GEOMETRIA A - ESERCIZI (6^a SETTIMANA)

1. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 1, 2), C = (1, 2, 1), D = (4, 1, -1)$ e sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (a) Determinare l'equazione del piano π passante per i punti A, B e parallelo al vettore $\vec{v} = 2e_1 + 3e_2$.
   (b) Sia r la retta di equazioni parametriche $x = t, y = 2t + k, z = 2t + 3$, con $k \in \mathbb{R}$. Determinare la posizione della retta r rispetto al piano π al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   (c) Dire se i punti A, B, C, D individuano un parallelepipedo e in caso di risposta positiva determinarne il volume.

2. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette di equazioni cartesiane $r : x + y - 1 = 0, y - 2z = 0,\ \ s : x + 2y - z = 0, 3y - z + 2 = 0$.
   (a) Determinare il piano π passante per r e parallelo alla retta s.
   (b) Determinare la retta t passante per $P = (1, 1, 0)$ e incidente sia la retta r che la retta s.

3. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri il piano $\pi : x - 3y + 4z = 0$ e sia $P = (3, 1, 0)$ un punto su tale piano.
   (a) Scrivere le equazioni del fascio di rette contenuto nel piano π e di centro il punto P.
   (b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per $Q = (1, -1, 1)$ e con direzione quella individuata dal vettore $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e dire se la retta r è parallela al piano π.

4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = kt \\ y = -kt + 1 \\ z = t \end{cases}$$

   Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali
   (a) la retta r è parallela al piano $\alpha : x - 3y + z + 1 = 0$.
   (b) la retta r è contenuta nel piano $\beta : y + z - 1 = 0$.
   (c) Si consideri la retta r con $k = 2$. Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per $P = (2, 1, 0)$.

5. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i piani $\pi_1 : x - y + z = 0$, $\pi_2 : 2x + y + z + 1 = 0$, $\pi_3 : x + z + 2 = 0$.
   (a) Dire se i piani dati appartengono o meno allo stesso fascio.
   (b) Determinare la posizione della retta $r : x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = 1 - 4t$, rispetto al piano π_3.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane della retta t passante per il punto $P = (1, -1, 1)$ e complanare con la retta r e con la retta s, dove s è l'intersezione dei piani π_1 eπ_2.

6. In ognuno dei seguenti casi determinare:
   (a) equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per il punto $P = (1, 1, 0)$ e perpendicolare alla retta $x = 4 + t, y = -t, z = -3 + 4t$.
   (b) la proiezione ortogonale della retta r: $2x - y - 3z - 1 = 0, x + 3y - 5z = 0$ sul piano $\pi : x + y - z + 5 = 0$.
   (c) il volume del parallelepipedo individuato dai punti $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (0, 1, 2)$, $D = (1, -1, 3)$, dopo aver verificato che i punti non sono complanari.

7. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ le rette di equazione: $r : x = z, y = -2z + 1$; $s : 2x - z = 0, 2y - 2 = -z$; $t : x = z, y = z + 1$.
   (a) Dire se i vettori direttori delle rette r, s, t formano una base per $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determinare l'angolo tra la retta s e il piano individuato dalle rette r, t.