PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
7 FEBBRAIO 2018

ESERCIZIO 1. Sia $f_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare definita come $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$ con

$$A = \begin{pmatrix} i & i & i \\ 1 & 0 & i \\ 3 & 2 & 2+i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

(a) Trovare equazioni cartesiane e parametriche dell'immagine di f_A.
(b) Trovare una base del nucleo di f_A.
(c) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{C}$ il vettore

$$v_k := \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

appartiene all'immagine di f_A.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio U di equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.
(a) Trovare una base ortonormale di U.
(b) Determinare il complemento ortogonale di U.
(c) Trovare il punto di U più vicino a $P = (1, -1, 2, 3)$.

ESERCIZIO 3. Si consideri $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, con la base canonica. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare così definita

$$f(1) = 1 - 3x - x^2\,, f(x) = -4 + x,\ f(x^2) = 3 + x^2.$$

(a) Calcolare gli autovalori e gli autovettori di f.
(b) Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso di risposta affermativa determinare una base di autovettori e scrivere la matrice associata a f in tale base.

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma quadratica

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

(a) Scrivere la matrice A associata a q nella base canonica.
(b) Dire se q è definita positiva, definita negativa o indefinita.
(c) Dire se q ha la stessa forma canonica di Sylvester della forma quadratica reale

$$q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2.$$

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
22 GENNAIO 2019

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi U e W:

$$U =< u_1 = (1,2,-1,2), u_2 = (1,0,1,0) >,$$

$$W =< w_1 = (1,0,-1,2),\ w_2 = (1,1,1,1)\ w_3 = (0,0,h,h) >,$$

con h parametro reale.

(a) Scrivere le equazioni cartesiane del sottospazio U.
(b) Determinare la dimensione di W, $U \cap W$, $U + W$, rispettivamente, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(c) Dire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $U + W$ è somma diretta.

ESERCIZIO 2. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto $P = (1,0,1)$ e incidente l'asse y e la retta s di equazioni $x = 1+t, y = -2t, z = 3-3t$.
(b) Determinare la proiezione ortogonale della retta r sul piano π di equazione $8x + y + 9z + 1 = 0$.
(c) Determinare una base ortogonale della giacitura del piano π.

ESERCIZIO 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z, -2x + y, x + z)$$

(a) Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (1,1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, calcolare la matrice associata a f rispetto a tale base.
(b) Trovare autovalori e autovettori di f.
(c) Dire se f è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 4. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere una forma canonica di Jordan della matrice A.
(b) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice A è nella forma canonica di Jordan trovata.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
24 LUGLIO 2019

ESERCIZIO 1. Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice 2×2 e sia

$$U := \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

(a) Dimostrare che U è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
(b) Dimostrare che $\dim U \geq 2$.
(c) Calcolare $\dim U$ se la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 2. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.
(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta incidente e perpendicolare alle rette

$$r_1 : x = t, y = 2t, z = 2t \quad \text{e} \quad r_2 : x = 1, y = 0, z = t.$$

(b) Calcolare la minima distanza tra r_1 e r_2.
(c) Determinare un piano parallelo a entrambe r_1 e r_2.

ESERCIZIO 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(e_1) = ae_1 + e_2$, $f(e_2) = 2e_1 + ae_2$, $f(e_3) = -e_1 - e_2 + 2e_3$.
(a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
(b) Stabilire, al variare del parametro reale a, se f è diagonalizzabile.
(c) Se esistono valori del parametro a per i quali f è diagonalizzabile trovare una base di autovettori.

ESERCIZIO 4. Sia data la forma quadrica $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.
(a) Dire se $q(x_1, x_2, x_3)$ è definita positiva.
(b) Diagonalizzare $q(x_1, x_2, x_3)$ e determinarne la segnatura.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
12 GIUGNO 2019

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio U di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$.

(a) Determinare una base di U.
(b) Completare la base di U trovata a una base per $\mathbb{R}^4$ e stabilire se essa è una base ortonormale in caso contrario ortonormalizzarla.
(c) Dire se il sottospazio V generato dai vettori $v_1 = (1, 0, 3, -1), v_2 = (0, 1, 2, 1)$, è ortogonale al sottospazio U, motivandone la risposta.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta $r : x = 1+t, y = 3t, z = -2t$.

(a) Determinare le equazioni della retta r_1 simmetrica alla retta r rispetto al piano $\pi : x - y + 2z - 7 = 0$.
(b) Determinare la retta r_2 proiezione ortogonale della retta r sul piano π.
(c) Dire se le rette r, r_2 e $s : 2x + 2z + 1 = x + y + 1 = 0$, individuano un riferimento ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 0, 0) = (-2, -2, -2)$, $f(0, 1, 1) = (-4, -4, -4)$, $f(-1, 1, -1) = (2, -4, 8)$.

(a) Detta A la matrice associata a f rispetto alla base canonica, determinare tale matrice.
(b) Dire se A è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

ESERCIZIO 4. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere una forma canonica di Jordan della matrice A.
(b) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice A è nella forma canonica di Jordan trovata.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A / GEOMETRIA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA- CORSO DI LAUREA IN FISICA
4 FEBBRAIO 2021

ONLINE SU TEAMS

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - kx_2 = x_3 = 0\},$$
$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_4 + x_2 = kx_1 + x_3 = 0\},$$

dove k è un parametro reale.

(a) Determinare una base per U e W, rispettivamente, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
(b) Determinare una base per $U \cap W$, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
(c) Stabilire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U + W = \mathbb{R}^4$.

ESERCIZIO 2 Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino le seguenti rette

$$r : \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni della retta incidente e perpendicolare ad entrambe.
(b) Calcolare la minima distanza tra r e s.
(c) Determinare un piano parallelo ad entrambe le rette r e s.

ESERCIZIO 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito:

$$f(e_1 - e_2) = (k-4)e_1 + (1-k)e_2,$$
$$f(e_1 + e_3) = (k-1)e_1 + e_2 - e_3,$$
$$f(e_1 + e_2 + e_3) = (k-3)e_1 + (1+k)e_2 - e_3,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(a) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.
(b) Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se f è iniettiva, suriettiva.
(c) Per $k = 1$, verificare che f è un isomorfismo e determinare le equazioni di f^{-1}.