Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **10.1.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C 09/10

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $l = +\infty$ per una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Fare un esempio di una successione divergente al limite $l = +\infty$.

Risposta

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \geq M$ $\forall n \geq n_0$

(ii) Per esempio $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con resto di Peano.

(ii) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 3 di $f(x) = \frac{x}{2} \cdot e^{2x}$.

Risposta

(i) Sia $f \in C^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Allora $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ dove $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ è il polinomio di Taylor

(ii) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$\Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \cdot e^{2x} = \frac{x}{2}(1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)) = \frac{x}{2} + x^2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow T_3(x) = \frac{x}{2} + x^2 + x^3.$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie assolutamente convergente. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n)$

- [a] converge a zero
- [b] converge semplicemente ma non assolutamente
- [c] ~~c~~ converge assolutamente
- [d] converge assolutamente ma non semplicemente

Risoluzione

Per il criterio necessario $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Visto che $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ segue $\sin(a_n) \sim a_n$ per $n \to +\infty$ e $|\sin(a_n)| \sim |a_n|$. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}$ an converge assolutamente per il criterio asintotico del confronto.

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C[-1,1]$ tale che $x \cdot f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [-1,1]$. Allora,

[a] f è dispari [b] esiste $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = 0$ [c] f è decrescente [d] $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$

Risoluzione

Da $x \cdot f(x) \leq 0$ segue

$f(x) \geq 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) \leq 0$ per $x \geq 0$. Quindi

per il teorema degli zeri $\exists$ uno zero $x \in [-1,1]$.

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+2y^2}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$

- [a] è differenziabile in $(0,0)$
- [b] non è derivabile in $(0,0)$
- [c] è continua in $(0,0)$
- [d] non è continua in $(0,0)$

Risoluzione

Per $y = m \cdot x$ segue

$$f(x,y) = \frac{3x \cdot mx}{x^2 + 2m^2x^2} = \frac{3m \cdot x^2}{(1+2m^2)\,x^2} = \frac{3m}{1+2m^2}$$

$$\to \frac{3m}{1+2m^2} \neq 0 \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NON esiste $\Rightarrow$

f non è continua in $(0,0)$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) + x\cdot\ln(1+x) - e^{-x^2}}{x\cdot\sin(x^2)} =: \ell \quad \left(= -\frac{1}{2}\right)$$

Risoluzione

$\sin(x) \sim x$ per $x \to 0 \Rightarrow \sin(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow x\cdot\sin(x^2) \sim x^3$ per $x \to 0$. Quindi si deve sviluppare il numeratore fino al 3° ordine:

- $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \Rightarrow \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x\cdot\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
- $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4)$
  $= 1 - x^2 + o(x^3)$.

$\Rightarrow \cos(2x) + x\cdot\ln(1+x) - e^{-x^2} = \cancel{1} \cancel{-2x^2} + \cancel{x^2} - \frac{x^3}{2} \cancel{-1} \cancel{+x^2} + o(x^3)$
$= -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ (per il principio di sostituzione)

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Sia $f(x,y) = \ln(1+x^2y)$. Calcolare la derivata direzionale di f in $\underbrace{(-1,1)}_{=(x_0,y_0)}$ nella direzione $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Risoluzione

f è derivabile parzialmente con continuità e quindi è differenziabile. Perciò è applicabile il teorema del gradiente:

$D_v f(x_0,y_0) = \text{grad}(f(x_0,y_0)) \cdot v$.

Abbiamo $f_x(x,y) = \frac{2xy}{1+x^2\cdot y} \underset{(x,y)=(-1,1)}{=} \frac{-2}{1+1} = -1$

$f_y(x,y) = \frac{x^2}{1+x^2\cdot y} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \text{grad} f(-1,1) = (-1, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow D_v f(-1,1) = (-1, \frac{1}{2}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

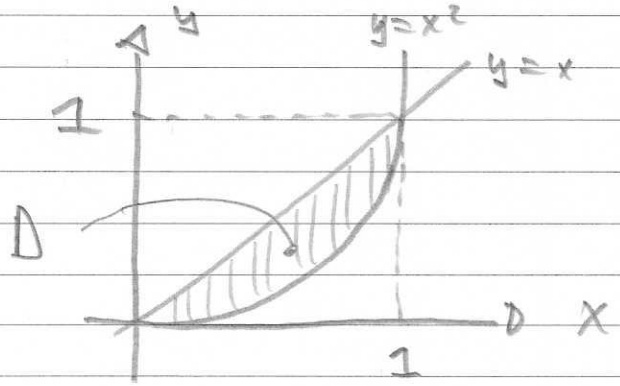
$= -\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Esercizio 6 **[5 punti]**

Disegnare il dominio $D = \{(x, y) : x \in [0, 1],\ x^2 \le y \le x\}$ e calcolare l'integrale doppio $\iint_D 8\,xy^2\,dx\,dy =: I$

Risoluzione

Il dominio è y-semplice:



Quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 8x \cdot y^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[8 \cdot x \cdot \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{8}{3} \cdot x \left(x^3 - x^6 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{8}{3} \cdot \left(x^4 - x^7 \right) dx$$

$$= \left[\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right) \right]_0^1$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{5}$$