Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 10.7.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = 7$.

(ii) Scrivere una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Risposta

(i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$|7 - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

(ii) Se $a_n := -n$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Trovare il punto c del teorema di Rolle per la funzione $f : [-6, -4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 10x + 21$.

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$ derivabile in (a,b) t.c. $f(a) = f(b)$.

Allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

(ii) f è derivabile su $[-6,-4]$. Inoltre $f(-6) = f(-4) = -3$,

quindi verifica le ipotesi del teorema di Rolle. Si ha

$f'(x) = 2x + 10 = 0 \iff x = -5 \in [-6,-4]$, quindi

$c = -5$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\sin\left(\underbrace{\frac{7+n^3}{15+12n+n^4}}_{=:a_n}\right)\right) = +\infty$$

Risoluzione

• $\sin(x) \sim x$ e $\ln(1+y) \sim y$ per $x \to 0$ e $y \to 0$.

• $a_n \sim \frac{n^3}{n^4} \sim \frac{1}{n} =: x_n \to 0$ per $n \to +\infty$ $\Rightarrow$

$\sin(a_n) =: y_n \sim a_n \sim x_n$ per $n \to +\infty$ $\Rightarrow$

$\ln(1+y_n) \sim y_n \sim x_n = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$.

• La serie (armonica) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, quindi per il criterio del confronto asintotico anche S diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{9}{15+4(-1)^n}\right)^n}_{=:c_n} = 0$$

Risoluzione

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi

$$\underbrace{\left(\overbrace{\frac{9}{11}}^{<1}\right)^n}_{\to 0} = \left(\frac{9}{15-4}\right)^n \le c_n \le \left(\frac{9}{15+4}\right)^n = \underbrace{\left(\overbrace{\frac{9}{19}}^{<1}\right)^n}_{\to 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per $n \to +\infty$.

Quindi per il teorema dei carabinieri il limite $= 0$.

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $\overbrace{(1, \frac{\pi}{4})}^{(x_0, y_0)}$ alla funzione $f(x, y) = x\sin(y) + 3$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = 1\cdot \sin(\pi/4) + 3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 3$
- $f_x(x,y) = \sin(y) \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f_y(x,y) = x\cdot\cos(y) \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = 1\cdot\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Quindi

$$p(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \pi/4)$$

NB. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^3y^3} - 1}{x^6 + y^6} \qquad \nexists$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$. Allora otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot m^3x^3} - 1}{x^6 + m^6\cdot x^6} = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{e^{m^3\cdot x^6} - 1}{m^3\cdot x^6}}_{\to 1 \text{ per } x\to 0} \cdot \frac{m^3\cdot \cancel{x^6}}{\cancel{x^6}\cdot(1+m^6)}\right]$$

$$= \frac{m^3}{1+m^6}$$

Visto che il limite dipende da m, il limite in $\mathbb{R}^2$ non esiste

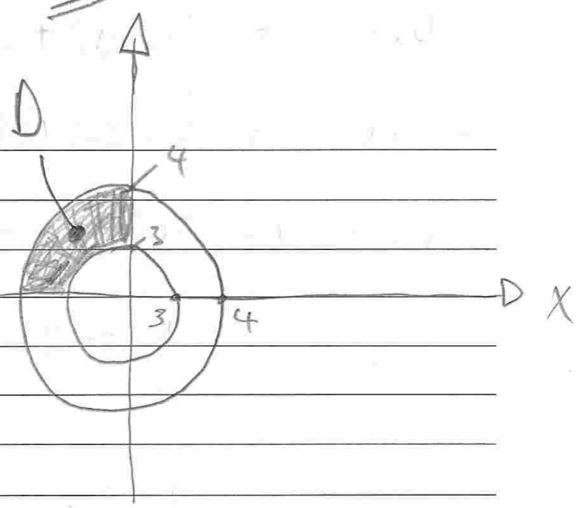
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = 7$$

Risoluzione



D corrisponde a

$D' = \{(\rho, \vartheta) \mid \rho \in [3,4], \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\}$

$= [3,4] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$

in coord. polari.

Quindi risulta (usando che $y = \rho \cdot \sin(\vartheta)$ e $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$)

$$I = \iint_{D'} 2 \cdot \frac{\rho \cdot \sin(\vartheta)}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho} \cdot d\vartheta\, d\rho$$

det. della Jacobiana!

$$= \int_3^4 \int_{\pi/2}^{\pi} 2\cdot\rho \cdot \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\rho =$$

$$\begin{cases} \cos(\pi) = -1 \\ \cos(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

$$= \left[\frac{2\cdot\rho^2}{2}\right]_3^4 \cdot \left[-\cos(\vartheta)\right]_{\pi/2}^{\pi} = (16-9)\cdot(-[(-1)-0])$$

$= 7$