Geometria A - Esercizi (3^a Settimana)

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

2. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Calcolare la matrice $cof(A)$ dei cofattori di A.

3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & h \\ h & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix}$$
Trovare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $det A = 0$.

4. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2h & -4 \end{pmatrix}$$
Trovare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile.

5. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$$
Dopo aver verificato che è compatibile e ammette un'unica soluzione, applicare la regola di Cramer per trovare l'unica soluzione del sistema.

6. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = kA$ con $k \in \mathbb{R}^*$. Dimostrare che A è invertibile se e solo se $A = kI_n$.

7. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari omogeneo

$$\begin{cases} hx + y + z = 0 \\ hx + y + 2hz = 0 \\ hx + hy = 0 \end{cases}$$

   (a) Determinare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, lo spazio delle soluzioni del sistema dato.
   (b) Dire se esiste qualche valore di h per il quale la terna $(-1, 1, 0)$ appartiene allo spazio delle soluzioni.

8. Dire, giustificando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

   (a) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \,|\, p(0) = 0 = p(1)\}$,
   (b) $V = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}.\}$,
   (c) $T \cup Z$, dove T e Z sono così definiti
   $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = t, y = t, z = 0\},\ Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0\}$.
   (d) $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = 1, z = 0\}$