Istituzioni di Matematiche 1° Modulo $\boxed{\text{6 CFU}}$ **A. Durata: 90 min.** **10.7.15**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

Domanda 1

[5 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = 7$.

(ii) Scrivere una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Risposta

(i) ______________________________

cfr. compito da 9 CFU

(ii) ______________________________

Domanda 2

[5 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Trovare il punto c del teorema di Rolle per la funzione $f : [-6, -4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 10x + 21$.

Risposta

(i) ______________________________

cfr. compito da 9 CFU

(ii) ______________________________

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{7+n^2}{15+12n+n^4}\right)$$

Risoluzione

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$
- $\frac{7+n^2}{15+12n+n^4} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} =: x_n \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{7+n^2}{15+12n+n^4}\right) \sim \frac{7+n^2}{15+12n+n^4} \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie S converge.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{9}{15+4(-1)^n}\right)^n$$

Risoluzione

Apr. compito 9 CFU

Esercizio 3

[6 punti]

Trovare l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = x\sin(x) + 3$ in $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Risoluzione

- $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$
- $f(x_0) = -\frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\sin(-\pi/2)}_{=-1} + 3 = 3 + \frac{\pi}{2}$
- $f'(x) = \sin(x) + x\cdot\cos(x) \Rightarrow f'(x_0) = \overbrace{\sin(-\pi/2)}^{=-1} - \pi/2\cdot\overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0}$

$= -1$

Così risulta:

$$f(x) = \left(3 + \frac{\pi}{2}\right) - 1\cdot\left(x + \pi/2\right) = \underline{\underline{3 - x}}$$

Esercizio 4

[6 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cdot \underbrace{\sin(x^2)}_{=\sin(t)}\, dx \quad \overbrace{x\, dx}^{=\frac{dt}{2}} \qquad = \frac{1}{2}$$

Risoluzione

Sostituzione: $x^2 = t \Rightarrow$ • $\frac{dt}{dx} = 2x$ cioè $\frac{dt}{2} = x \cdot dx$

• $x = 0 \Rightarrow t = 0^2 = 0$

• $x = \sqrt{\pi/2} \Rightarrow t = \left(\sqrt{\pi/2}\right)^2 = \pi/2$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cdot \frac{dt}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(t)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\Big(\overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0} - \overbrace{\cos(0)}^{=1}\Big) = -\frac{1}{2}(-1)$$

$$= 1/2$$