{k} \text{Re} [\bar{G}(j\omega)] > -1$$

Poichè inoltre, considerato un qualsiasi numero reale  $k > \bar{k}$  si ha:

$$(3.11) \quad 0 < \frac{f(e)}{e} = \bar{k} < k$$

affinchè valga la (3.10) è sufficiente che valga la relazione:

$$(3.12) \quad \text{Re} [\bar{G}(j\omega)] \geq -\frac{1}{k}$$

Si vede quindi che, nel caso lineare, utilizzando il criterio di Nyquist, si ha stabilità asintotica allorchè l'intersezione della curva rappresentativa di  $\bar{G}(j\omega)$  con l'asse reale si trova alla destra del punto  $(-1/k + j0)$ . Questa osservazione consente di stabilire facilmente il legame tra i due criteri.

III.4 - Estensioni del criterio.

Il Teorema enunciato nel paragrafo precedente può essere utilizzato per trattare casi più generali di quello considerato sopra.

Nel caso che la funzione  $G(s)$  abbia poli con parte reale nulla, semplici, e non abbia poli con parte reale positiva, il risultato del Teorema può essere utilizzato direttamente imponendo, oltre alla condizione (3.3) (o alla traduzione di questa in forma grafica), anche la condizione che i poli con parte reale nulla della (3.2) abbiano residui reali e positivi. Nel caso particolare, ma di notevole interesse, in cui l'unico polo di  $G(s)$  sull'asse immaginario sia un polo nell'origine, il residuo corrispondente:

$$(4.1) \quad R_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 + as) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$$

è pari evidentemente al guadagno  $K_G$  della funzione; di conseguenza, alla (3.3) si dovrà aggiungere la condizione:

$$(4.2) \quad K_G > 0$$

Nel caso in cui la funzione  $G(s)$  abbia anche poli con parte reale positiva, il risultato del Teorema precedente può essere utilizzato avvalendosi delle seguenti considerazioni. Sia dato il sistema di figura 1.1, descritto dalle (1.1) e (1.2), e si ponga in esso:

$$(4.3) \quad m(t) = f(e(t)) + h y(t) - h y(t)$$

essendo  $h$  una costante reale.

Tale sostituzione ovviamente lascia inalterate le equazioni che descrivono il sistema (e quindi la stabilità dell'origine dello spazio di stato); ad essa corrisponde lo schema di fig.4.1. Ai fini dello studio della stabilità (cioè quando  $u(t) = 0$ ) detto schema può essere modificato spostando uno dei due blocchi che controeleggono il sistema lineare; si perviene così lo schema di fig.4.2.

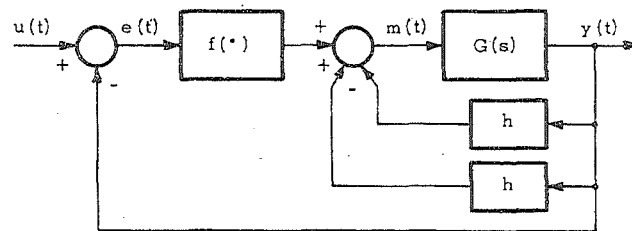


Fig.4.1

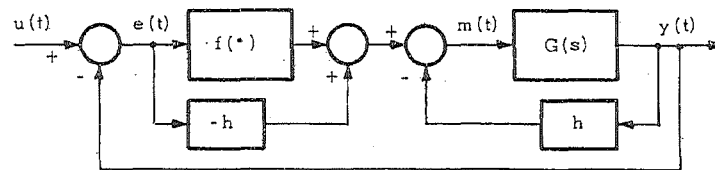


Fig.4.2

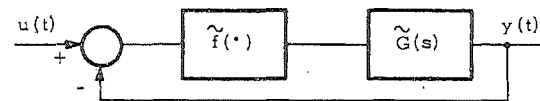


Fig.4.3

Chiaramente, detto schema è ancora del tipo indicato in fig.1.1, purchè si consideri un sistema lineare (cfr. fig.4.3) avente funzione di trasferimento:

$$(4.4) \quad \tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + h G(s)}$$

ed un dispositivo non-lineare caratterizzato da una funzione:

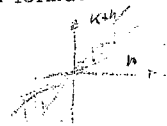
$$(4.5) \quad \tilde{f}(e) = f(e) - he$$

Al sistema così ottenuto si può applicare il Teorema di Popov. Si noti che, in questo caso, alla condizione (3.11) va sostituita la condizione:

$$(4.6) \quad 0 < \frac{\tilde{f}(e)}{e} < k$$

che, tenendo presente la (4.5), si riscrive nella forma:

$$(4.7) \quad h < \frac{f(e)}{e} < k + h$$



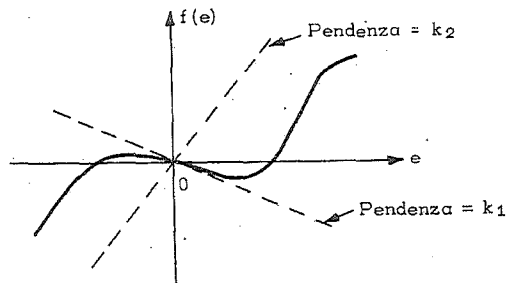
Nella (3.2) in luogo di  $G(s)$  va sostituita la funzione  $\tilde{G}(s)$  fornita dalla (4.4).

Queste considerazioni consentono di generalizzare il Teorema di Popov sia al caso in cui la funzione  $G(s)$  abbia poli con parte reale positiva, sia al caso in cui il vincolo sulla funzione non lineare sia del tipo (4.7) anziché del tipo (3.11) (il primo è più generale del secondo se si ammettono, come è lecito, valori negativi di  $h$ ). Le applicazioni che ne scaturiscono possono essere molteplici e si differenziano, in genere, a seconda che si tratti di problemi di verifica di stabilità o di sintesi di sistemi stabili.

Così ad esempio, se è data una non linearità del tipo indicato in fig. 4.4, con  $k_1 < 0$ , per la verifica della stabilità è sufficiente porre:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} h &= k_1 \\ k &= k_2 - k_1 \end{aligned}$$

Fig. 4.4



e stabilire se, per qualche valore reale di  $\alpha$ , la funzione:

$$(4.9) \quad (1 + \alpha s) \frac{G(s)}{1 + hG(s)} + \frac{1}{k}$$

è una funzione reale positiva. A tal fine, verificato preliminarmente che la (4.9) abbia soltanto poli con parte negativa e al più poli con parte reale nulla semplici e con residui reali positivi, si può applicare il procedimento grafico descritto nel paragrafo precedente, riferito però alla  $\tilde{G}(s)$  anziché alla  $G(s)$ .

Così pure, se è data una funzione  $G(s)$ , per la sintesi di un sistema stabile si determina innanzitutto se è possibile trovare valori di  $h$  in corrispondenza ai quali la (4.9) abbia soltanto poli con parte reale negativa e al più poli con parte reale nulla semplici e con residui reali positivi (in tale circostanza è evidentemente possibile prescindere dall'addendo  $1/k$ ). In caso affermativo si passa a stabilire se esiste un valore di  $k$  che renda soddisfatta l'ulteriore condizione prevista dal criterio (servendosi del procedimento grafico descritto in precedenza).

Se il risultato è ancora positivo, i valori di  $h$  e  $k$  così trovati individuano, tramite le (4.8) e (4.9) il settore del piano in cui può essere compreso il grafico della non linearità affinché si abbia stabilità.

L'aver potuto generalizzare il Teorema di Popov a casi in cui la limitazione sulla funzione non lineare è del tipo (4.7), consente, in particolare, di trattare quelle funzioni (cfr. par. 2) in cui sia:

$$(4.10) \quad 0 \leq \frac{f(e)}{e} < k_2$$

ponendo:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} h &= -\varepsilon \\ k &= k_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

con  $\varepsilon > 0$  piccolo a piacere; in questo caso i poli della funzione (4.9) sono le radici dell'equazione:

$$(4.12) \quad 1 - \varepsilon G(s) = 0$$

Ricordando il fatto che  $G(s)$  è una funzione razionale propria e la teoria del luogo delle radici (negativo) constatata facilmente che, se  $G(s)$  ha tutti i poli con parte reale negativa, per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo anche la (4.12) ha tutte le radici con parte reale negativa. Il

criterio di Popov si riduce quindi ad esaminare se è possibile trovare un valore reale  $\alpha$  tale che risulti:

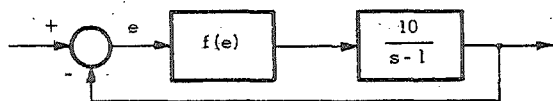
$$(4.13) \quad \operatorname{Re} \left[ (1 + \alpha j \omega) \left[ \frac{G(j\omega)}{1 - \varepsilon G(j\omega)} + \frac{1}{k} \right] \right] \geq 0 \quad \omega \in [0, \infty)$$

Detta condizione può venire tradotta in forma grafica esaminando se esiste una retta, passante per il punto  $(-1/k + j0)$ , che lasci alla sua destra la curva rappresentativa della funzione:

$$(4.14) \quad \operatorname{Re} \left[ \frac{G(j\omega)}{1 - \varepsilon G(j\omega)} \right] + j\omega \operatorname{Im} \left[ \frac{G(j\omega)}{1 - \varepsilon G(j\omega)} \right]$$

In effetti, però, per  $\varepsilon \rightarrow 0$  la funzione  $G(j\omega)/(1 - \varepsilon G(j\omega))$  converge (uniformemente in  $\omega$ ) alla funzione  $G(j\omega)$ . Da questo è possibile dedurre che, in corrispondenza ad ogni coppia di valori  $\alpha$  e  $k$  che soddisfano la (4.13) esiste una coppia di valori  $a$  e  $k$  che soddisfano la (3.3), e viceversa. Tenuto conto di ciò, il criterio grafico può essere direttamente applicato alla funzione (3.5).

**Esempio.** Sia dato lo schema indicato in figura:



Si vogliono determinare limitazioni per la non linearità istantanea in modo tale che la rappresentazione risulti stabile asintoticamente.

Poichè la funzione  $G(s)$  presenta un polo con parte reale positiva, occorre in questo caso utilizzare l'estensione del criterio che prevede la sostituzione di  $G(s)$  con la funzione  $\tilde{G}(s)$  data dalla (4.4). Si ha in questo caso:

$$\tilde{G}(s) = \frac{\frac{10}{s-1}}{1 + h \frac{10}{s-1}} = \frac{10}{s-1+10h}$$

Per valori di  $h \geq 0.1$  la  $\tilde{G}(s)$  non ha più poli con parte reale positiva; per  $h = 0.1$  ha un polo con parte reale nulla ma il corrispondente residuo (guadagno della  $\tilde{G}(s)$ ) è reale e positivo, il che è in accordo con quanto richiesto a proposito del carattere reale positivo della funzione (3.2). Posto allora  $h = 0.1$  si può procedere al calcolo della funzione modificata:

$$\bar{G}(j\omega) = \operatorname{Re} [\tilde{G}(j\omega)] + j\omega \operatorname{Im} [\tilde{G}(j\omega)]$$

che assume in questo caso la forma:

$$\bar{G}(j\omega) = 0 + j\omega \frac{10}{-\omega} = -j10$$

Poichè la funzione degenera nel punto di ascissa  $-10$  dell'asse immaginario, si può tracciare la retta di Popov con:

$$-\frac{1}{k} = 0$$

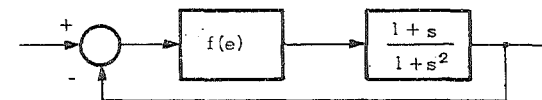
e cioè con  $k = \infty$ .

Corrispondentemente, per  $f(e)$  risulta la limitazione:

$$0.1 < f(e) < \infty$$

entro la quale la rappresentazione è stabile asintoticamente.

**Esempio.** Sia dato lo schema indicato in figura:

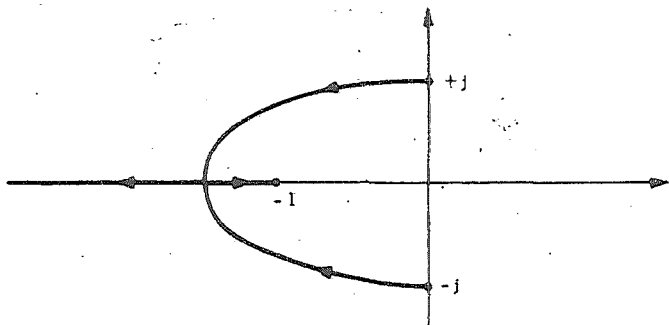


Si vogliono determinare le limitazioni per la non linearità istantanea in modo tale che la rappresentazione risulti stabile asintoticamente.

In questo caso  $G(s)$  ha due poli immaginari puri ma i corrispondenti residui:

$$R_j = \lim_{s \rightarrow j} (s-j) \frac{1+s}{1+s^2} = \frac{1-j}{2} = R_{-j}^*$$

risultano non reali. Occorre allora procedere all'applicazione del criterio nella forma estesa. Per determinare se esistono valori di  $h$  in corrispondenza ai quali  $\tilde{G}(s)$  non abbia poli con parte reale positiva o nulla è utile prendere in esame il luogo delle radici associato alla funzione  $G(s)$ , che assume la forma seguente:



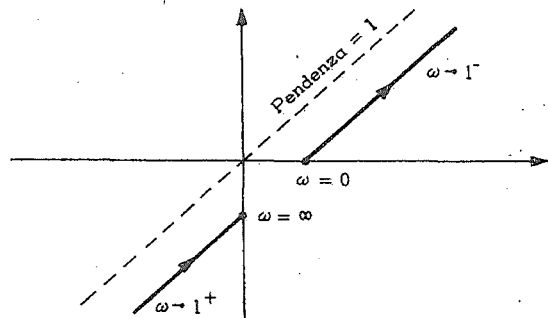
Al variare di  $h$  da 0 ad  $\infty$  i poli di  $\tilde{G}(s)$  percorrono i rami del luogo nel senso indicato dalle frecce. È quindi sufficiente per  $h$  un qualsiasi valore positivo per assicurare che  $\tilde{G}(s)$  abbia poli con parte reale negativa.

Per eseguire un tracciamento qualitativo del diagramma polare della funzione  $\tilde{G}(j\omega)$  modificata conviene procedere dapprima al tracciamento di tale diagramma relativamente alla funzione  $G(j\omega)$  modificata, che in questo caso assume la forma:

$$\bar{G}(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2} + j\omega \frac{\omega}{1-\omega^2} = x + jy$$

$y = \omega^2 x$   
 $x = \frac{1}{1-\omega^2}$

Il diagramma polare di questa funzione presenta un andamento del tipo indicato nella figura seguente:



$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)x = 1$$

$$x - y = 1$$

che risulta tutto a destra di una retta passante per l'origine e di pendenza unitaria. Se ora si considera la funzione:

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+hG(j\omega)} \cdot \frac{(1+hG^*(j\omega))}{(1+hG^*(j\omega))}$$

è facile verificare che sussistono le relazioni:

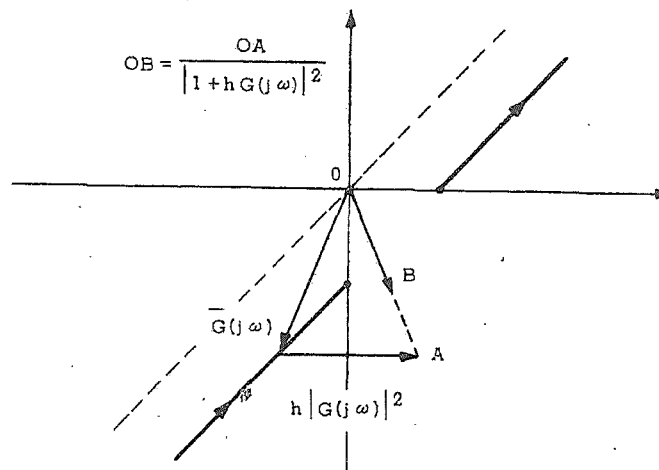
$$\text{Re}[\tilde{G}(j\omega)] = \frac{\text{Re}[G(j\omega)] + h|G(j\omega)|^2}{|1+hG(j\omega)|^2}$$

$$\text{Im}[\tilde{G}(j\omega)] = \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{|1+hG(j\omega)|^2}$$

grazie alle quali la funzione  $\tilde{G}(j\omega)$  modificata si può porre nella forma:

$$\text{Re}[\tilde{G}(j\omega)] + j\omega \text{Im}[\tilde{G}(j\omega)] = \frac{\bar{G}(j\omega) + h|G(j\omega)|^2}{|1+hG(j\omega)|^2}$$

Per ogni  $\omega$  l'espressione a secondo membro individua un numero complesso cui corrisponde un vettore che si trova comunque alla destra della retta passante per l'origine e di pendenza unitaria (vedi figura).



La condizione di Popov è allora soddisfatta con  $l/k = 0$  ed  $\alpha = 1$  e, pertanto, si può concludere che non-linearità che soddisfino la limitazione:

$$0 < h < \frac{f(e)}{e} < \infty$$

assicurano la stabilità asintotica.

\*

INDICE

## INDICE

### CAPITOLO I: Fondamenti.

I. 1 - Generalità.	1
I. 2 - Situazioni dinamiche di interesse.	3
I. 3 - Definizioni di stabilità.	6
I. 4 - Alcune proprietà delle rappresentazioni lineari.	11
I. 5 - Condizioni di stabilità per rappresentazioni lineari a dimensione finita.	15
I. 6 - Il metodo di Lyapunov.	21
I. 7 - Applicazione del metodo di Lyapunov al caso di rappresentazioni lineari e stazionarie.	27
I. 8 - Criteri di Routh e di Jury.	33
I. 9 - Analisi della stabilità di rappresentazioni non-lineari per mezzo dell'approssimazione lineare.	42
I.10 - Le regioni di stabilità asintotica.	48
I.11 - La stabilità «esterna» nelle rappresentazioni lineari.	56
I.12 - Sulle proprietà di stabilità interna delle realizzazioni di una matrice di risposte impulsive.	62

### CAPITOLO II: Stabilità delle rappresentazioni di sistemi interconnessi (rappresentazioni lineari).

II. 1 - Considerazioni introduttive.	65
II. 2 - Una proprietà dei sistemi reazionati.	70
II. 3 - Stabilità dei sistemi reazionati ad un solo ingresso ed una sola uscita (criterio di Nyquist).	72
II. 4 - Ulteriori considerazioni pratiche a proposito dell'impiego del criterio di Nyquist.	83
II. 5 - Stabilità dei sistemi reazionati a più ingressi e più uscite.	93

**CAPITOLO III : Stabilità delle rappresentazioni di sistemi interconnessi (rappresentazioni non lineari).**

III. 1 - Definizione del problema.	104
III. 2 - La congettura di Aizerman.	105
III. 3 - Il Teorema di Popov.	108
III. 4 - Estensioni del criterio.	112

\*

FINITO DI STAMPARE  
Giugno 1977