Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **10.9.12**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

Firma: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Dare un esempio di una successione convergente al limite $l = \sqrt{2}$.

Risposta

(i) Cfr. compito A

(ii) $a_n = \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ converge al limite $\sqrt{2}$

Domanda 2

[3 punti]

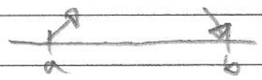
Sia $f \in C^1[a,b]$ tale che $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Allora

- [x] a) f non è monotona
- [ ] b) esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$
- [ ] c) f è decrescente
- [ ] d) f ha un unico punto di minimo in $[a,b]$

Risposta

$f'(a) \cdot f'(b) < 0 \Rightarrow f'(a)$ e $f'(b)$ hanno segno opposto, cioè

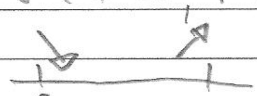
- $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0 \Rightarrow f$ è crescente vicino a a, decrescente vicino a b



$\Rightarrow f$ non è monotona

oppure

- $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0 \Rightarrow f$ è decrescente vicino a a, crescente vicino a b



$\Rightarrow f$ non è monotona

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \cdot \left[\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) - \beta \right] \right)^n =: a_n$

Risoluzione

Consideriamo

$$n \cdot \left(\sin\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - \beta \right) = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2}}_{\to 1} - n \cdot \beta \to 0 \cdot 1 = 0 \text{ per } n \to +\infty$$

. Quindi, se $\beta \neq 0$ allora $|\beta \cdot n| \to +\infty \Rightarrow |a_n| \to +\infty \Rightarrow$ la serie non converge (per il criterio necessario). Se invece $\beta = 0$, allora $a_n \geq 0 \ \forall n$ e

$$\sqrt[n]{a_n} = n \cdot \sin(1/n^2) = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2}}_{\to 1} \to 0 \cdot 1 = 0 = q < 1 \text{ per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge per il criterio della radice.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{\overbrace{\ln(x) + 1}^{=t+1}}{x}\, \overbrace{dx}^{=dt} =: I$$

Risoluzione

Allora, sostituendo $\ln(x) = t$ segue

$$I = \int_0^{\ln(2)} t+1 \, dt = \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^{\ln(2)}$$

$$= \frac{\ln^2(2)}{2} + \ln(2).$$

Sost: $\ln(x) = t \Rightarrow$

- $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$
- $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$
- $x = 2 \Rightarrow t = \ln(2)$

Esercizio 3

[4 punti]

Sia $f(x,y) = 1+\sin(2y+\cos(x))$, $P_0 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Calcolare la derivata direzionale $D_v f(P_0)$ e l'equazione del piano tangente di f in P_0.

Risoluzione

f è derivabile parzialmente con $f_x(x,y) = -\cos(2y+\cos(x))\cdot\sin(x)$,

$f_y(x,y) = 2\cos(2y+\cos(x)) \Rightarrow f_x(\pi/2, \pi) = -\cos(2\pi + \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0})\cdot\sin(\pi/2) = -1$

$f_y(\pi/2,\pi) = 2\cdot\cos(2\pi+\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0}) = 2$

$$\Rightarrow \bullet\ p(x,y) = f(P_0) + f_x(P_0)\cdot(x-\pi/2) + f_y(P_0)\cdot(y-\pi)$$

$$= 1 + \underbrace{\sin(\pi + \overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0})}_{=0} - 1\cdot(x-\pi/2) + 2(y-\pi)$$

$$= 1 - (x-\pi/2) + 2(y-\pi) = 1 - \tfrac{3}{2}\pi - x + 2y$$

$$\bullet\ D_v f(P_0) \underset{\uparrow}{=} \nabla f(P_0)\cdot v = (-1,2)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

per il teor. del gradiente

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} =: \ell$$

Risoluzione

Sia $h = x\cdot y$. Allora per $(x,y)\to(0,0)$ segue $h\to 0$ e

quindi $1-\cos(xy) = 1-\cos(h) \sim \frac{h^2}{2} = \frac{(x\cdot y)^2}{2}$. Così

risulta

in coord. polari

$$\left|0 - \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}\right| \sim \frac{\frac{x^2\cdot y^2}{2}}{x^2+y^2} \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\,\frac{\varrho^4\cdot\cos^2(\vartheta)\cdot\sin^2(\vartheta)}{\varrho^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\varrho^2\cdot\cos^2(\vartheta)\cdot\sin^2(\vartheta)$$

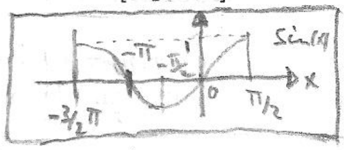
$$\leq \frac{\varrho^2}{2} = g(\varrho) \to 0 \text{ per } \varrho\to 0$$

$\Rightarrow$ il limite esiste e $\ell = 0$.

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \ln(1 - \sin(x))$ e tracciarne un grafico approssimativo.



Risoluzione

Dominio: $x \in D(f) \iff 1-\sin(x) > 0 \iff \sin(x) \neq 1 \iff x \neq \pi/2 + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$

Simmetrie, periodicità: • $1-\sin(x)$ non è pari né dispari $\implies$ f non è pari, né dispari.

• $1-\sin(x)$ è periodica di periodo $T = 2\pi \implies$ f — " — .

Quindi basta studiare f sull'intervallo $(-3/2\,\pi, \pi/2)$ di lunghezza 2π

Intersezione con gli assi: • $f(x) = 0 \iff 1-\sin(x) = 1 \iff \sin(x) = 0 \iff x = -\pi$ opp. $x = 0$

$x \in (-3/2\,\pi, \pi/2)$

• $f(0) = 0$

Segno di f: $f(x) > 0 \iff 1-\sin(x) > 1 \iff \sin(x) < 0 \iff x \in (-\pi, 0)$

Limiti alla frontiera di D(f): $\lim_{x \to -\frac{3}{2}\pi^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$.

$\implies x = -\frac{3}{2}\pi$ e $x = \frac{\pi}{2}$ sono asintoti verticali.

$x \in (-3/2\,\pi, \pi/2)$

Studio di f': $f'(x) = \frac{-\cos(x)}{1-\sin(x)} \implies f'(x) = 0 \iff \cos(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2}$

Studio di f'': $f''(x) = \frac{(1-\sin(x))\cdot\sin(x) + \cos(x)\cdot(-\cos(x))}{(1-\sin(x))^2} = \frac{\sin(x)-1}{(1-\sin(x))^2} = \frac{-1}{1-\sin(x)}$

$< 0 \ \forall x \in D(f)$

$\implies$ • $x_0 = -\pi/2$ è un pto. di max. locale, $f(-\pi/2) = \ln(2)$

• non esistono pti. di flesso

• f è concava.

Grafico: