Soluzioni compito di prova

D1, (ii): $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente ma non inferiormente limitato

D2, (ii): $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge semplicemente ma non assolutamente

E1: risposta giusta: $\boxed{c}$ (per definizione)

E2: —— " ——: $\boxed{b}$ (per definizione)

E3: —— " ——: $\boxed{a}$

Infatti, usando l'ipotesi che $(n+1)\, a_{n+1} \sim a_n$ segue dal principio di sostituzione

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{\cancel{a_{n+1}}}{(n+1)\cdot \cancel{a_{n+1}}} = \frac{1}{n+1} \to 0 .$$

Quindi $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0 = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

E4:
$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}\cdot(n-1)}$$
$$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}}_{\to e^2}\Bigg]^{\overbrace{\frac{n}{n-1}}^{\to 1}} \quad \text{per } n \to +\infty$$
$$\to [e^2]^1 = e^2$$

E5: Utilizziamo il criterio del rapporto per $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}\cdot \cancel{(2n)!}} = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{2n} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$$
$$= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}\cdot(n+1)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \sim \Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}}_{\to e^{-1}}\Bigg]^{\overbrace{\frac{2n}{n+1}}^{\to 2}} \cdot \underbrace{\frac{2n\cdot 2n}{n^2}}_{\to 4}$$
$$\to (e^{-1})^2 \cdot 4 = \left(\frac{2}{e}\right)^2 =: q \underbrace{<}_{(e>2)} 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

$\underline{E6:}$ $A = \left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Sia $a_n := \frac{n^2 + (-1)^n}{n} = n + \frac{(-1)^n}{n}$. Allora,

$$a_{n+1} - a_n = \cancel{n} + 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \cancel{n} - \frac{(-1)^n}{n} \quad - = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$\geq \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) > 0 & \text{se } n \text{ è dispari } (\Leftrightarrow n+1 \text{ è pari}) \\ 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)}_{\text{decrescente in } n} \geq 1 - \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2}\right) > 0 & \text{se } n \text{ è pari } (\Leftrightarrow n+1 \text{ è dispari}) \end{cases}$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente $\Rightarrow$

$\min A = \inf A = a_1 = 1 + \frac{(-1)^1}{1} = 0$

$\sup A = \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, $\max A$ <u>non</u> esiste.