Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore 10.1.11

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C 09/10

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ per una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

(ii) Fare un esempio di una serie divergente.

Risposta

(i) La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge a $+\infty$ se $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ dove $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ è la somma parziale n-esima.

(ii) Per esempio la serie armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Quanti punti critici ha la funzione $F(x) = \int_1^x (t - t^3)^5 \, dt$? (Sugg.: NON calcolare l'integrale!)

Risposta

(i) Cfr. compito 2-A

(ii) Per il teorema fondamentale $F'(x) = (x - x^3)^5$

Quindi $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = x - x^3 = x \cdot (1 - x^2)$

$\Leftrightarrow x = 0$ opp. $x = \pm 1$

$\Rightarrow F$ ha $\underline{\underline{3}}$ punti critici

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Allora la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita come $b_n := \dfrac{a_n}{3+2a_n^2}$ è

$\boxed{a}$ divergente $\boxed{b}$ irregolare $\boxed{c}$ limitata $\boxed{d}$ convergente

Risoluzione

Come nel compito 2-A si verifica che $f(x) = \dfrac{x}{3+2x^2}$ è limitata. Visto che $b_n = f(a_n)$ la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1[-1,1]$ tale che $x \cdot f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-1,1]$. Allora,

$\boxed{a}$ esiste $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = 0$

$\boxtimes$ b $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale di f

$\boxed{c}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \neq 0$

$\boxed{d}$ $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale di f

Risoluzione

Dalla condizione $x \cdot f'(x) \geq 0$ $\forall x$ segue che $f'(x) \leq 0$ per $x \leq 0$ e $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ $\Rightarrow$ f è decrescente in $[-1,0)$ è crescente in $(0,1]$ $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ è un pto. di <u>min.</u> locale

$\searrow \; 0 \; \nearrow$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{2xy^2}{3x^2+y^4}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$

$\boxed{a}$ è continua in $(0,0)$

$\boxed{b}$ è differenziabile in $(0,0)$

$\boxtimes$ c non è continua in $(0,0)$

$\boxed{d}$ non è derivabile in $(0,0)$

Risoluzione

Cfr. compito 2-A (ponendo $x = y^2$ segue

$\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)\sin(x) - \ln(1+x)}{1-\cos(x)} = \ell$$

Risoluzione

Con un ragionamento simile a quello nel compito 2-A segue $\ell = 1$

Esercizio 5

[4 punti]

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x^3 - 2xy + x$ nel punto $(2,0)$.

Risoluzione

Eq. piano tangente:

$$p(x,y) = f(2,0) + f_x(2,0)\cdot(x-2) + f_y(2,0)\cdot(y-0)$$

Inoltre, $f(2,0) = 2^3 + 2 = 10$

$f_x(x,y) = 3x^2 - 2y + 1 = 13$

$(x,y) = (2,0)$

$f_y(x,y) = -2x = -4 \quad \Rightarrow$

$p(x,y) = 10 + 13\cdot(x-2) - 4\cdot y$

$= \underline{\underline{-16 + 13x - 4y}}$

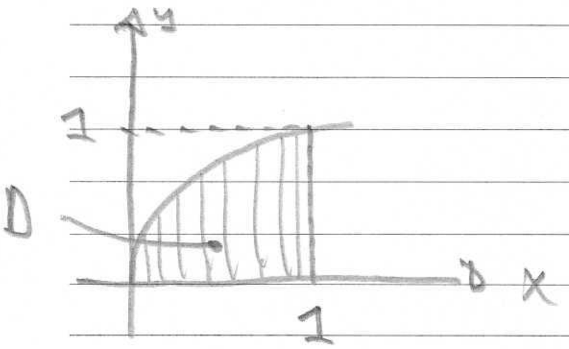
Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) : x \in [0,1],\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$ e calcolare l'integrale $\iint_D 2\sqrt{x} + y^3\, dx\, dy$. $= I$

Risoluzione

D è y-semplice.



Quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} + y^3 \, dy\, dx$$

$$= \ldots = \frac{13}{12}$$

cfr. Compito 2-A