Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **10.1.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C 09/10

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza al limite $l \in \mathbb{R}$ per una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Fare un esempio di una successione convergente al limite $l = 3$.

Risposta

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite $l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|l - x_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

(ii) Per esempio la successione

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(3 + \frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

converge al limite $l = 3$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con resto di Lagrange.

(ii) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 3 di $f(x) = 2x \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

Risposta

(i) Sia $f \in C^{n+1}(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Allora $\forall x \in (a,b)$ esiste c fra x e x_0 tale che

$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ dove

$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ è il polinomio di Taylor

(ii) Con uno svolgimento analogo a quello del compito 1-A

segue $T_3(x) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{4}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(a_n)$

[a] converge a uno

[b] diverge a $+\infty$

[c] converge semplicemente ma non assolutamente

[d] è irregolare

Risoluzione

Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie segue $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $\cos(a_n) \to +1$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(a_n) = +\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C[-1,1]$ tale che $x \cdot f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-1,1]$. Allora,

[a] $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \neq 0$ [b] f è crescente [c] f è pari [d] esiste $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = 0$

Risoluzione

Dalla condizione $x \cdot f(x) \geq 0$ $\forall x \in [-1,1]$ segue $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e $f(x) \leq 0$ $\forall x \leq 0$, $x \in [-1,1]$.

Quindi per il teorema degli zeri f ammette uno zero in $[-1,1]$.

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+3y^2}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$

[a] non è derivabile in $(0,0)$

[b] è continua in $(0,0)$

[c] non è continua in $(0,0)$

[d] è differenziabile in $(0,0)$

Risoluzione

Procedendo come nel compito 1-A si verifica che

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NON esiste $\Rightarrow$ f non è

continua in $(0,0)$.

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\ln(1+x) - x^2 \cdot e^x}{x \cdot (1-\cos(x))} =: \ell \quad (= -6)$$

Risoluzione

$1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0 \Rightarrow x \cdot (1-\cos(x)) \sim \frac{x^3}{2}$ $(x\to 0)$

Quindi si deve sviluppare il numeratore fino al 3° ordine:

- $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \Rightarrow \sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)$
  $= 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow 2 \cdot \ln(1+x) = 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$
- $e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow x^2 \cdot e^x = x^2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

Quindi $\sin(2x) - 2\ln(1+x) - x^2 \cdot e^x =$

$= \cancel{2x} - \frac{4}{3}x^3 \cancel{- 2x} \cancel{+ x^2} - \frac{2}{3}x^3 \cancel{- x^2} - x^3 + o(x^3)$

$= \left(-\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - 1\right)x^3 + o(x^3) = -3x^3 + o(x^3) \Rightarrow$ (per il princ. di sost.)

$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^3}{x^3/2} = -6$

Esercizio 5

[4 punti]

Sia $f(x,y) = \ln(1 + x y^2)$. Calcolare la derivata direzionale di f in $(1,1)$ nella direzione $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

Risoluzione

Procedendo come nel compito 1-A segue

$D_v f(1,1) = \text{grad} f(1,1) \cdot v$

$= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) : x \in [0,1],\ x^2 \le y \le x\}$ e calcolare l'integrale doppio $\iint_D 5\,x^2 y\,dx\,dy.$ $= I$

Risoluzione

Grafico dominio → compito 1-A

Inoltre, procedendo come nel compito 1-A

si calcola

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 5x^2 \cdot y \, dy \, dx$$

$$= \ldots = \frac{1}{7}$$