Compito di prova, II-parte (K. Engel, A.A. 12/13, Mat. An. 1)

D1. i) cfr. appunti

ii) $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$ dominio di f con $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$

($\iff \forall M \geq 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M\ \forall x \in$ dominio di f con $|x-3| < \delta$.)

D2. i) cfr. appunti

ii) Calcolare $T_5(x)$ per $f(x) = \ln(1 + x\cdot\sin(x))$ e $x_0 = 0$.

Sol: • $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \to 0$

• $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$t = x\cdot\sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)$ per $x \to 0$

$= x^2 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \ln(1 + x\cdot\sin(x)) = x\cdot\sin(x) - \frac{(x\cdot\sin(x))^2}{2} + \frac{(x\cdot\sin(x))^3}{3} + \underbrace{o\Big(\overbrace{(x\cdot\sin(x))^3}^{x^6 = (x^2)^3}\Big)}_{=o(x^6)=o(x^5)}$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right) - \frac{(x^2 + o(x^3))^2}{2} + \frac{(x^2 + o(x^3))^3}{3} + o(x^5)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^5) = x^2 - \frac{1+3}{6}x^4 + o(x^5)$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) \Rightarrow T_5(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^4.$$

E1. Se $f \in C(\mathbb{R})$ t.c. $\boxed{\overset{*}{}(x-1)\cdot f(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{d}\ f(1) = 0.$

Infatti, visto che $(x-1)$ cambia segno in 1 da "$-$" a "$+$" segue che $f(x) \begin{cases} \geq 0 & \forall x < 1 \\ \leq 0 & \forall x > 1 \end{cases}$

Quindi $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \geq 0$

(poiché f è continua) $= \lim_{x\to 1^+} f(x) \leq 0$ $\Big\} \Rightarrow f(1) = 0.$

(permanenza del segno)

E2. $f \in C^1(a,b)$ strett. crescente, $m = \inf f$, $M = \sup f$

$\Rightarrow$ $\boxed{b}$ $f : (a,b) \to (m,M)$ è biettiva.

Infatti visto che f è strett. crescente, è iniettiva. Inoltre è suriettiva per il teorema dei valori intermedi.

E3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sinh(x)} - \cosh(x) - x}{\sin(x)\cdot(1-\cos(3x))} =: \ell \quad \left(= \dfrac{2}{27}\right)$

Sol: • Denominatore: $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$

$1-\cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$ $1-\cos(3x) \sim \frac{(3x)^2}{2} = \frac{9}{2}x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ $\sin(x)\cdot(1-\cos(3x)) \sim \frac{9}{2}x^3$ per $x\to 0$.

• Dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 3° ordine.

$$\left.\begin{aligned} &e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3) \quad \text{per } t\to 0 \\ &\sinh(x) = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3) = x+o(x^2) \quad \text{per } x \to 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$e^{\sinh(x)} = 1+\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{(x+o(x^2))^2}{2}+\frac{(x+o(x^2))^3}{6}+\underbrace{o(\overbrace{\sinh^3(x)}^{\sim x^3})}_{=o(x^3)}$$

$$= 1+x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\Rightarrow e^{\sinh(x)}-\cosh(x)-x = \left(\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}\right)-\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^3)\right)\cancel{-x}$$

$$= \frac{x^3}{3}+o(x^3) \sim \frac{x^3}{3} \quad \text{per } x\to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0}\frac{1/3\cdot x^3}{9/2\, x^3} = \frac{2}{27}$$

E4: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2+\ln(x)$ è invertibile &

calcolare $(f^{-1})'(2)$.

Sol: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0+(-\infty) = -\infty =: m$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty+(+\infty) = +\infty =: M$

$\Rightarrow$ (usare il teorema dei valori intermedi) f è suriettiva. Inoltre f è derivabile con $f'(x) = 4x+\frac{1}{x} > 0 \quad \forall x>0$

$\Rightarrow$ f è strett. crescente $\Rightarrow$ f è iniettiva. Quindi f è invertibile.

Per calcolare $(f^{-1})'(\overset{y_0}{\overset{\shortparallel}{2}})$ serve $x_0 > 0$ t.c. $f(x_0) = y_0 = 2$. Allora $x_0 = 1$

visto che $f(1) = 2\cdot 1^2 + \ln(1) = 2$. Inoltre $f'(1) = 4\cdot 1 + \frac{1}{1} = 5 \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ è derivabile in $y_0 = 2$ con

$$(f^{-1})'(2) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}.$$

ES. Studiare $f(x) = |x|\cdot e^x + 2 = \begin{cases} x\cdot e^x + 2 & \text{se } x \geq 0, \\ -x\cdot e^x + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$. f è continua su $\mathbb{R}$.
- Simmetrie, periodicità: NO.
- Intersezione con gli assi: $f(0) = 2$, $f(x) \geq 2\ \forall x \Rightarrow$ non ci sono zeri.

$$\lim_{x\to-\infty} -x\cdot e^x \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty} t\cdot e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

- Segno di f: $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- Limiti alla frontiera: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x\cdot e^x + 2 = 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^x + 2 = +\infty$

$\Rightarrow y = 2$ è un asintoto orizzontale (per $x\to-\infty$). Studio di un possibile asintoto obliquo per $x\to+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot e^x + 2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(e^x + \frac{2}{x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti obliq.

- Studio di f': f è derivabile $\forall x \neq 0$ con $f'(x) = \begin{cases} x\cdot e^x + 1 e^x = (x+1)\cdot e^x & \text{se } x > 0, \\ -x\cdot e^x - 1 e^x = -(x+1)\cdot e^x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Derivabilità in $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\cancel{h}\cdot e^h + \cancel{2} - \cancel{2}}{\cancel{h}} = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ f'_-(0) &= \lim_{h\to0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{-\cancel{h}\cdot e^h + \cancel{2} - \cancel{2}}{\cancel{h}} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$

Punti critici: $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{Bmatrix} x > 0 \text{ e} \\ (x+1)e^x = 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Mai!}} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{\begin{Bmatrix} x < 0 \text{ e} \\ -(x+1)\cdot \underset{\neq 0}{e^x} = 0 \end{Bmatrix}}_{\Leftrightarrow\, x = -1 \,=\, \text{unico pto. critico}}$$

- Studio di f'':

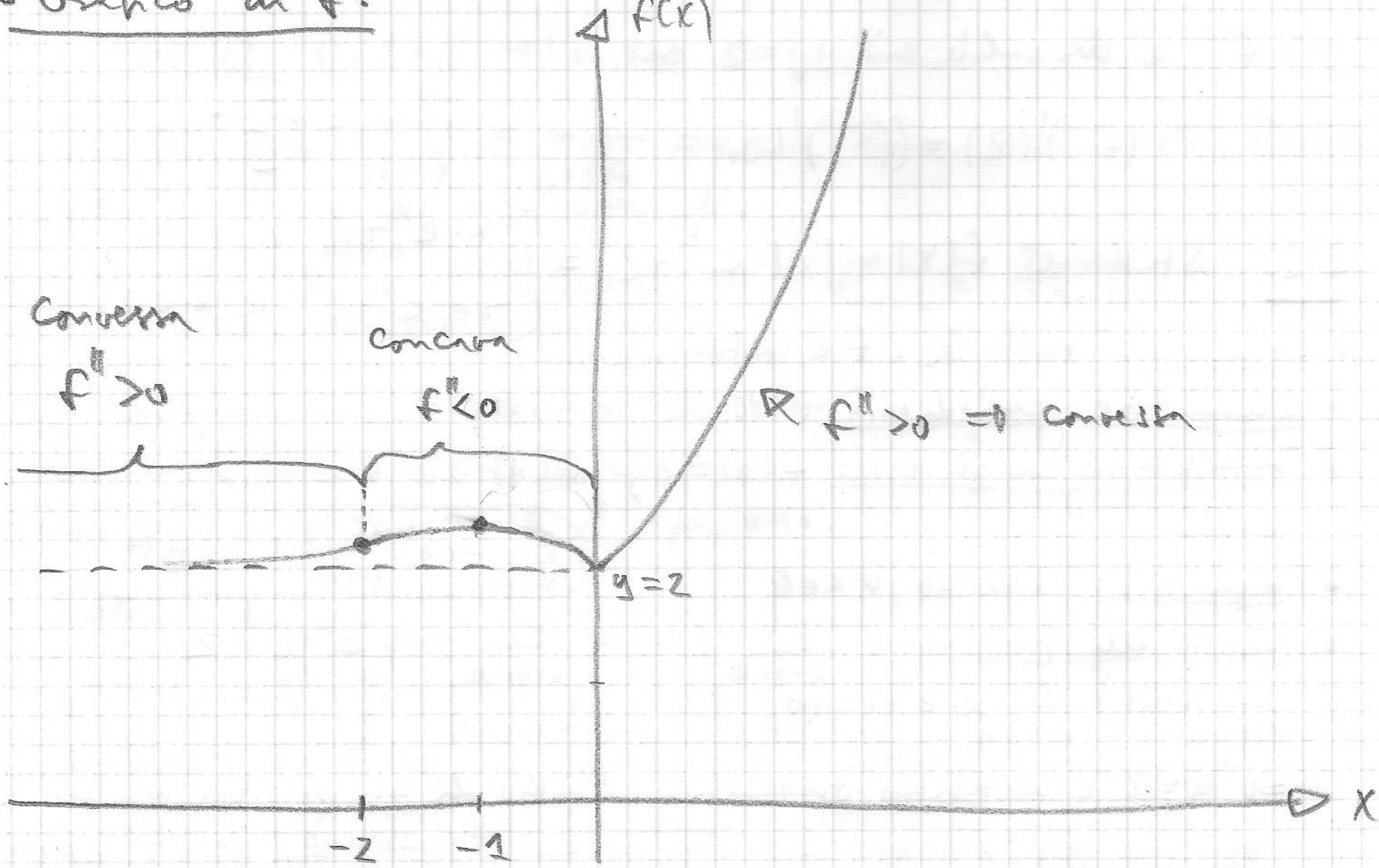
$$f''(x) = \begin{cases} (x+1)e^x + 1\cdot e^x = (x+2)e^x & \text{se } x > 0 \\ -(x+1)e^x - 1\cdot e^x = -(x+2)e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ • $f''(-1) = -(-1+2)\cdot e^{-1} < 0 \Rightarrow x_0 = -1$ è un pto. di max.

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Inoltre $f''(x)$ cambia segno in $x_1 = -2$ da "+" a "−"

$\Rightarrow x_1$ è un pto. di sella.

- Grafico di f:



$f(-1) = e^{-1} + 2 = 2 + \frac{1}{e} \approx 2{,}3\ldots$

$f(-2) = 2e^{-2} + 2 = 2 + \frac{2}{e^2} \approx 2{,}2\ldots$