Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore 10.1.11

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [09/10]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

(ii) Fare un esempio di una serie convergente.

Risposta

(i) La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ dove $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ è la somma parziale n-esima.

(ii) La serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ converge (alla somma $s = 1$)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Quanti punti critici ha la funzione $F(x) = \int_2^x (t^4 - t)^3\, dt$? (Sugg.: NON calcolare l'integrale!)

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$. Allora la funzione integrale $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile con $F'(x) = f(x)$.

(ii) Per il teorema fond. F è derivabile con $F'(x) = (x^4 - x)^3$. Quindi $F'(x) = 0 \iff$ $0 = (x^4 - x) = x \cdot (x^3 - 1) \iff x = 0$ opp. $x = 1$

Quindi F ha 2 punti critici.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Allora la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita come $b_n := \dfrac{2a_n}{1+3a_n^2}$ è

[a] limitata [b] convergente [c] irregolare [d] divergente

Risoluzione

Sia $f(x) = \dfrac{2x}{1+3x^2}$. Allora f è limitata: Se $|x| \le 1 \Rightarrow |f(x)| = \dfrac{2|x|}{1+3x^2} \le \dfrac{2|x|}{1} \le 2$, se $|x| \ge 1 \Rightarrow |f(x)| \le \dfrac{2|x|}{3x^2} \le \dfrac{2}{3|x|} \le \dfrac{2}{3}$

Quindi, visto che $b_n = f(n)$, anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1[-1,1]$ tale che $x \cdot f'(x) \le 0$ per ogni $x \in [-1,1]$. Allora,

[a] esiste $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = 0$ [b] $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale di f

[c] $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ [d] $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale di f

Risoluzione

Dalla condizione $x \cdot f'(x) \le 0$ segue che

$f'(x) \ge 0$ per $x \in [-1,0)$ e $f'(x) \le 0$ per $x \in (0,1]$.

Quindi in $[-1,0)$ f è crescente e in $(0,1]$ è decrescente.

$\Rightarrow x_0 = 0$ è un pto. di massimo locale.

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{3xy^2}{x^2+2y^4}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$

[a] è differenziabile in $(0,0)$ [b] non è derivabile in $(0,0)$

[c] è continua in $(0,0)$ [d] non è continua in $(0,0)$

Risoluzione

Ponendo $x = y^2$ segue $f(x,y) = \dfrac{3y^2 \cdot y^2}{y^4 + 2y^4} = 1 \neq 0 = f(0,0)$

per $y = 0$. Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\ln(1+x)-\sin(x)}{1-\cos(x)} = \ell \quad (=-1)$$

Risoluzione

• $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x\to 0$, quindi si deve sviluppare il numeratore fino al 2° ordine:

• $\cos(t) = 1+o(t) \Rightarrow \cos(2x) = 1+o(x)$ per $x \to 0$.

$\Rightarrow \cos(2x)\cdot\ln(1+x) = (1+o(x))\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$

$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$\Rightarrow \cos(2x)\cdot\ln(1+x)-\sin(x) = \cancel{x}-\frac{x^2}{2}-\cancel{x}+o(x^2) \quad (x\to 0)$

$\Rightarrow$ (per il principio di sostituzione)

$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2/2}{x^2/2} = \underline{\underline{-1}}$

Esercizio 5

[4 punti]

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = y^3+2xy+y$ nel punto $\overbrace{(0,2)}^{(x_0,y_0)\,=}$.

Risoluzione

In generale, l'equazione del piano tangente è data da

$p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.

Allora, $f(x_0,y_0) = f(0,2) = 2^3+2 = 10$

$f_x(x,y) = 2y = 4$

$(x,y)=(0,2)$

$f_y(x,y) = 3y^2+2x+1 = 3\cdot 4+1 = 13$

$\Rightarrow p(x,y) = 10 + 4\cdot(x-0) + 13(y-2)$

$= \underline{\underline{-16+4x+13y}}$

Esercizio 6

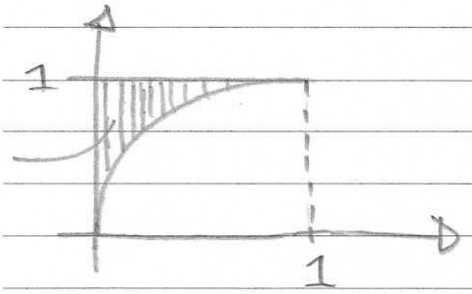
[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) : x \in [0,1],\ \sqrt{x} \le y \le 1\}$ e calcolare l'integrale $\iint_D \sqrt{x} + 4y^3 \, dx\, dy. = I$

Risoluzione

D è y-semplice.

D



Quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (\sqrt{x} + 4y^3)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} \cdot y + y^4\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{x})^4\right) dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} + 1 - x - x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$