II VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
10 DICEMBRE 2018

ESERCIZIO 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle seguenti condizioni:

- f ha un autovalore $\lambda = 3$ con relativo autovettore $v = e_1 - e_2$,
- $f(u) = e_1 - 3e_2 + e_3$ e $f^2(u) = -3e_1 + e_2 + e_3$ con $u = e_1 - e_2 + e_3$.

(a) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.
(b) Stabilire se f è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una matrice invertibile C tale che base $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

ESERCIZIO 2. Si consideri lo spazio $M_2(\mathbb{R})$ munito del seguente prodotto scalare

$$< A, B >:= Tr({}^tB \cdot A).$$

(a) Dire se la seguente base di $M_2(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale. In caso contrario ortogonalizzarla.
(b) Sia U il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato da $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare $U^\perp$, il complemento ortogonale di U.
(c) Scrivere $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ come somma di un vettore di U e di un vettore di $U^\perp$,.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si considerino le rette $r_1 : x + y - 1 = 0$ e $r_2 : x - y + 3 = 0$.

(a) Scrivere l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente alla retta r_1 nel punto $P = (1, 0)$ e alla retta r_2 nel punto $Q = (-3, 0)$ e passante per il punto $A = (1, -2)$. Determinare il tipo di conica.
(b) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.
(c) Determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ nella forma canonica determinata.

II Verifica di Geometria A
Corso di Laurea in Matematica - Corso di Laurea in Fisica
9 dicembre 2019

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Stabilire se la matrice C rappresenta la matrice di un cambio di base ortonormale nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

(b) In caso di risposta negativa ortonormalizzare la base costituita dai vettori colonna di C e determinare le coordinate di $v = (-1, 3, 2)$ nella base trovata.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$. Si considerino inoltre i vettori $w_1 = (-3, -2, 1)$, $w_2 = (1, 5, -4)$, $w_3 = (4, 0, -4)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito:

$$f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2,\ f(v_3) = w_3$$

(a) Scrivere la matrice associata a f nella base $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

(c) Studiare la diagonalizzabilità di f.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri la retta $r : x - y + 1 = 0$.

(a) Scrivere l'equazione della conica $\mathscr{C}$ tangente alla retta r nel punto $P = (1, 2)$ e passante per i punti $A = (1, -1)$, $B = (3, 1)$ $C = (-1, 1)$. Determinare il tipo di conica.

(b) Determinare la forma canonica metrica di $\mathscr{C}$.

(c) Determinare l'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella forma canonica determinata.

B

II VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
9 DICEMBRE 2019

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,0,1), v_3 = 1,-1,0)$. Si considerino inoltre i vettori $u_1 = (-1,5,6), u_2 = (2,0,-2), u_3 = (-1,4,5)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito:

$$f(v_1) = u_1,\ f(v_2) = u_2,\ f(v_3) = u_3$$

(a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
(b) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$.
(c) Studiare la diagonalizzabilità di f.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $u_1 = (1,-1,3), u_2 = (0,1,1)$, vettori di $\mathbb{R}^3$.

(a) Dopo aver verificato che sono linearmente indipendenti completare tale insieme a una base di $\mathbb{R}^3$ in modo tale che la base trovata sia ortonormale.
(b) Sia U il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2. Scrivere $v = (-1,3,2)$ come somma di un vettore di U e di un vettore di $U^\perp$.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si considerino le rette $r_1 : x + y + 1 = 0$ e $r_2 : x - y + 5 = 0$.

(a) Scrivere l'equazione della conica $\mathscr{C}$ tangente alla retta r_1 nel punto $P = (0,-1)$ e alla retta r_2 nel punto $Q = (0,5)$ e passante per il punto $A = (1,2)$. Determinare il tipo di conica.
(b) Determinare la forma canonica metrica di $\mathscr{C}$.
(c) Determinare l'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella forma canonica determinata.

I - Turno

II Verifica di Geometria A
Corso di Laurea in Matematica - Corso di Laurea in Fisica
11 gennaio 2021

online su Teams

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Scrivere le equazioni di tutti gli endomorfismi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non suriettivi e tali che $f(e_2) = e_2,\ f(e_3) = e_1 + e_3$.

(b) Tra gli endomorfismi determinati in (a), trovare quelli con autovalore $\lambda = 3$.

(c) Dire se gli endomorfismi determinati in (b) sono diagonalizzabili, giustificando la risposta.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si considerino le rette

$$r_1 : 2x + y = 0 \quad e \quad r_2 : 2x - 13y - 8 = 0.$$

(a) Scrivere l'equazione della conica $\mathscr{C}$ passante per il punto $A = (0, -1)$ e tangente alla retta r_1 nel punto $P = (0, 0)$ e alla retta r_2 nel punto $Q = (4, 0)$. Determinare il tipo di conica.

(b) Determinare la forma canonica metrica di $\mathscr{C}$.

(c) Determinare l'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella forma canonica determinata.

II - Turno

II VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
11 GENNAIO 2021

ONLINE SU TEAMS

ESERCIZIO 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito:

$$f(e_1 - e_3) = e_1 - e_3,\ f(3e_1 + 2e_2 + e_3) = 9e_1 + 6e_2 + 3e_3$$

e avente come nucleo lo spazio generato dal vettore $v = (0, 1, -1)$.

(a) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.
(b) Senza fare alcun conto stabilire se f è diagonalizzabile.
(c) Dire se la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata a f in una qualche base.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri il fascio di coniche

$$\mathcal{C}_k :\ k(x^2 + y^2) + 2xy - 2(1 + k)y - k = 0$$

(a) Determinare le coniche degeneri e i punti base del fascio.
(b) Studiare la conica $\mathcal{C}_2$ che si ottiene per $k = 2$.
(c) Determinarne la forma canonica metrica di $\mathcal{C}_2$ e l'isometria che trasforma $\mathcal{C}_2$ in forma canonica.