Geometria A - Esercizi (10^a Settimana)

1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la conica $\mathcal{C}$ che è il luogo di zeri del seguente polinomio
$$F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 4hx_1x_2$$
   (a) Determinare, se esistono, valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}$ è non degenere.
   (b) Per $h = 2$,
      b1) ridurre $\mathcal{C}$ a una forma canonica
      b2) determinare l'isometria piana che riduce $\mathcal{C}$ alla forma canonica trovata in $b1)$.

2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente polinomio
$$F(x_1, x_2) = 3 + x_1^2 - 2x_1 + 2kx_2 + kx_2^2$$
   (a) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la la conica $\mathcal{C}$ di equazione $F(x_1, x_2) = 3 + x_1^2 - 2x_1 + 2kx_2 + kx_2^2 = 0$ è non degenere.
   (b) Per $k = 1$
      b1) dopo aver verificato che $\mathcal{C}$ è non degenere, ed è una conica a centro, trovare gli assi della conica;
      b2) ridurre $\mathcal{C}$ a una forma canonica
      b3) determinare l'isometria piana che riduce $\mathcal{C}$ alla forma canonica trovata in $b2)$.

3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri la retta $r : x - y + 1 = 0$.
   (a) Scrivere l'equazione della conica $\mathscr{C}$ tangente alla retta r nel punto $P = (1, 2)$ e passante per i punti $A = (1, -1)$, $B = (3, 1)$ $C = (-1, 1)$. Determinare il tipo di conica.
   (b) Determinare la forma canonica metrica di $\mathscr{C}$.
   (c) Determinare l'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella forma canonica determinata.

4. Si consideri il fascio di coniche di equazione:
$$(1 + k)x^2 - y^2 + 2kxy + 2x + 4ky + 1 - 2k = 0$$
   al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Determinare le coniche degeneri del fascio.
   (b) Verificare che per $k = 2$ la conica è non degenere e studiare tale conica.
   (c) Scrivere una forma canonica della conica considerata in (b).

5. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione
$$xy + y^2 + kx^2 + x - 1 = 0.$$
   (a) Determinare il tipo di conica al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   (b) Quando $\mathcal{C}_k$ è degenere determinare le equazioni cartesiane delle rette in cui si decompone.
   (c) Per $k = \frac{1}{4}$ scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_k$.

6. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 5 = 0$.
   (a) Stabilire se $\mathcal{C}$ è una conica a centro e in caso di risposta positiva trovare le coordinate del centro.
   (b) Ridurre $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica.
   (c) Determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ nella forma canonica metrica determinata al punto (b).