GEOMETRIA A - GEOMETRIA
ESERCIZI (4^a SETTIMANA) - QUALCHE ESEMPIO DI I PARZIALE

1. Siano $v_1 = (1, 2 - 0, 1), v_2 = (0, 1, 1, -1), v_3 = (2, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Dire, giustificando la risposta, se essi sono linearmente indipendenti.

2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ l'insieme così definito

   $$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

   Dopo aver verificato che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ trovare una sua base.

3. Si consideri il sistema di equazioni lineari omogeneo con matrice dei coefficienti

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   Sia S l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$. Trovare una base per il sottospazio S.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 0)$ e sia U il sottospazio da essi generato. Si consideri il sottospazio

   $$W_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - ty + z = 0,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione dei sottospazi $U + W_t$ e $U \cap W_t$.

5. Si consideri il sottospazio $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
   (a) Trovare una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ che contenga il vettore $x^2 + 2x$, ma non contenga polinomi lineari.
   (b) Scrivere il vettore $1 + 3x^2 + x$ nella base trovata al punto (a).

6. In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'insieme $U := \{(0, t, s, t + s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinare una base per U.
   (b) Sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 1, 1, 0), w_2 = (-1, 2, 1, -1)$. Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $v = (k, 1, k + 2, 1)$ appartenga a W.
   (c) Stabilire se U e W sono supplementari, giustificandone la risposta.

7. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3 nell'indeterminata x e a coefficienti reali, si considerino i polinomi $p(x) = x^3 - x^2, q(x) = x - x^2, r(x) = 1 + x$, $s(x) = x^3 + x,\ t(x) = 1 - x - x^3$. Si considerino inoltre i seguenti sottospazi U e W $U := L(\{p(x), q(x), r(x)\})$ e $W := L(\{s(x), t(x)\})$
   (a) Stabilire se il vettore $s(x) \in U$.
   (b) Determinare una base per il sottospazio somma $U + W$.
   (c) Dire se tale somma è diretta, in caso contrario trovare una base per $U \cap W$.

8. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi: $W = L(\{w_1, w_2, w_3\})$, dove $w_1 = (1, -1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 3, 0, 1)$ e
$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}.$$
   (a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane di W.
   (b) Determinare una base per $U \cap W$ e $U + W$, rispettivamente.

9. Sia U l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
   (a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
   (b) Determinare una base per U.
   (c) Completare la base di U trovata a una base per $\mathbb{R}^4$.

10. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3, si consideri il sottoinsieme
$$U := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} | \, p(-1) = p(3) = 0\}$$
   (a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
   (b) Determinare una base per U.
   (c) Completare la base di U trovata a una base per $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
   (d) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane di U.

I VERIFICA DI GEOMETRIA A

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + hy + hz = 2h \\ hx + y + hz = 2 \\ hx + hy + z = 2h \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Determinare, se esistono, valori del parametro $h \in \mathbb{R}$, per i quali il sistema è compatibile e in caso di sistema compatibile trovare la/e soluzione/i del sistema.

ESERCIZIO 2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e sia

$$U = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(-1) = 0\}.$$

(a) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di V e determinarne una base.

(b) Sia W il sottospazio generato da $\{x^2 - 1, x^3 - x\}$. Calcolare la dimensione e una base di $U \cap W$ e la dimensione e una base di $U + W$

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il punto $A = (1, -1, 1)$.

(a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A, parallela al piano $\alpha : 2x+y-z+1 = 0$ e incidente la retta $s : x-z-1 = y-2z-3 = 0$.

(b) Determinare l'angolo convesso tra la retta r e il piano $\beta : x + y - z - 3 = 0$.

(c) Determinare la distanza del punto $P = (1, 2, 0)$ dalla retta s e il punto $Q \in s$ piú vicino a P.

I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} hx + y + hz = k \\ x + 2hy - hz = 1 \\ -2hy + hz = k \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, lo spazio delle soluzioni del sistema dato.
(b) Dire se esistono valori di h e k per i quali la terna $(1, -1, 0)$ appartiene allo spazio delle soluzioni.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3. Sia

$$U = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(4) = 0\}.$$

(a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
(b) Trovare una base per U.
(c) Si considerino i polinomi: $p_1(x) = x^2 - x^3$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = h - x^3$, con $h \in \mathbb{R}$ e sia W il sottospazio generato da $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. Calcolare:
  (i) una base di W;
  (ii) la dimensione di $U \cap W$ e $U + W$, rispettivamente.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta r di equazioni parametriche $x = 3+t, y = -1+t, z = 2$ e la retta s di equazioni cartesiane $s : y = -2x+5, z = x+2$.

(a) Trovare la minima distanza tra la retta r e la retta s.
(b) Trovare i punti R e S sulle due rette tra loro più vicini.
(c) Dire se il piano π di equazione $2x - y + 3z - 5$ appartiene al fascio di piani individuato dalla retta s.

I Verifica di Geometria A
Corso di Laurea in Matematica - Corso di Laurea in Fisica

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi U e W, dove U è generato dai vettori $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (2,-1,1,0)$, $u_3 = (1,1,h,1)$, con $h \in \mathbb{R}$, e

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | \, x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}$$

(a) Trovare una base di W.
(b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per U.
(c) Determinare una base per $U \cap W$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(d) Trovare un sottospazio supplementare a W.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il punto $P = (3,2,1)$.

(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per P, perpendicolare alla retta $r_1 : \frac{x+1}{3} = y-2 = -\frac{z}{2}$ e incidente la retta $r_2 : x-3y-z = x+7y+z-6 = 0$.
(b) Calcolare la distanza tra la retta r e la retta r_1.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari omogeneo

$$\begin{cases} 2hx - hz = 0 \\ (h-1)x + (h+1)y - hz = 0 \\ x + 3hy - 2hz = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, lo spazio delle soluzioni del sistema dato.
(b) Dire se esistono valori di h per i quali la terna $(0,1,1)$ appartiene allo spazio delle soluzioni.

I - Turno

I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

ESERCIZIO 1. Nello spazio $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i seguenti sottospazi:

U è lo spazio generato dalle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

W è lo spazio generato dalle matrici

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base per i sottospazi $U + W$ e $U \cap W$, rispettivamente.

(b) Sia $S := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 3 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Dire, giustificando la risposta, se S è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano $\pi : 2hy - hz = k$ e la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} hx + y + hz = k \\ x + 2hy - hz = 1 \end{cases}$$

al variare dei parametri reali h, k.

(a) Determinare un vettore direttore della retta r.

(b) Determinare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, la posizione della retta r rispetto al piano π.

(c) Determinare la distanza del punto $P = (1, -2, 3)$ dal piano π che si ottiene per $h = 2, k = 3$.

II - Turno

I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi U e W, dove U è generato dai vettori $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (2,-1,1,0)$, $u_3 = (1,1,h,1)$, con $h \in \mathbb{R}$, e

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | \, x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}$$

(a) Trovare una base di W.
(b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per U.
(c) Determinare una base per $U \cap W$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il punto $P = (1,2,3)$ e la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare tutte le rette passanti per P e perpendicolari alla retta r e l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
(b) Scrivere le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale della retta r sul piano $\pi : 2x - y + z - 3 = 0$.
(c) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.

I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti insiemi
$$U := \{(t, s, 2t, -s) \in \mathbb{R}^4 |\, t, s \in \mathbb{R}\}$$
$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\, x_1 - hx_2 = x_3 = 0\}, \quad \text{con } h \in \mathbb{R}.$$

(a) Dire, giustificando la risposta, se sono sosttospazi vettoriali e in caso di risposta positiva trovare una base di U e W, rispettivamente.
(b) Determinare $\mathrm{dim}(\mathrm{U}+\mathrm{W})$, $\mathrm{dim}\mathrm{U}\cap\mathrm{W}$, rispettivamente, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(c) Trovare un sottospazio supplementare a U.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette
$$r_1 : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione della retta s incidente e perpendicolare ad entrambe le rette date.
(b) Determinare la minima distanza tra r_1 e r_2.
(c) Determinare l'angolo che la retta s forma col piano $\pi : 2x - y + 4z - 1 = 0$, dove s è la retta determinata al punto (a).

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile e in caso di risposta positiva trovare l'inversa per uno dei valori di h trovati.
(b) Si consideri la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
(i) Dire se esiste una matrice C tale che
$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(ii) Se tale C esiste si può dire che C è invertibile?