

GEOMETRIA A - ESERCIZI (9^a SETTIMANA)

1. Si consideri la matrice Hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare gli autovalori di A .
- (b) Trovare due autovettori ortogonali.
- (c) Trovare la matrice unitaria U tale che ${}^t\overline{U}AU$ sia diagonale.

2. Si consideri la matrice Hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice unitaria U tale che ${}^t\overline{U}AU$ sia diagonale.

3. Una matrice A è detta antihermitiana se ${}^t\overline{A} = -A$.

- (a) Provare che $B - {}^t\overline{B}$ è antihermitiana per ogni matrice complessa quadrata B .
- (b) Se A è antihermitiana provare che A^2 e iA sono hermitiane.
- (c) Se A è antihermitiana provare che gli autovalori di A sono immaginari puri, ovvero sono della forma $i\lambda$ con λ numero reale.

4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se A è unitaria. In caso contrario determinare una base ortonormale (rispetto al prodotto hermitiano standard) per lo spazio $\text{col}(A)$.

5. Si consideri lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 e l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f((x, y, z)) = \left(x + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1\right)$$

- (a) Dire, giustificando la risposta, se f è un'isometria.
- (b) Siano $A = (1, -1, 0)$, $B = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Trovare la distanza $d(f(A), f(B))$.
- (c) Dire, giustificando la risposta, se f ha punti fissi e in caso di risposta positiva trovarli.

6. Scrivere:

- (a) le equazioni della rotazione ρ del piano di centro $P = (1, 2)$ e angolo $\frac{\pi}{3}$.
(Ricordiamo che ρ è detta rotazione di centro P se $\rho(P) = P$)
- (b) le equazioni della riflessione con asse la retta $r : x - y + 1 = 0$