GEOMETRIA A - ESERCIZI ($1^a, 2^a$ SETTIMANA)

1. Sia A un insieme non vuoto e sia $P(A)$ l'insieme delle parti di A. Nell'insieme $P(A)$ definiamo la seguente relazione R):
$$X \sim_R Y \text{ se e solo se } X \subseteq Y$$
Dire di quali proprietà gode la relazione $\sim$.

2. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ definiamo le seguenti relazioni:
   (a) $x \sim y$ se e solo se $y = 2x$;
   (b) $x \sim y$ se e solo se $x > y$.
   Dire, giustificando la risposta, di quali proprietà gode la relazione R.

3. Nell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiamo la seguente relazione R:
$$A \sim_R B \text{ se e solo se essi hanno la stessa distanza dall'origine, con } A, B \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
Verificare che tale relazione è di equivalenza e determinare le classi di equivalenza individuate da essa.

4. Sia $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e sia R la relazione su X definita da
$$(n_1, m_1) \sim_R (n_2, m_2) \iff n_1 - m_1 = n_2 - m_2.$$
Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza e che l'insieme delle classi di equivalenza è in biezione con l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$.

5. Sia $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate a entrate reali. In $M_n(\mathbb{R})$ è definito il prodotto righe per colonne tra matrici.
   (a) Provare che tale prodotto gode della proprietà associativa.
   (b) Provare che tale prodotto gode della proprietà distributiva rispetto alla somma di matrici.
   (c) Dire, giustificando la risposta, se il prodotto di due matrici simmetriche è una matrice simmetrica.

6. Si considerino le seguenti matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calcolare l'entrata di posto $(3, 2)$ della matrice AB.
   (b) Calcolare la seconda riga della matrice AB.

7. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dire se esiste un intero positivo n tale che $A^n = 0$ (con A^n si intende il prodotto di A con se stessa n volte).

8. Trovare due matrici $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ con $AB \neq BA$.

9. Si considerino le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
Stabilire se sono simmetriche o antisimmetriche.

10. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$
Ridurre A a scala per righe e determinare il rango per righe della matrice A.

11. Si considerino i seguenti sottoinsiemi
$$\mathscr{S} := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$$
$$\mathscr{A} := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$$
Verificare che $\mathscr{S}$ e $\mathscr{A}$ sono chiusi rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

12. Determinare il rango della seguente matrice al variare di $h \in \mathbb{R}$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ 2 & h & 1 \\ h & 1 & -h \end{pmatrix}$$

13. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari
$$\begin{cases} hx + y - z = h \\ hx + hy + 2z = -1 \\ x + hy + z = h + 2 \end{cases}$$
    (a) Determinare, se esistono, valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema è compatibile.
    (b) Per i valori di h ottenuti al punto (a), determinare la(e) soluzione(i) del sistema.

14. Si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Trovare l'inversa di A, se esiste.

15. Si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
Dopo aver verificato che A è invertibile, scrivere A come prodotto di matrici elementari.