Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **10.9.12**

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Dare un esempio di una successione convergente al limite $l = \pi$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite $l\in\mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.c. $|l-a_n|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$

(ii) $a_n=\pi+\frac{1}{n}\to\pi$ per $n\to+\infty$

Domanda 2

[3 punti]

Sia $f\in C^1[a,b]$ tale che $f'(a)\cdot f'(b)<0$. Allora

- [a] f è decrescente
- [b] f ha un unico punto di massimo in $[a,b]$
- [X] ~~c~~ f ha un punto critico in $[a,b]$
- [d] esiste $c\in[a,b]$ tale che $f(c)=0$

Risposta

$f':[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e $f'(a)\cdot f'(b)<0$ per ipotesi

$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ t.c. $f'(c)=0 \Rightarrow c$ è un punto critico di f

teor. degli zeri

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(n \cdot \left[\alpha - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)^n}_{= a_n}$

$0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ per $n \to +\infty$

Risoluzione

Consideriamo

$$n \cdot \left(\alpha - \cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha - 1}{1/n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(1/n)^2}}_{\to \frac{1}{2}} + n(\alpha - 1)$$

Quindi, se $\alpha \neq 1$, allora $|n \cdot (\alpha - 1)| \to +\infty \Rightarrow |a_n| \to +\infty$

$\Rightarrow$ La serie non converge (per il criterio necessario).

Se invece $\alpha = 1$, allora $a_n \geq 0 \ \forall n$ e

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1 - \cos(1/n)}{1/n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos(1/n)}{1/n^2}}_{\to 1/2} \to 0 = q < 1 \Rightarrow$$

La serie converge per il criterio della radice.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^{e^2} \frac{\overbrace{dx}^{= dt}}{x \cdot \underbrace{(\ln(x) + 1)}_{= t+1}} =: I$$

Risoluzione

Sost: $\ln(x) = t \Rightarrow$

- $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$
- $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$
- $x = e^2 \Rightarrow t = \ln(e^2) = 2$

Allora, sostituendo $\ln(x) = t$ segue

$$I = \int_0^2 \frac{1}{t+1} \, dt = \ln(t+1) \Big|_0^2$$

$$= \ln(3) - \underbrace{\ln(1)}_{= 0} = \ln(3)$$

Esercizio 3

[4 punti]

Sia $f(x,y) = 3 + \sin\big(x + \cos(y)\big)$, $P_0 = (\pi, \frac{\pi}{2})$ e $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Calcolare la derivata direzionale $D_v f(P_0)$ e l'equazione del piano tangente di f in P_0.

Risoluzione

f è derivabile parzialmente con $f_x(x,y) = \cos(x + \cos(y))$ e $f_y(x,y) = -\cos(x+\cos(y))\cdot\sin(y) \Rightarrow f_x(\pi, \pi/2) = \cos(\pi + \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0}) = -1$ e $f_y(x,y) = -\cos(\pi + \cos(\pi/2))\cdot\sin(\pi/2) = 1$.

$$\Rightarrow \bullet\ p(x,y) = f(P_0) + f_x(P_0)\cdot(x-\pi) + f_y(P_0)(y - \pi/2)$$

$$= 3 + \underbrace{\sin(\overbrace{\pi + \cos(\pi/2)}^{=\pi})}_{=0} + (-1)(x-\pi) + 1\cdot(y - \pi/2)$$

$$= 3 - (x-\pi) + (y - \pi/2) = \underline{3 + \tfrac{\pi}{2} - x + y}$$

$$\bullet\ D_v f(P_0) \underset{*}{=} \nabla f(P_0)\cdot v = (-1, 1)\cdot\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

* per il teorema del gradiente

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2} =: \ell$$

Risoluzione

Sia $h = x\cdot y$. Allora per $(x,y)\to(0,0)$ segue $h \to 0$ e quindi $\sin^2(x\cdot y) = \sin^2(h) \sim h^2 = (x\cdot y)^2$. Così risulta

$$\left| 0 - \frac{\sin^2(x\cdot y)}{x^2+y^2} \right| \sim \frac{|x\cdot y|^2}{x^2+y^2} \underset{\text{in coord. polari}}{=} \frac{\rho^4\cdot\cos^2(\vartheta)\cdot\sin^2(\vartheta)}{\rho^2}$$

$$= \rho^2\cdot\cos^2(\vartheta)\cdot\sin^2(\vartheta)$$

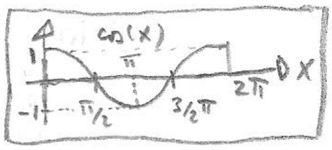
$$\le \rho^2 = g(\rho) \to 0 \text{ per } \rho\to 0$$

$\Rightarrow$ il limite esiste e $\ell = 0$.

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-\cos(x)}\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo.



Risoluzione

Usando che $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)\ \forall x > 0$ segue che $f(x) = -\ln(1-\cos(x))$.

Dominio: $x \in D(f) \Leftrightarrow 1-\cos(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Simmetrie, periodicità: • $1-\cos(x)$ è pari $\Rightarrow f(x)$ è pari

• $1-\cos(x)$ è periodica di periodo $T = 2\pi \Rightarrow$ $f(x)$ — " —

Quindi basta studiare f sull'intervallo $(0, 2\pi)$.

Intersezione con gli assi: • $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\cos(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ se $x \in (0, 2\pi)$

• $f(0)$ non definita $(0 \notin D(f))$

Segno di f: $f(x) > 0 \Leftrightarrow 1-\cos(x) < 1 \Leftrightarrow \cos(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ se $x \in (0, 2\pi)$

Limiti alla frontiera di $D(f)$: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\ln(0^+) = +\infty$, $\lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = -\ln(0^+) = +\infty$

$\Rightarrow x = 0$ e $x = 2\pi$ sono asintoti verticali

Studio di f': $f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi$ ($x \in (0, 2\pi)$)

Studio f'': $f''(x) = -\dfrac{(1-\cos(x))\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} = -\dfrac{\cos(x)-1}{(1-\cos(x))^2} = \dfrac{1}{1-\cos(x)} > 0$ $\forall x \in D(f)$

$\Rightarrow$ • $x_0 = \pi$ è un pto. di minimo locale, $f(\pi) = -\ln(2)$

• non ci sono pti. di flesso

• f è convessa.

Grafico: